Fraktale są wśród nas

Zuzanna Cyunel

klasa 5

Szkoła Podstawowa nr 95

ul. Wileńska 9

31 - 413 Kraków

Kraków 2012

Abstrakt

W swojej pracy definiuję pojęcie „fraktal”, opisuję jego podział i historię. W pracy zawarłam liczne przykłady fraktali, które pochodzą zarówno ze świata matematyki (np.: krzywa Kocha, Trójkąt i Dywan Sierpińskiego, zbiór Cantora) jak i z otaczającej nas rzeczywistości (np.: paproć, szyszka, Mossbrae Falls w Kalifornii). Stworzyłam także własne przykłady figur fraktalnych.

Staram się udowodnić, że geometria fraktalna może służyć do odwzorowań bardzo skomplikowanych form natury i wszystkiego co nas otacza. Wykazuję, że dzięki rozwojowi nowych technik komputerowych, geometria fraktalna staje się narzędziem do tworzenia nowych form i wzorów w sztuce, architekturze i nauce, czego przykłady przedstawiam w mojej pracy.

Słowa kluczowe

Fraktale, geometria fraktali, odwzorowanie natury, forma geometryczna

Spis treści:

Kraków 2012

Wstęp

Wiele osób twierdzi, że Wszechświat to rozproszone planety, komety i zbiory pyłów. Nieposegregowane odłamki skał lub przypadkowe oceany. Nazywają je układami chaotycznymi. Co jednak jeśli wcale tak nie jest?

Wiele naturalnych rzeczy jest idealnie dopracowanych pod każdym względem. Wystarczy rozejrzeć się wokół siebie, by to zobaczyć. Setki, tysiące powtarzalnych elementów, tworzących z pozoru nieuporządkowaną formę, okazuje się być czymś zupełnie innym, na przykład: krzewy paproci, których największy liść składa się z setek takich samych małych listków; chmury płynące po niebie, drzewa czy postrzępiona linia brzegowa, wyglądające tak samo w całości jak w swym najmniejszym fragmencie. Takie twory nazywamy fraktalami.

Wybrałam ten temat przez przypadek. Przez wiele dni głowiłam się nad pracą matematyczną. Pewnego dnia pojechałam z rodziną do lasu na wycieczkę. Nagle podczas wędrówki, gdy już ogarniały mnie wątpliwości, że nigdy nic nie wymyślę, potknęłam się o gałąź leżącą na ziemi. Oszołomiona upadkiem wstałam powoli i w gąszczy liści dostrzegłam połyskującą pajęczynę. Podeszłam tam i zaczęłam się jej uważnie przyglądać. Choć była to rzecz tak przeciętna, ogarnęła mnie ciekawość. Zrozumiałam, z jak wielu takich samych elementów składało się dzieło pająka oraz, że na swój sposób ono jest wyjątkowe.

Zaczęłam poszukiwać takich zależności i odnalazłam dziedzinę nauki, która się tym zajmuję: geometrię fraktalną. Przeczytałam na ten temat wiele ciekawych książek i prac naukowych, odnalazłam programy komputerowe do tworzenia fraktali oraz spróbowałam stworzyć własne przykłady geometrii fraktali. Wybrane elementy umieściłam w poniższej pracy.

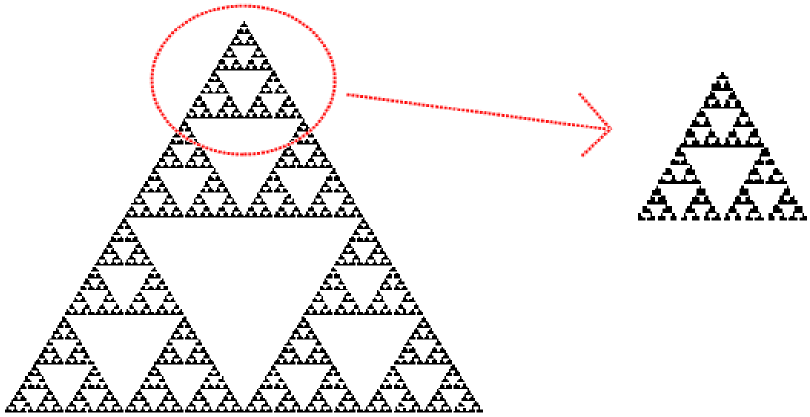
1. Czym są fraktale?

Istnieje wiele definicji fraktali. W niniejszej pracy przyjęłam następującą:

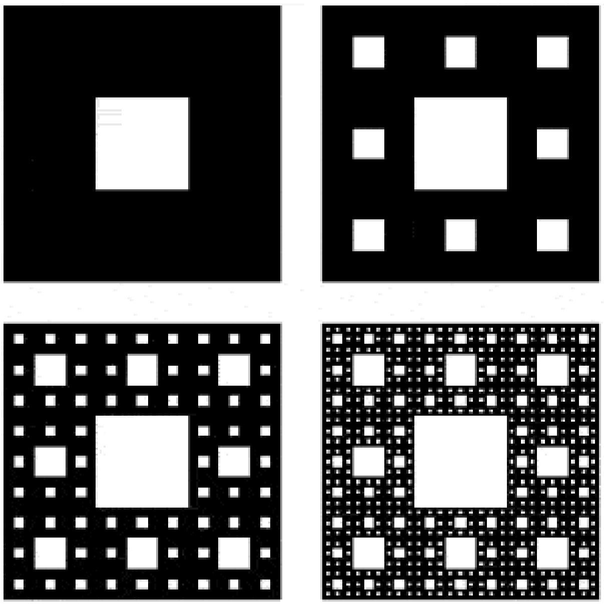
Fraktal (*łac. fractus* – złamany, cząstkowy) to krzywa, powierzchnia lub bryła powstająca w procesie kolejnego dzielenia figury. W znaczeniu potocznym oznacza zwykle obiekt samopodobny albo nieskończenie powtarzalny w formie.

Właściwości fraktali:

- fraktale mają nieskończone samopodobieństwo, oznacza to, że jeżeli odpowiednio powiększylibyśmy dowolnie mały jego kawałek przypominałby do złudzenia cały zbiór lub jego znaczną część.



- fraktale mają prosty opis i często są otrzymywane przez powtarzanie nieskończenie wiele razy tej samej operacji.



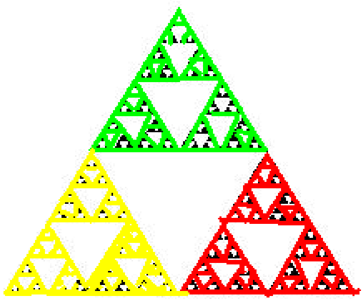
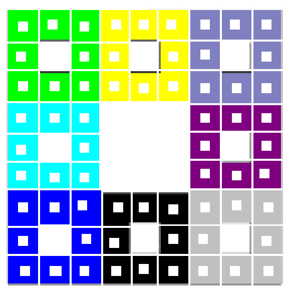
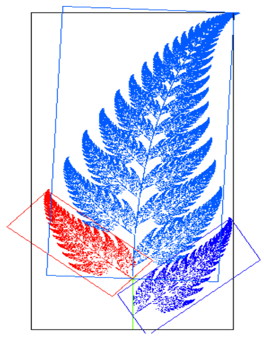
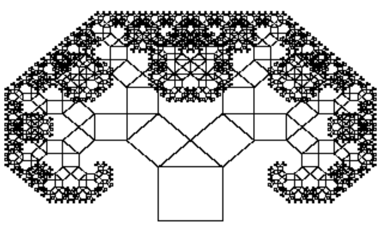
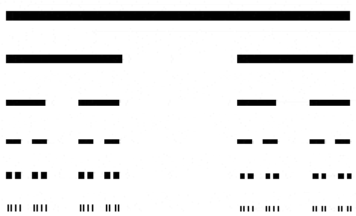
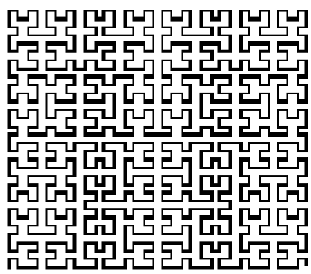
- mają skomplikowaną strukturę, która nie daje się opisać w języku tradycyjnej geometrii
- można je podzielić na dwie kategorie:
  - fraktale regularne (idealne samopodobieństwo)
  - fraktale nieregularne

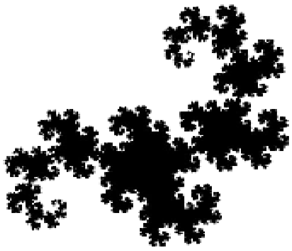
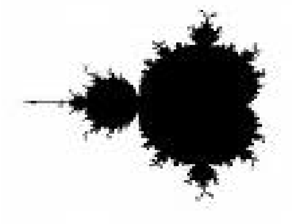
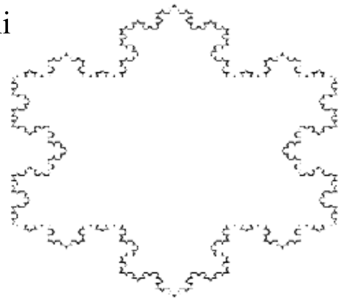
2. Skąd wzięły się fraktale?

Większość osób wie czym jest geometria euklidesowa. Zajmuje się ona figurami o idealnych kształtach. Uczymy się w szkole o odcinkach, liniach prostych, okręgach, wielokątach itp. Niestety w rzeczywistości występują one niezwykle rzadko. Na przykład księżyc, o którym mówimy, że jest kulą, wcale nią nie jest. Wiemy, że występują na nim liczne kratery lub rowy. Podobnie na Ziemi jest wiele rzeczy o nieidealnych geometrycznie kształtach. Jak opiszemy postrzępione linie brzegowe przeróżnych państw lub fantazyjne kształty chmur? Do opisu takich figur potrzeba czegoś więcej niż tradycyjnej geometrii. Do tego właśnie możemy wykorzystać fraktale.

Pojęcie fraktali wprowadził w latach 70 ubiegłego stulecia francuski matematyk i informatyk Benoit Mandelbrot. Był on odkrywcą uniwersalnego obiektu zwanego „zbiorem Mandelbrota”. Oczywiście nie były to pierwsze przykłady fraktali, wiele obiektów pojawiło się o wiele wcześniej np. zbiór Cantora, trójkąt Sierpińskiego oraz krzywa Penao. Ale wtedy nikt ich nie nazywał fraktalami.

3. Przykłady fraktali

 Trójkąt Sierpińskiego	 Dywan Sierpińskiego	 Paproć Barnsleya
 Drzewo Pitagorasa	 Zbiór Cantora	 Krzywa Penao

Smok Heighwaya 	 Żuk Mandelbrota	Śni 

Poniżej przedstawię sposób powstawania wybranych przeze mnie fraktali.

Zbiór Cantora

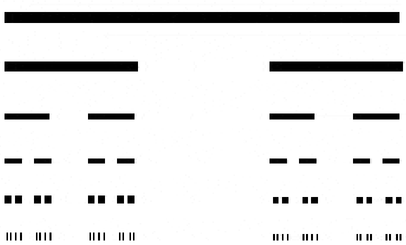
Zbiór Cantora jest najprostszym przykładem fraktala.

Weźmy dowolny odcinek

Następnie podzielmy go na trzy części i wyrzućmy środkową.

Zróbmy to samo z mniejszymi odcinkami

Wykonując tę operację nieskończenie wiele razy na każdym odcinku otrzymamy pełny zbiór Cantora.



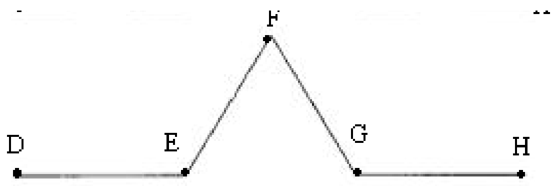
Krzywa Kocha

Krzywa Kocha ma bardzo prostą budowę.

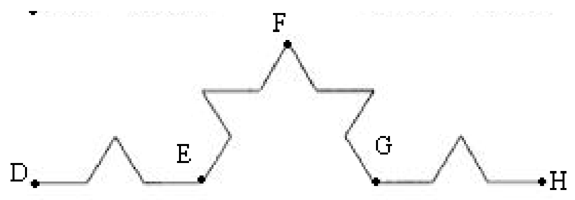
Weźmy dowolny odcinek DH

Następnie podzielmy go na trzy równe odcinki : DE, EG, GH.

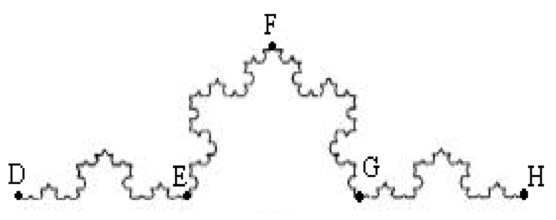
Teraz usuńmy środkowy odcinek EG i w jego misce wstawmy dwa boki: EF i FG. Dzięki temu otrzymamy łamaną jak na rysunku poniżej.



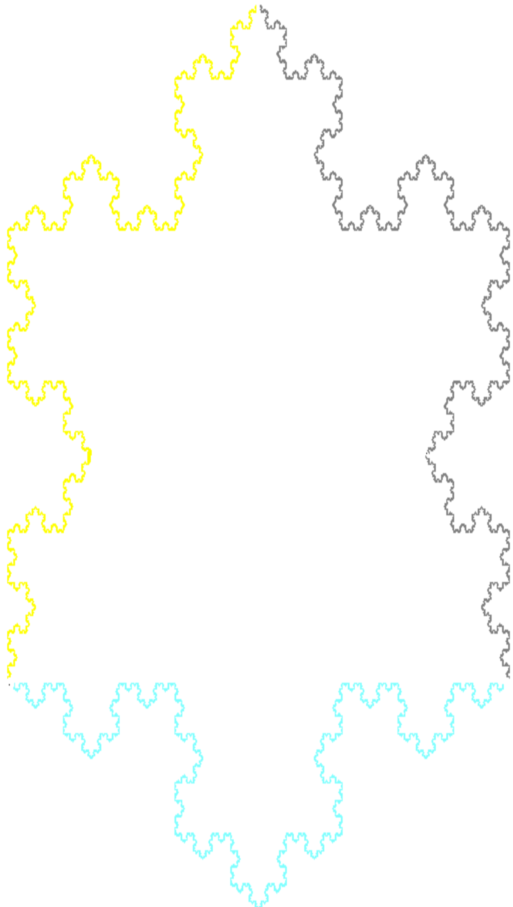
Następnie każdy odcinek dzielimy w ten sam sposób.



Powtarzając tą operację nieskończenie wiele razy otrzymamy Krzywą Kocha.

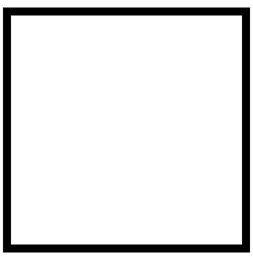


Jeżeli zrobimy tę operację na podstawie trójkąta równobocznego zobaczymy inny wariant Krzywej Kocha, który jest połączeniem trzech fraktali.

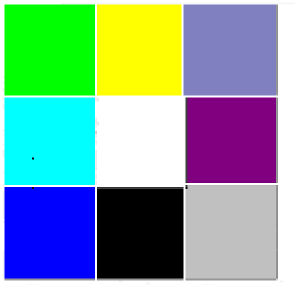


Dywan Sierpińskiego

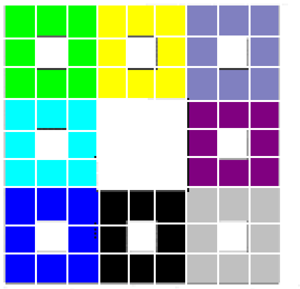
Weźmy dowolny kwadrat.



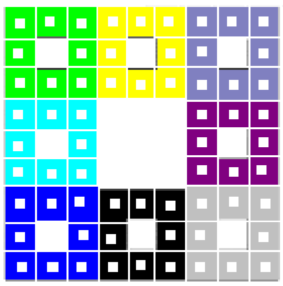
Następnie podzielmy go na dziewięć takich samych kwadratów, oraz usuńmy środkowy.



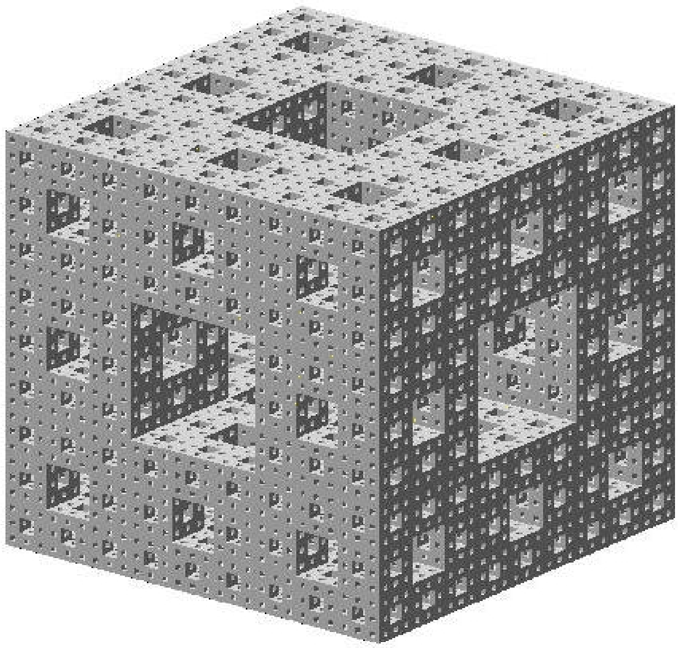
Później zróbmy to samo z mniejszymi kwadratami.



Po wykonaniu tej operacji nieskończenie wiele razy otrzymamy pełną figurę nazywaną Dywanem Sierpińskiego.

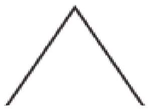


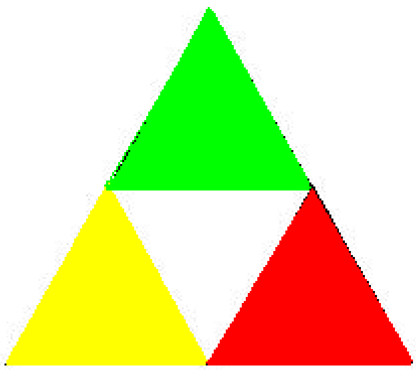
Istnieje także trójwymiarowa wersja dywanu Sierpińskiego.



<u>**Trójkąt Sierpińskiego**</u>

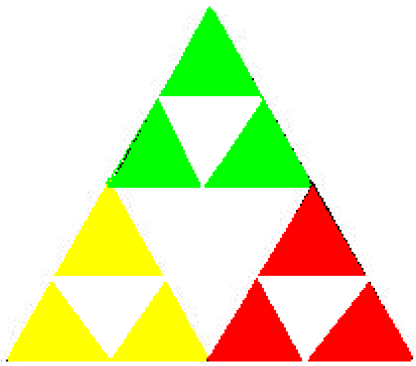
Weźmy dowolny trójkąt równoboczny.



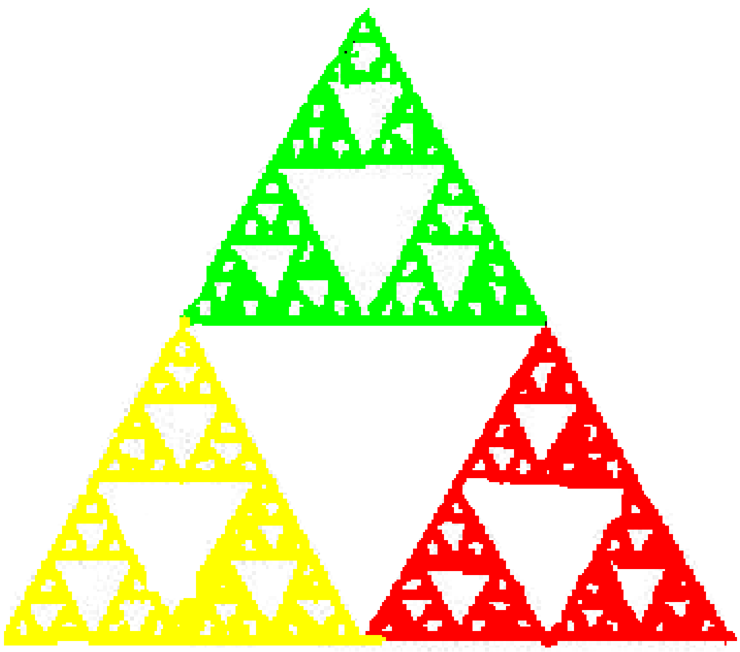


Następnie podzielmy go na cztery równe trójkąty równoboczne i usuńmy środkowy.

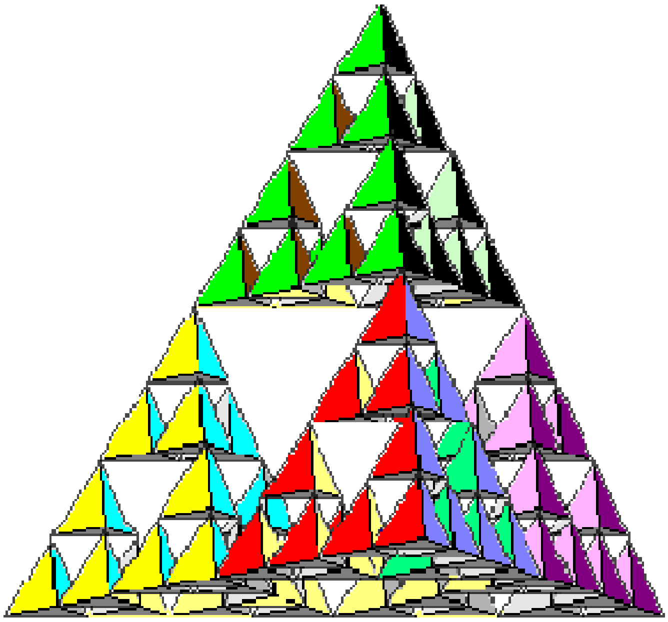
W ten sam sposób dzielmy mniejsze trójkąty.



Powtarzając tę procedurę nieskończenie wiele razy otrzymamy trójkąt Sierpińskiego.

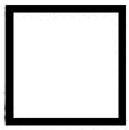


Istnieje również trójwymiarowa wersja trójkąta Sierpińskiego, która powstaje na podstawie czworościanu, a nazywa się **piramidą Sierpińskiego**.

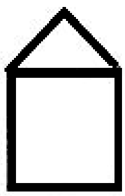


Drzewo Pitagorasa

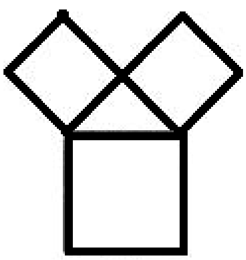
Weźmy dowolny kwadrat.



Następnie stwórzmy na jego górnym boku trójkąt równoramienny.

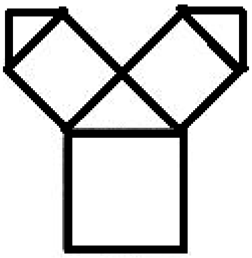


Do boków trójkąta przystawmy dwa identyczne kwadraty.

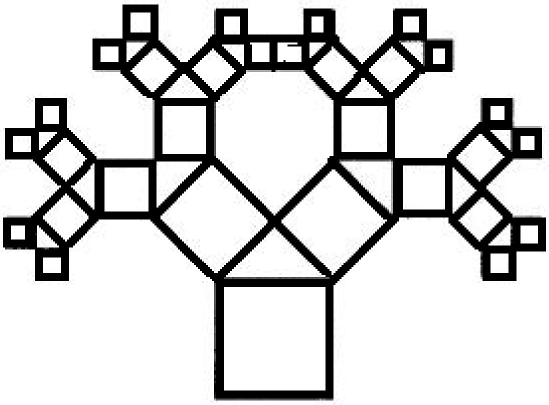


Kraków 2012

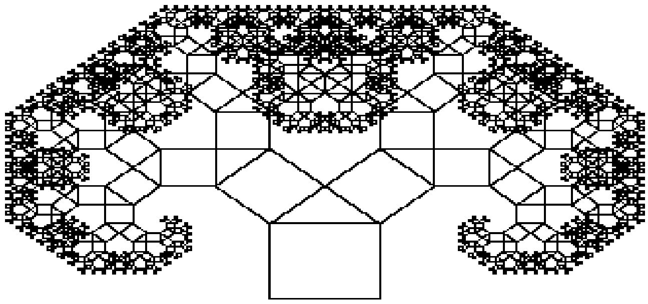
Do mniejszych kwadratów dostawiamy trójkąty równoramienne.



Powtarzamy wcześniejsze kroki.



Powtarzając tę procedurę nieskończenie wiele razy otrzymamy drzewo Pitagorasa.



4. Fraktale w naturze

Fraktale występują także w przyrodzie. Teraz pokażę parę przykładów.

Budowę fraktalną ma na przykład pajęczyna.

Fraktalne są też Mossbrae Falls w Kalifornii (USA)

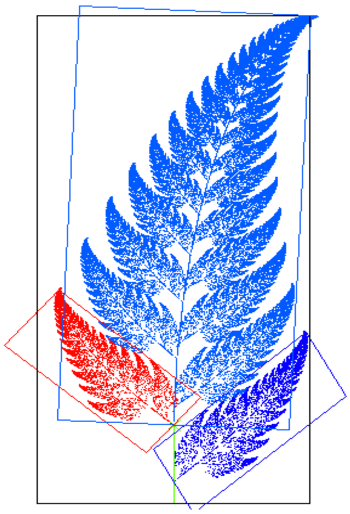
Paproć także jest fraktalem

Tak jak i nasiona słonecznika.

Kraków 2012

Szyszka ma budowę fraktalną.

Od razu zauważamy odmienność i cudowność tych form natury. Wiele z nich widzimy na co dzień. Wielu matematyków zafascynowała ta matematyczna dokładność przyrody.
Jednym z nich był Michael F. Barnsley który stworzył fraktal niezwykle podobny do liścia paproci. Nazywa się on paproć Barnsleya. Aby go stworzyć wymaga się nierównomiernego doboru prawdopodobieństw losowania przekształceń.



Jednak nie tylko na naszej planecie istnieją naturalne fraktale.

Co zaskakujące, są nimi np. tak wielkie obiekty jak Galaktyki.

Geometria Fraktalna opisuje twory natury w idealny sposób!

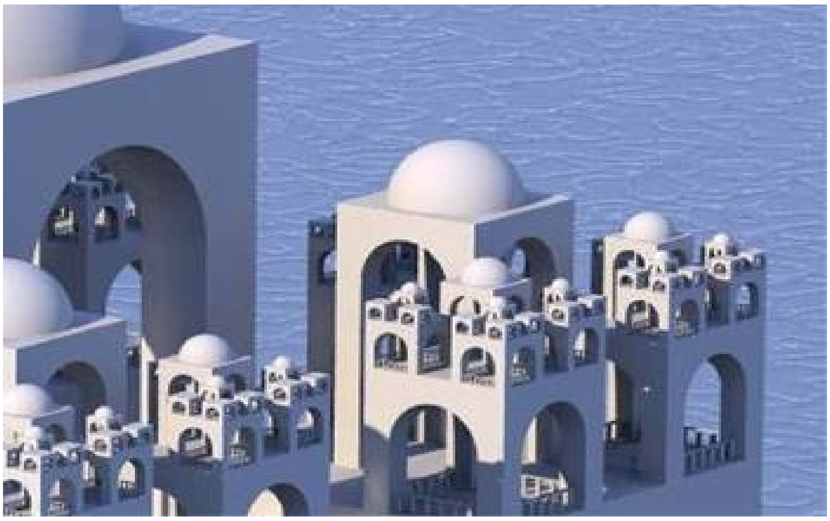
5. Zastosowanie geometrii fraktalnej w tworzeniu nowych form.

Fraktale oprócz tego, że występują w naturze, są wykorzystywane do tworzenia nowych form w różnych dziedzinach nauki i sztuki.

<u>Architektura</u>

W architekturze możemy zaobserwować wiele fraktalnych form.

Oto Świątynia Lotosu w Delhi (Indie) zaprojektowana przez Fahiborz'a Sahba



Projekt miasta fraktalnego

Kraków 2012

Basen Olimpijski Pekin (Chiny)

Fraktalne są również przenośne konstrukcje...

Medycyna

Dzięki fraktalom w medycynie możliwe jest ocenianie tempa wzrostu lub zanikania fragmentów układów biologicznych, poznawanie i leczenie niektórych nowotworów, obliczanie pola powierzchni komórek itp.

Tak samo dzięki fraktalom możliwe jest rozszyfrowanie algorytmu DNA.

Ekonomia

Ekonomia wykorzystuje Geometrię Fraktalną do analiz danych finansowych.
Powstała hipoteza rynku fraktalnego polegająca na tym iż można prognozować zjawiska ekonomiczne za pomocą fraktali. Odkrywcy zauważyli, że da się prognozować małe zjawiska jak i te ogromne z powodu ich samopodobieństwa, jak we fraktalach.

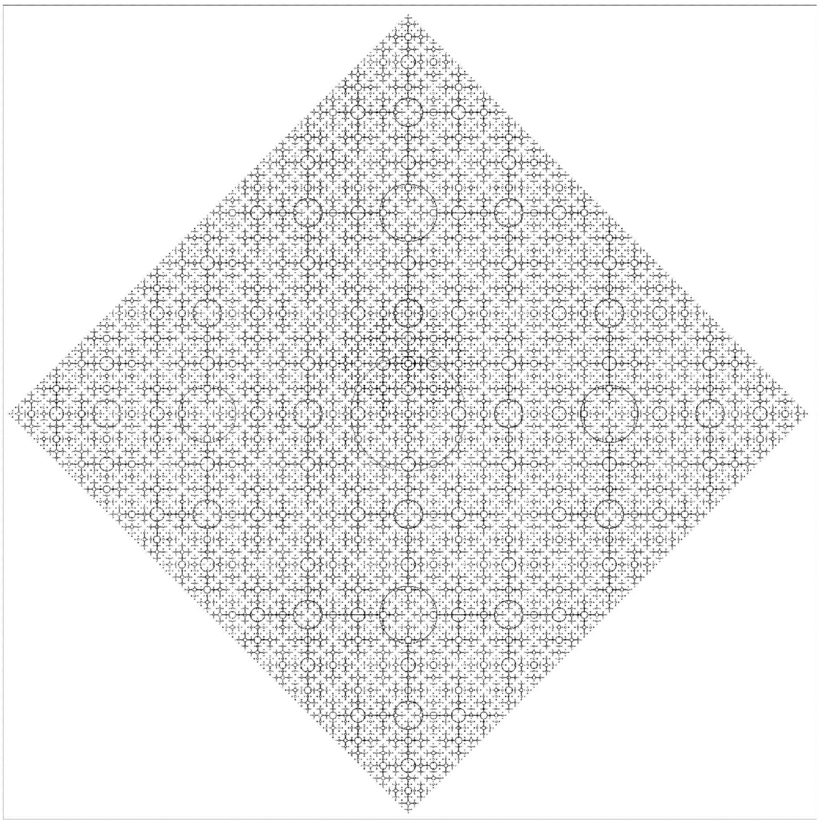
Informatyka

W Informatyce mamy kompresję fraktalną (kompresja polega na zmianie struktury danych, aby w efekcie zmniejszyły one swój rozmiar) polega ona na znajdowaniu podobieństwa pomiędzy poszczególnymi fragmentami obrazu.
Fraktale wykorzystuje się tam jeszcze w wielu innych działaniach.

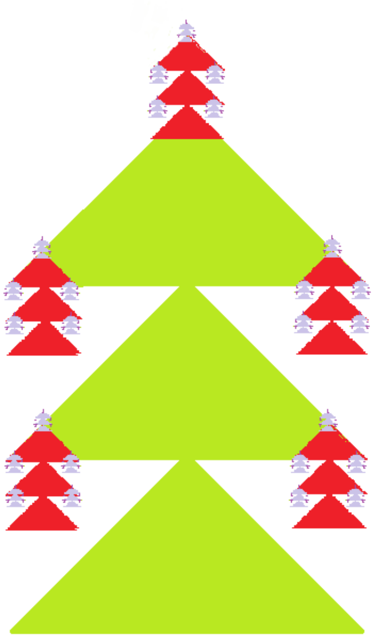
6. Moje fraktale

Zafascynowana pięknem i prostotą figur fraktalnych zaczęłam wymyślać własne twory.

Na przykład okrąg z odgałęzieniami nazwany przeze mnie fraktalem serwetkowym.
Polega on na utworzeniu okręgu z dwoma prostopadłymi do siebie odcinkami, które przechodzą przez jego środek. Następnie na końcu każdego odcinka wychodzącego poza okrąg rysujemy dwa razy mniejsze okręgi, w środku których łączą się dwa razy krótsze odcinki, i tak „w kółko”.



Inny przykład fraktalu stworzyłyśmy razem z moją czteroletnią siostrą, na podstawie jej genialnych życzeń choinkowych.



7. Podsumowanie

Dzięki tej pracy nauczyłam się, że fraktale to nie tylko pojęcie matematyczne. Nie są to też tylko rysunki. Fraktale to coś więcej, coś czego nie da się tak po prostu opisać czy wyjaśnić. To dzięki nim nasze nowoczesne techniki szybciej się rozwijają, dzięki nim możemy leczyć niektóre nowotwory. Dzięki nim potrafimy obliczyć powierzchnię komórki w medycynie. Bez nich opisanie postrzępionych linii brzegowych byłoby niemożliwe, gdyby nie one nie poznalibyśmy świata tak dokładnie. Właśnie dlatego fraktale są takie ważne. Ale to nie wszystko, jest jeszcze jedna bardzo ważna rzecz, o której w geometrii fraktalnej nie można zapomnieć:

Najważniejszą cechą fraktali jest dobra zabawa.

Tę właśnie wiedzę dał mi ten projekt. Poprzez zabawę dowiedziałam się tylu rzeczy, zaprzyjaźniłam się z fraktalami, wiem ile im zawdzięczam i jak wiele mam z nimi wspólnego. Fraktale są interdyscyplinarnym zjawiskiem występującym w moich ulubionych dziedzinach życia: matematyce, sztuce oraz medycynie i wspaniale je ze sobą łączą. I choć w mojej pracy pokazałam tylko nieliczne przykłady fraktali, to mam nadzieję, że i tak wielu osobom przybliżyłam to pojęcie. Dzięki pracy nad fraktalami zrozumiałam budowę pajęczyn i niepowtarzalnego płatka śniegu, linię brzegową Norwegii, a także fraktalny bałagan w moim pokoju robiony przez moją kochana młodszą siostrę ... choć nie wiem, czy jakikolwiek matematyk potrafiłby go opisać.

Ale odkryłam też coś jeszcze ... Odkryłam tajemnicę rysunku mojej siostry...
Narysowała ona na kartce świątecznej choinkę, a następnie dorysowała na niej ozdoby w kształcie mniejszych choinek. Lecz na ozdobach choinkowych tez wisiały choinki. Wyjaśniła mi, że „Każde drzewko musi być ozdobione."
Z tego wynika, że nawet czterolatki nieznające podstaw matematyki, mogą stworzyć swój fraktal. Równocześnie, jestem niemal pewna, że gdybym poprosiła kogoś dorosłego o stworzenie swojego fraktala, powiedziałby, że nie potrafi. **Matematyka jest odpowiednia dla osób w każdym wieku, ale najważniejsza jest chęć jej poznania przez twórcze myślenie i dobrą zabawę.**

Kraków 2012

Literatura:

[1] Joanna Barwicka *„Gramatyka formy"*. Kwartalnik „Green" nr 2 2010/11 Kraków s.42-44

[2] Wikipedia

[3] Witryna internetowa programu The Interactive Geometry Software Cinderella http://cinderella.de/tiki-index.php

[4] P. Pierański. *„Fraktale. Od geometrii do sztuki"*. Ośrodek Wydawnictw Naukowych, Poznań 1992

[5] J. Kudrewicz *„Fraktale i chaos". WNT, Warszawa 1994*

[6] Andrzej Sendlewski „Fraktale w Cinderelli. Iteracje podobieństw". Miniatury Matematyczne zeszyt 28.Wydawnictwo Aksjomat. Toruń 2009

[7] Andrzej Sendlewski „Fraktale w Cinderelli. Iteracje przekształceń afinicznych i inwersyjnych". Miniatury Matematyczne zeszyt 29.Wydawnictwo Aksjomat. Toruń 2009

Kraków 2012