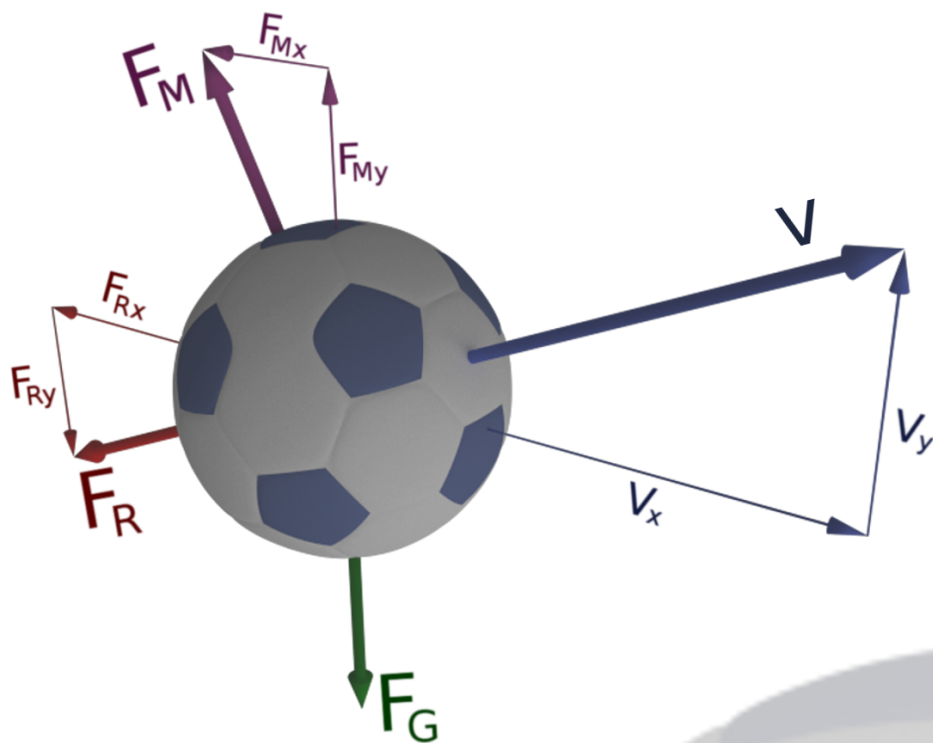


$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{N}\right)^3 \frac{[2N^3 + 3N^2 + N]}{6} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) + \left(\frac{x^3}{2N}\right) + \left(\frac{x^3}{6N^2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)x^3$$

$$v_y(t) = e^{-K_L t} * \int -g e^{K_L t} dt = v_{0y} e^{-K_L t} + \frac{g}{K_L} (e^{-K_L t} - 1)$$

Matematyka pod rękę z Fizyką czyli o rzucie piłką



$$s_y(t) = s_{0y} + \left(v_{0y} + \frac{g}{K_L}\right) \frac{1}{K_L} (1 - e^{-K_L t}) - \frac{g}{K_L} t$$

Klara Maria Zgliński

Gimnazjum nr 16
im. Króla Stefana Batorego
w Krakowie

Matematyka pod rękę z Fizyką

czyli o rzucie piłką

Klara Maria Zgliński

Gimnazjum nr 16
im. Króla Stefana Batorego w Krakowie
30-049 Kraków, ul. Konarskiego 2

Klasa Ib – profil matematyczno-fizyczno-informatyczny

Nauczyciele: mgr Anna Kuźma – matematyka
mgr Małgorzata Baster – fizyka

Okładka: Fryderyk Zgliński

Spis treści

Wstęp.....	3
Trochę fizyki.....	4
W poszukiwaniu funkcji.....	5
Podejście graficzne.....	5
Nachylenie	5
Pole pod krzywą.....	6
Podejście matematyczne.....	7
Nachylenie – pochodna.....	7
Pole pod krzywą – całka.....	8
Reguły liczenia	10
Całka określona.....	10
Kilka przykładów	11
Rzucamy piłką.....	12
Fizyka lecącej piłki.....	12
Siła grawitacji.....	13
Opór powietrza	13
Siła Magnusa.....	15
Matematyka lecącej piłki.....	16
Tylko grawitacja.....	16
Dodajemy opór laminarny.....	17
Piłka się kręci.....	18
A teraz turbulencje.....	18
Podsumowanie.....	19
Opinia nauczyciela.....	20

Bibliografia

- [1] B. Saganowska, Świat Fizyki – podręcznik dla Gimnazjum 1, Zamkor Kraków 2011
- [2] I.N. Bronszajn, Matematyka Poradnik Encyklopedyczny, PWN Warszawa 1999
- [3] F. Kneubuhl, Repetitorium der Physik, Stuttgart 1982
- [4] <http://www.opoka.org.pl/biblioteka/X/XS/gn200823-fizyka.html>
- [5] Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Ordinary_differential_equation
- [6] Siła Magnusa: <http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/beach.html>

Wstęp

W swojej pracy chcę przedstawić obliczenia z pozoru prostej rzeczy jaką jest rzut piłką. W trakcie pisania okazało się, że nawet taka prosta rzecz, może sprawić wiele trudności.

Potrzebne podstawy fizyki można znaleźć w podręczniku szkolnym. Jednak pokazana jest w nim tylko bardzo uproszczona wersja obliczeń.

Zacząłam więc od tego opisu – działu z fizyki, który zajmuje się ruchem ciał, czyli kinematyki – aby zrozumieć zależności potrzebne do matematycznego opisanie ruchu.

Na początku zajęłam się dobrze znanymi zależnościami pomiędzy czasem t , drogą s , prędkością v i przyspieszeniem a . Wiemy, że przy prostoliniowym ruchu ciała mamy następujące zależności:

$$(1) \quad \text{szybkość} \quad v = \frac{s}{t}$$

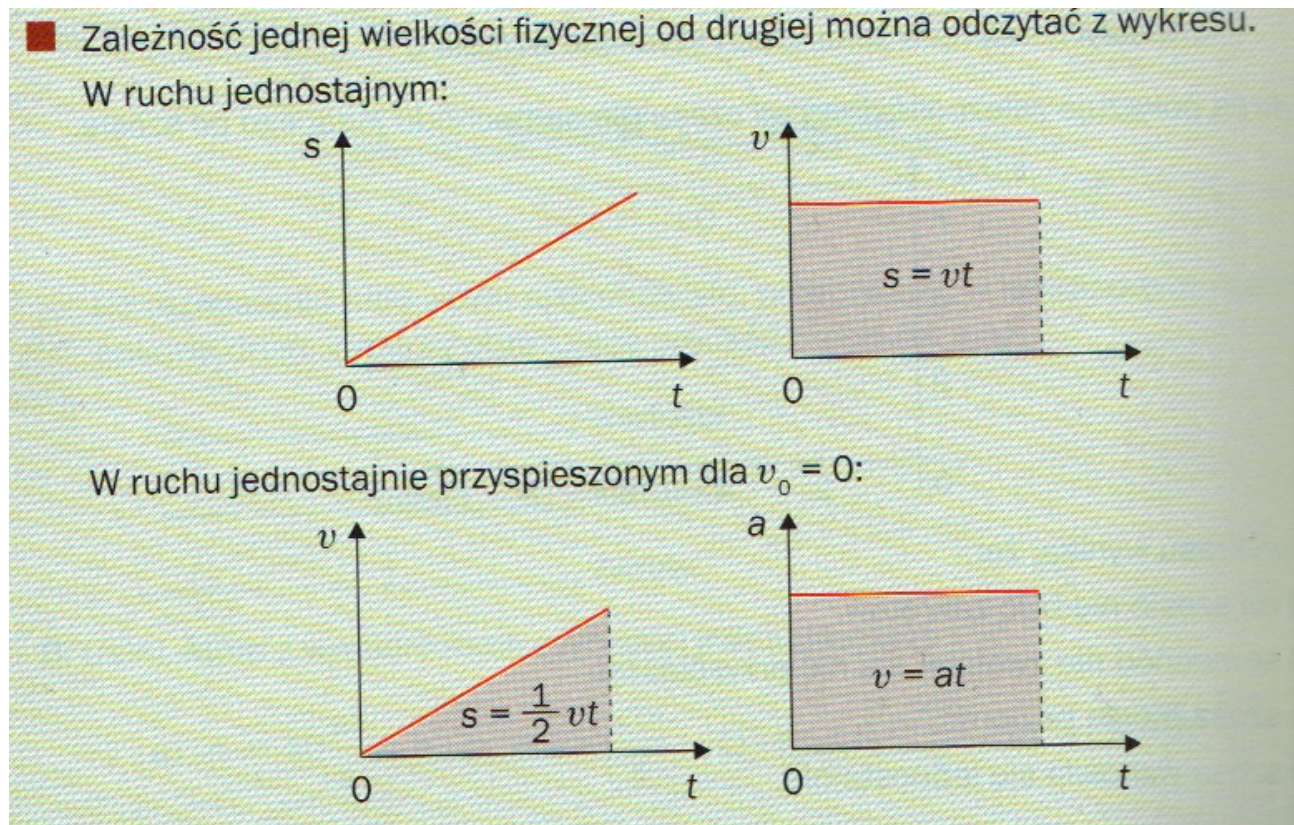
$$(2) \quad \text{przyspieszenie} \quad a = \frac{v}{t}$$

Te formułki można stosować przy ruchach jednostajnych lub najwyżej jednostajnie przyspieszonych. Wystarczy to, aby uwzględnić grawitację ziemską, lecz trzeba opuścić wszystkie inne wpływy na lecącą piłkę. Dokładnie na tym polega uproszczenie w podręczniku.

W tej pracy podejść do tego tematu od strony matematycznej i postaram się opisać ruch piłki najdokładniej jak to jest możliwe.

Trochę fizyki

Analizując przykłady w podręczniku fizyki, zwróciłam uwagę na przedstawienie zależności w formie wykresów.



Widać na nich następujące rzeczy:

1. na wykresie $s - t$ możemy odczytać prędkość v jako nachylenie prostej
2. na wykresie $v - t$ odczytujemy drogę s jako pole między prostą, a osią t
3. na wykresie $v - t$ widać przyspieszenie a jako nachylenie prostej
4. na wykresie $a - t$ pole pod prostą wyraża wartość prędkości v

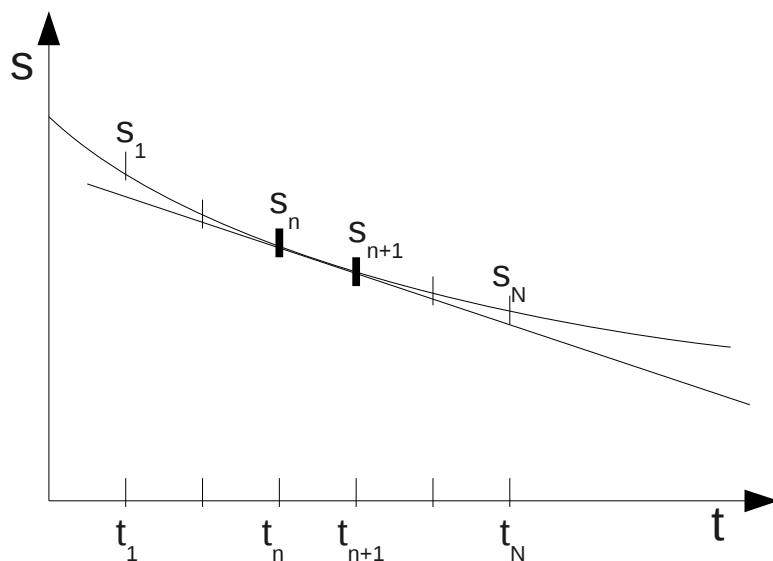
Nasuwa się przypuszczenie, że gdyby udało się znaleźć funkcje pozwalające obliczyć nachylenie oraz pole dla dowolnego wykresu, to pozwoliłyby one obliczyć potrzebne zależności również w przypadku dowolnego, niejednostajnego ruchu.

W poszukiwaniu funkcji

Podejście graficzne

Nachylenie

Jako pierwsze przedstawiłam pozycję s w zależności od czasu t na wykresie $s(t)$. Następnie podzieliłam czas na równe odstępy wielkości Δt . Otrzymuję w ten sposób na osi t , punkty $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$. Dla każdego z tych punktów można odczytać pozycję samochodu $s_n(t_n)$. Otrzymałam więc wartości $s_1, s_2, s_3, \dots, s_N$.



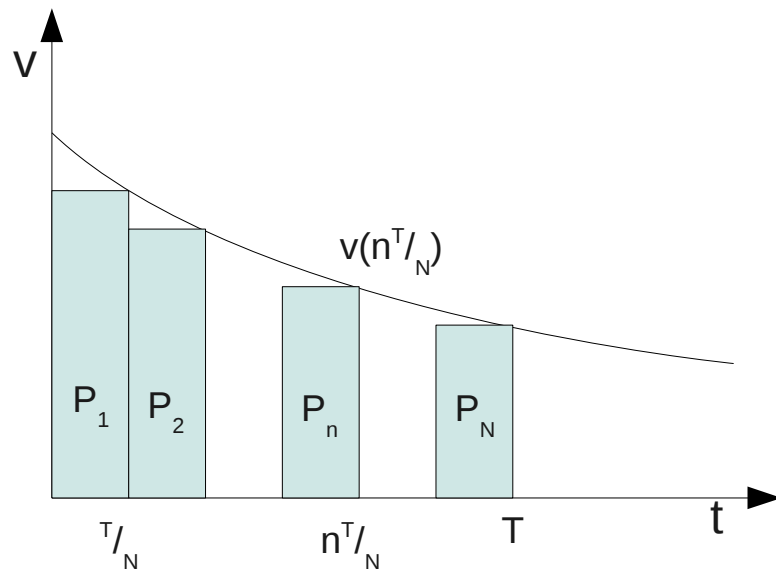
Teraz można dla każdej wartości t_n obliczyć chwilową prędkość v_n :

$$(3) \quad v_n = \frac{s_{n+1} - s_n}{\Delta t}$$

Obliczone wartości v_n przedstawiłam na nowym wykresie $v(t)$. Łatwo zauważyć, że rysunek będzie tym dokładniejszy im mniejsze jest Δt .

Pole pod krzywą.

W drugim przypadku rozpoczynam od wykresu prędkości $v(t)$ w czasie. Jak pamiętamy z wprowadzenia, przejechaną drogę można ustalić jako powierzchnię pod krzywą. Obliczenia pola pod krzywą zrobiłam podobnie do poprzednich. W każdym punkcie t_n narysowałam prostokąt szerokości Δt i wysokości v_n .



Teraz obliczam drogę dla każdej wartości s_n :

$$(4) \quad s_n = \sum_{i=1}^n (v_i * \Delta t)$$

Znak Σ (Sigma) oznacza sumowanie powierzchni wszystkich prostokątów od t_0 do t_n . Ponownie stwierdzam, że rezultat jest tym dokładniejszy, im mniejsze jest Δt .

Podejście matematyczne

Metoda graficzna jest łatwa do zrozumienia, ale trudna do użycia w praktyce. Można ją stosować, gdy posiadamy wartości pomiarowe zapamiętane w komputerze.

Do zwykłych obliczeń potrzebne są funkcje matematyczne.

- Obliczanie funkcji nachylenia krzywej w każdym punkcie, nazywamy **różniczkowaniem**, a rezultat **pochodną** funkcji.
- Obliczanie funkcji pola pod krzywą, nazywamy **całkowaniem**, a rezultat **całką**.

Nachylenie – pochodna

W trakcie pracy będę używała następujący zapis:

$$(5) \quad y' = f'(x) \text{ jest pochodną funkcji } y = f(x)$$

Do dalszej pracy potrzebne są mi pochodne funkcji $y = x^n$.

Wykorzystując formułkę (3) i zamieniając Δt na l , otrzymałam następującą formułkę:

$$(6) \quad y'(x) = \frac{(x+l)^n - x^n}{l}$$

Używając wzory skróconego mnożenia, rozwiązałam powyższe działanie dla kilku wartości n :

$$(7) \quad n = 1: \quad y'(x) = 1$$

$$(8) \quad n = 2: \quad y'(x) = 2x + l$$

$$(9) \quad n = 3: \quad y'(x) = 3x^2 + 3xl + l^2$$

Używając trójkąt Pascala stwierdziłam, że pierwszy człon każdej linijki ma iloczyn równy n . Dlatego można zapisać:

$$(10) \quad n: \quad y'(x) = nx^{n-1} + al + \dots + l^n$$

Jak wspomniałam poprzednio, dla dokładnego obliczenia l powinno być jak najmniejsze. Osiągnęłam to stosując funkcję $\lim_{l \rightarrow 0} y'(x)$. W rezultacie wszystkie wielokrotności l , stają się nieskończenie małe i można je opuścić.

Otrzymałam rezultat:

$$(11) \text{ pochodną funkcji } y(x) = x^n \text{ jest } y'(x) = nx^{n-1}$$

Ta formułka jest określona dla wszystkich n , również ujemnych i ułamków. Dlatego zawiera w sobie również wszystkie pierwiastki z x .

Dodatkowo podaję jeszcze dwie pochodne:

$$(12) \text{ pochodną funkcji } y(x) = \ln|x| \text{ jest } y'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(13) \text{ pochodną funkcji } y(x) = e^{ax} \text{ jest } y'(x) = a * e^{ax}$$

Warto zwrócić uwagę na występującą tu liczbę e . Jest to **stała Eulera** i ma wartość 2,718281828459. W powyższych formułkach występuje jako baza logarytmu naturalnego ($\ln$) oraz w funkcji wykładniczej e^{ax} .

Pole pod krzywą – całka

W trakcie pracy będę używała następujący zapis:

$$(14) \quad Y(x) = \int f(x) dx \text{ jest całką funkcji } y(x) = f(x)$$

Również tutaj, do dalszej pracy potrzebne są mi całki funkcji $y = x^n$.

Rozpoczynając od przedstawienia graficznego z poprzedniego rozdziału, dzielimy przedział osi na części, każda wielkości $\frac{x}{N}$. Prostokąt n ma więc pole:

$$(15) \quad P_n = f\left(n \frac{x}{N}\right) * \left(\frac{x}{N}\right)$$

Z tego wynika, że wartość pola w miejscu x wynosi:

$$(16) \quad F(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left[f\left(n \frac{x}{N}\right) * \left(\frac{x}{N}\right) \right] = \int f(x) dx$$

Funkcja limes jest użyta, by znaleźć wartość dla nieskończenie dużej liczby nieskończenie wąskich prostokątów.

Dla funkcji $y(x) = x^n$ liczymy więc:

$$(17) \quad Y(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left[\left(i \frac{x}{N}\right)^n * \left(\frac{x}{N}\right) \right]$$

Dla różnych **n**:

$$(18) \quad n = 1$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^N i = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{N}\right)^2 \frac{(N^2 + N)}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} x^2 + \frac{x}{2N} = \frac{1}{2} x^2$$

$$(19) \quad n = 2$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{N}\right)^3 \sum_{i=1}^N i^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{N}\right)^3 \frac{[N(N+1)(2N+1)]}{6} =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{N}\right)^3 \frac{[2N^3 + 3N^2 + N]}{6} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} x^3\right) + \left(\frac{x^3}{2N}\right) + \left(\frac{x^3}{6N^2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) x^3$$

W tym miejscu stwierdziłam, że formułą dla całki jest:

$$(20) \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Zamiast dowodu matematycznego zajrzałam do encyklopedii, aby upewnić swoje przypuszczenie, które okazało się prawidłowe.

Stała **C** jest używana do ustalenia tzw. **wartości brzegowych**. W naszym przypadku będzie potrzebna do ustalania stanu początkowego. Można ją dodać, ponieważ przy odwrotnej operacji – czyli różniczkowaniu – stałe zamieniają się z powrotem na zero.

Jak widać powyższa formuła, nie ma rozwiązania dla wartości **n = -1**. Podam więc dodatkowo dwie definicje z encyklopedii matematycznej, które są potrzebne w tej pracy:

$$(21) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$(22) \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} * e^{ax} + C$$

Reguły liczenia

Żeby móc te formułki rzeczywiście użyć, potrzebnych jest kilka podstawowych reguł liczenia:

$$(23) \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

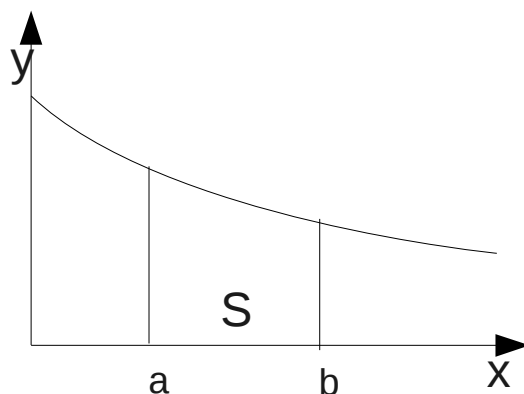
$$(24) \quad (c * f(x))' = c * f'(x)$$

$$\int (c * f(x)) dx = c * \int f(x) dx$$

Już te najprostsze reguły, pozwalają obliczyć całki i pochodne dowolnego wielomianu. Dla mojej pracy jest to zupełnie wystarczające. Dlatego nie wprowadzam tutaj pozostałych reguł.

Całka określona

Całkę, którą przedstawiłam, nazywamy nieokreśloną. Ale istnieje jeszcze jeden rodzaj całki, a mianowicie całka określona. Polega ona na tym, że wyznaczamy sobie dwa dowolne punkty na osi x i sumujemy całe pole pod krzywą, pomiędzy nimi.



Chcemy obliczyć zaznaczoną powierzchnię S . Ponieważ funkcja $F(x)$ zgodnie z dotychczasowym opisem wyznacza pole pod krzywą od 0 do x , możemy policzyć:

$$(25) \quad S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

W mojej pracy, będę używała tylko całki nieokreślonej.

Kilka przykładów

Powyższe reguły pozwalają obliczyć całą wielką kategorię funkcji – wielomiany. Przedstawię kilka przykładów obliczeń różniczkowania i całkowania.

Przykład 1:

$$(3x^3 + 2x + 4 + 5\ln x)' = 9x^2 + 2x^0 + 0 + \frac{5}{x} = 9x^2 + 2 + \frac{5}{x}$$

Obliczenie sprawdzam poprzez całkowanie:

$$\begin{aligned} \int (9x^2 + 2 + \frac{5}{x}) dx &= \int 9x^2 dx + \int 2 dx + \int \frac{5}{x} dx = \\ 9 \int x^2 dx + 2 \int x^0 dx + 5 \int \frac{1}{x} dx &= 9 \frac{1}{3} x^3 + 2 \frac{1}{1} x^1 + 5 \ln x = \\ 3x^3 + 2x + 5 \ln x + C \end{aligned}$$

Żeby wszystko się zgadzało, można łatwo obliczyć, że $C = 4$.

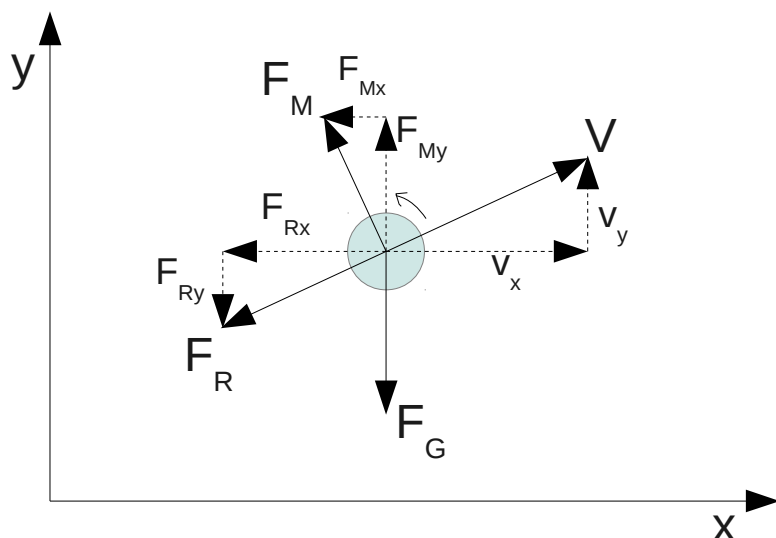
Przykład 2:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{4}{x^2} + 3e^{3x} + \frac{2}{x} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \frac{6x}{\sqrt{x}} \right) dx &= \\ \int \frac{4}{x^2} dx + \int 3e^{3x} dx + \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{4}{\sqrt[3]{x}} dx - \int 6\sqrt{x} dx &= \\ 4 \int x^{-2} dx + 3 \int e^{3x} dx + 2 \int \frac{1}{x} dx + 4 \int x^{-\frac{1}{3}} dx - 6 \int x^{\frac{1}{2}} dx &= \\ 4 * \frac{1}{-1} x^{-1} + 3 * \frac{1}{3} e^{3x} + 2 \ln|x| + 4 * \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} - 6 * \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} &= \\ -\frac{4}{x} + e^{3x} + 2 \ln|x| + 6\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt{x^3} \end{aligned}$$

Rzucamy piłką

Fizyka lecącej piłki

W moich przykładach, będę obliczać lot piłki od momentu wypuszczenia jej z ręki. W tym momencie ($t = 0$) znane są miejsce S_0 oraz początkowa prędkość V_0 .



O tej chwili lot piłki jest zdefiniowany tylko przez siły działające na piłkę:

- siła grawitacji F_G - jest stała i skierowana pionowo w dół.
- opór powietrza F_R - jest skierowana dokładnie przeciwnie do prędkości piłki i jest proporcjonalna do prędkości, lub jej kwadratu.
- siła Magnusa F_M - występuje przy podkręconych piłkach, poniżej krytycznej prędkości. Jest ona skierowana prostopadłe do kierunku lotu i proporcjonalna do prędkości piłki.

Jak wiemy podstawową zależnością siły i ruchu jest równanie:

$$(26) \quad F = m * a$$

Wynika z niej, że dzieląc dowolną siłę F przez masę ciała m , otrzymujemy przyspieszenie a .

Pokażę teraz jakie przyspieszenia nadaje każda z sił względem osi x i y .

Siła grawitacji

Siła grawitacji jest stała i skierowana pionowo w dół. Z jej równania:

$$(27) \quad F_G = m * g$$

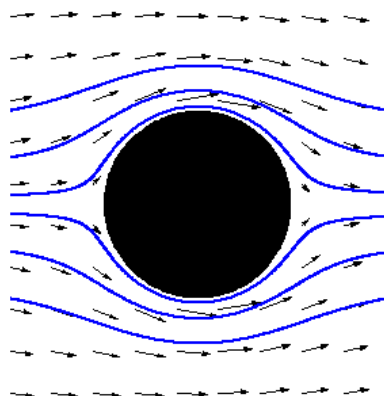
wynikają przyspieszenia względem osi x i y :

$$(28) \quad \begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{aligned}$$

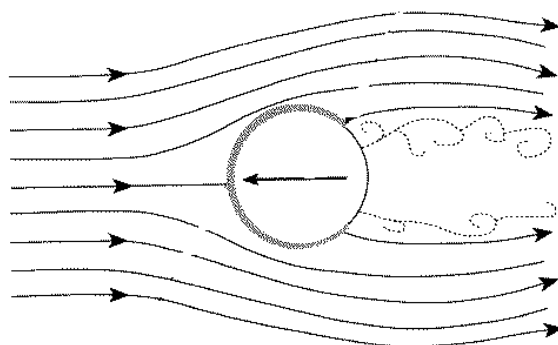
Opór powietrza

Siła oporu powietrza jest skierowana dokładnie przeciwnie do prędkości piłki. Ponieważ ruchy powietrza są bardzo skomplikowane, siła oporu powietrza, zależy od prędkości. W naszym przypadku, możemy rozróżnić dwie zależności:

- poniżej prędkości granicznej **opór** jest **laminarny** i proporcjonalny do prędkości



- powyżej prędkości granicznej **opór** jest **turbulentny** i proporcjonalny do kwadratu prędkości.



Otrzymujemy więc następujące zależności:

Dla oporu laminarnego

$$(29) \quad \begin{aligned} a_x &= -K_L * v_x \\ a_y &= -K_L * v_y \end{aligned}$$

przy czym K_L jest obliczone z wartości fizycznych według formuły:

$$(30) \quad K_L = \frac{6\pi\eta r}{m}$$

Znaczenie symboli jest podane poniżej. Dla moich obliczeń wystarczy jednak stwierdzenie, że wartość K_L jest stała.

Dla oporu turbulentnego:

$$(31) \quad \begin{aligned} a_x &= -K_T * v_x * v = -K_T * v_x * \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ a_y &= -K_T * v_y * v = -K_T * v_y * \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \end{aligned}$$

Mnożenie z v jest konieczne, ze względu na proporcjonalność do kwadratu prędkości. Pierwiastek jest niczym innym, jak obliczeniem v z v_x i v_y przy pomocy twierdzenia Pitagorasa.

K_T wynosi w tym przypadku:

$$(32) \quad K_T = \frac{\pi c_w \rho r^2}{m}$$

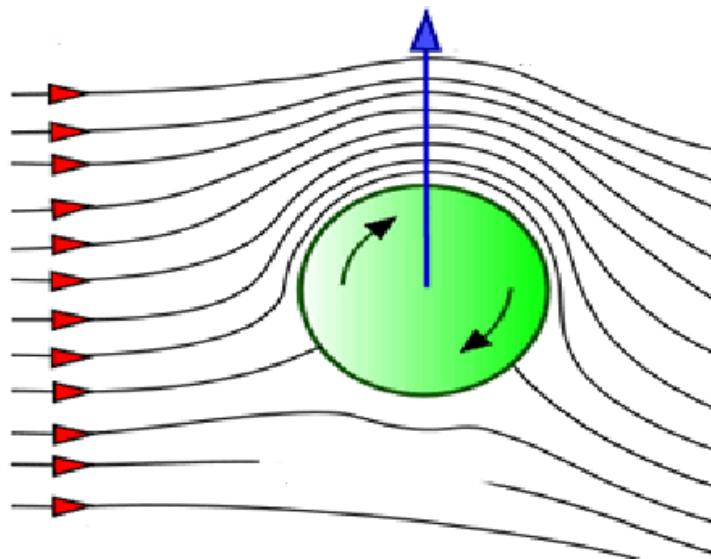
Również w tym przypadku stwierdzam, że K_T jest stałe.

Potrzebne wartości fizyczne wyjęte z tabeli fizycznych:

r	-	promień piłki	[m]
m	-	masa piłki	[kg]
c_w	-	współczynnik oporu	= 0.46
ρ	-	gęstość powietrza	= 1.293 [kg m ⁻³]
η	-	lepkość powietrza	= 1.82 * 10 ⁻⁵ [N s m ⁻²]

Siła Magnusa

Siła Magnusa F_M - występuje przy podkręconych piłkach, poniżej krytycznej prędkości, czyli kiedy opór powietrza jest laminarny. Jest ona skierowana prostopadle do kierunku lotu i proporcjonalna do prędkości piłki. Dla uproszczenia zakładam, że obrót jest w tej samej płaszczyźnie co ruch piłki.



Otrzymujemy więc następujące zależności:

$$(33) \quad \begin{aligned} a_x &= -K_M * v_y \\ a_y &= K_M * v_x \end{aligned}$$

Należy zwrócić uwagę, że v_x i v_y występują odwrotnie niż w przypadku oporu laminarnego, jak i na brak minusa w formule dla a_y . Jest to konieczne, by wyrazić w prosty sposób siłę prostopadłą do prędkości.

K_M jest obliczone z wartości fizycznych według formuły:

$$(34) \quad K_M = \frac{16\pi^2 \rho r^3}{3m} * \nu$$

Wartość ν jest szybkością obrotów piłki na sekundę, znaczenie wszystkich pozostałych symboli jest takie samo jak poprzednio. I tu wystarczy dla moich obliczeń stwierdzenie, że wartość K_M jest stała.

Matematyka leżącej piłki

Policzę teraz lot piłki w różnych przypadkach.

Metoda ustawiania równań sprowadza się do wybrania z powyższego wyboru odpowiednich przyspieszeń i dodania ich do siebie.

Tylko grawitacja

Obliczanie, które można znaleźć w wszystkich podręcznikach, nie uwzględnia oporu powietrza na leżącą piłkę. Pozostaje więc sama siła grawitacji.

Równania przyspieszenia wyglądają więc w sposób następujący:

$$(35) \quad \begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{aligned}$$

przez całkowanie otrzymuję równania prędkości:

$$(36) \quad \begin{aligned} v_x &= \int a_x dt = v_{0x} \\ v_y &= \int a_y dt = v_{0y} - g t \end{aligned}$$

ponowne całkowanie opisuje trasę lotu piłki:

$$(37) \quad \begin{aligned} s_x &= \int v_x dt = s_{0x} + v_{0x} t \\ s_y &= \int v_y dt = s_{0y} + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Jak łatwo zauważyć, rezultat jest identyczny z tym podanym w podręcznikach.

Dodajemy opór laminarny

Uwzględnienie oporu laminarnego powietrza prowadzi do równań:

$$(38) \quad \begin{aligned} a_x &= -K_L * v_x \\ a_y &= -K_L * v_y - g \end{aligned}$$

O ile zapisanie równania jako sumy równań sił działających na piłkę jest proste, to rozwiązanie tych równań wygląda raczej trudno.

Zauważyłam, że przyspieszenie $\mathbf{a(t)}$ jest pochodną szybkości $\mathbf{v(t)}$, więc te równania można napisać w sposób następujący:

$$(39) \quad \begin{aligned} v_x'(t) + K_L * v_x(t) &= 0 \\ v_y'(t) + K_L * v_y(t) &= -g \end{aligned}$$

Są to równania różniczkowe. Na szczęście rozwiązania takich równań są znane, i można je znaleźć w encyklopedii matematycznej:

$$(40) \quad \begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} e^{-K_L * t} \\ v_y(t) &= e^{-K_L t} * \int -g e^{K_L t} dt = v_{0y} e^{-K_L t} + \frac{g}{K_L} (e^{-K_L t} - 1) \end{aligned}$$

Całkowanie tych równań prowadzi do równań trasy lotu:

$$(41) \quad \begin{aligned} s_x(t) &= s_{0x} + v_{0x} \frac{1}{K_L} (1 - e^{-K_L * t}) \\ s_y(t) &= s_{0y} + \left(v_{0y} + \frac{g}{K_L} \right) \frac{1}{K_L} (1 - e^{-K_L * t}) - \frac{g}{K_L} t \end{aligned}$$

Jak widać, nie bez powodu w podręcznikach do gimnazjum nie ma tego przykładu!

Piłka się kręci

Dodając do powyższego równania efekty obracającej się piłki – czyli siłę Magnusa – otrzymałam następujące równania:

$$(42) \quad \begin{aligned} a_x &= -K_L * v_x - K_M * v_y \\ a_y &= -K_L * v_y + K_M * v_x - g \end{aligned}$$

Te równania stanowią układ równań różniczkowych z dwoma niewiadomymi. Taki układ można rozwiązać, jednak takie rozwiązanie wykracza poza zakres tej pracy.

Pozostawiam więc ten ruch bez dalszych obliczeń.

A teraz turbulencje

Jak wynika z części fizycznej, powyżej pewnej szybkości krytycznej, opływ powietrza powyżej pewnej prędkości staje się turbulentny.

Uwzględniając siłę oporu oraz grawitację otrzymujemy równania:

$$(43) \quad \begin{aligned} a_x &= -K_T * v_x * \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ a_y &= -K_T * v_y * \sqrt{v_x^2 + v_y^2} - g \end{aligned}$$

Taki układ równań według mojej wiedzy nie ma klasycznych rozwiązań.

W praktyce takie obliczania robi się metodami numerycznymi – czyli przy pomocy komputera. Również ten przypadek pozostawiam bez dalszych obliczeń.

Podsumowanie

Swoje obliczenia matematyczno-fizyczne zaczęłam od podstaw w podręczniku. Następnie poznałam całki i różniczki, aż w końcu pokazałam jak obliczyć lot piłki przy pomocy równań różniczkowych. W niektórych przypadkach, kiedy miałam samą grawitację i opór powietrza laminarny, udało mi się obliczyć równanie do końca. Jednak kiedy dochodził opór powietrza turbulencyjny i siła Magnusa, sprawa zaczęła się komplikować i moja wiedza już nie wystarczyła. Jedyne co mogłam zrobić w takich przypadkach to ustawić równanie różniczkowe, lecz żeby je obliczyć do końca, musiałabym użyć komputera.

Moim celem było obliczenie lotu piłki i mam nadzieję, że mi się to udało.

Opinia nauczyciela

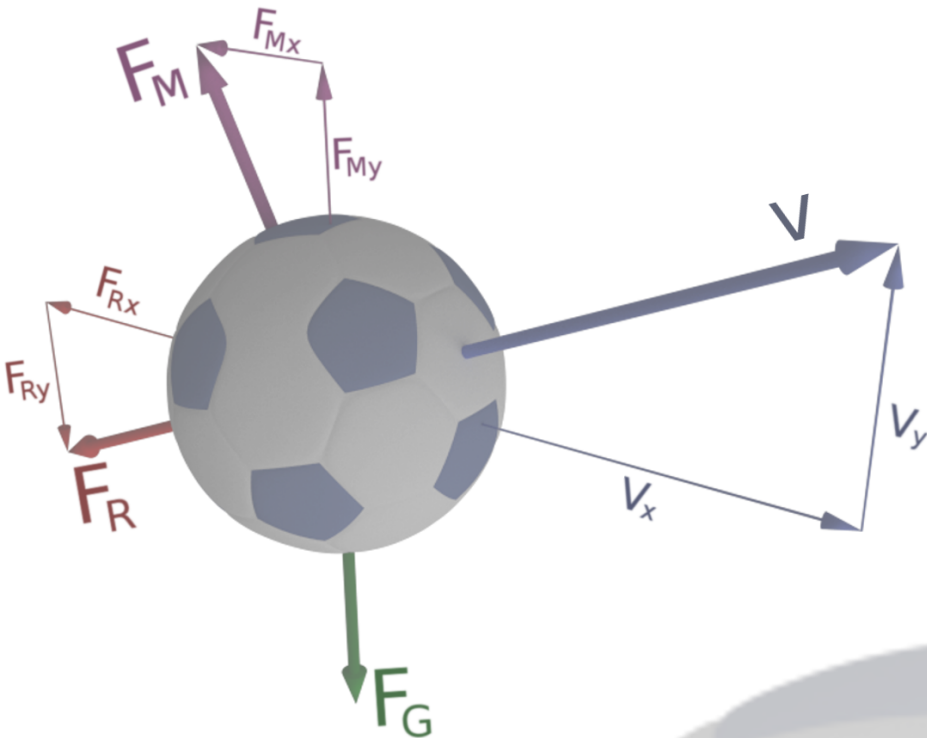
Praca wskazuje na szerokie, interdyscyplinarne zainteresowania Klary oraz dążenie do poznania zagadnień znacznie wykraczających poza program nauczania w gimnazjum. Próba opisanie zjawisk fizycznych, nowo poznanych dzięki samodzielnej własnej pracy narzędziami matematycznymi, zasługuje na uznanie i świadczy o dużej ambicji. Uczennica wykazuje duże zdolności w dziedzinie łączenia różnych dziedzin wiedzy oraz samodzielnego rozwiązywania problemów przy pomocy dostępnych źródeł.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{N}\right)^3 \frac{[2N^3 + 3N^2 + N]}{6} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) + \left(\frac{x^3}{2N}\right) + \left(\frac{x^3}{6N^2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)x^3$$

$$v_y(t) = e^{-K_L t} * \int -g e^{K_L t} dt = v_{0y} e^{-K_L t} + \frac{g}{K_L} (e^{-K_L t} - 1)$$

$$v_x'(t) + K_L * v_x(t) = 0$$

$$v_y'(t) + K_L * v_y(t) = -g$$



$$s_y(t) = s_{0y} + \left(v_{0y} + \frac{g}{K_L}\right) \frac{1}{K_L} (1 - e^{-K_L * t}) - \frac{g}{K_L} t$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$