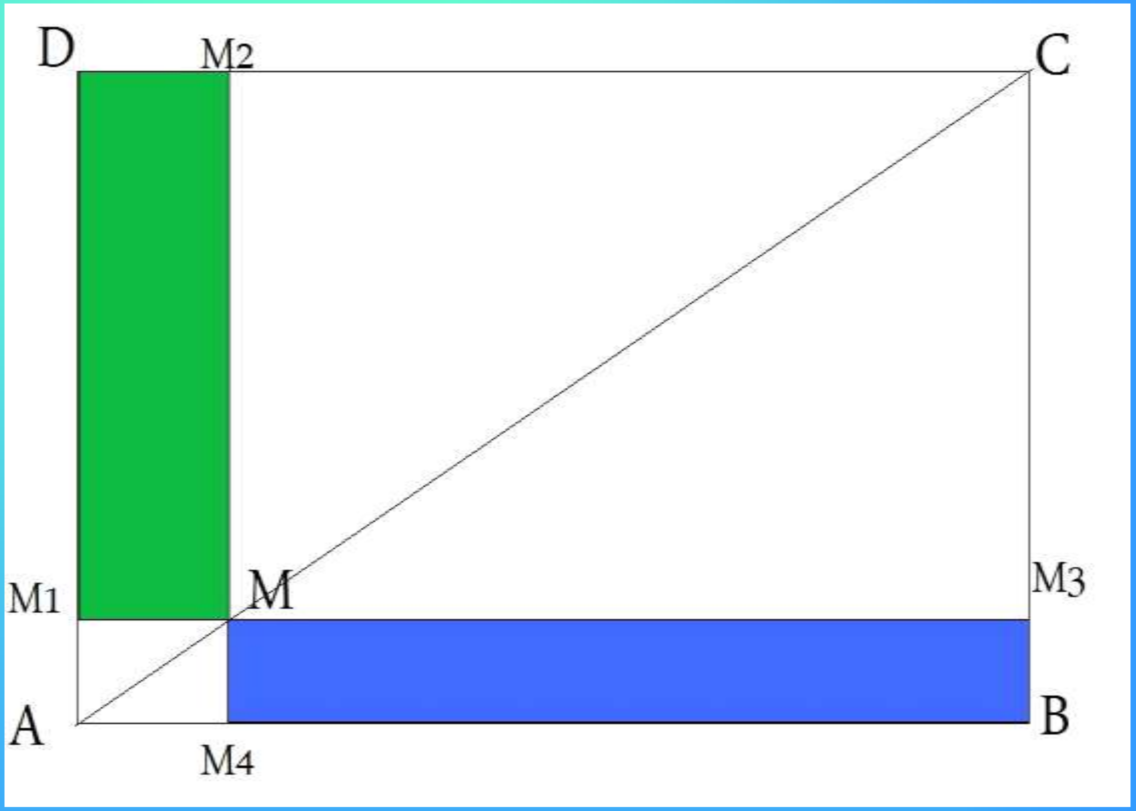
Ciekawe własności pól figur geometrycznych

W mojej pracy zajęłam się wykazywaniem faktów, że pola pewnych figur spełniają określone warunki. Większość z tych dowodów można było przeprowadzić metodami prawie „obrazkowymi” tzn. nie wymagały one żmudnych obliczeń. Część zadań zaczerpnęłam z „miniatur matematycznych…”, druga część jest moim własnym rozwinięciem danych problemów.

Zadanie 1

W prostokącie ABCD punkt M jest dowolnym punktem przekątnej AC. Uzasadnię, że pole prostokąta pokolorowanego na zielono jest równe niebieskiemu.



Widzimy, że na prawo od prostokąta MM_2DM1 inny prostokąt, MM_3CM_2, który dzieli przekątna MC na dwa trójkąty przystające. Ta przekątna jest częścią przekątnej AC. Druga część AC dzieli AM_4MM_1 na trójkąty przystające AM_4M i AMM_1. Zauważmy, że po różnych stronach AC są położone pokolorowane figury. Jedna w trójkącie ABC, druga w ADC. Biorąc pod uwagę fakt, że w obu trójkątach jest połowa prostokąta MM_3CM_2, i AM_4MM_1 z przekątną AM, jedynymi figurami zastają czworokąt niebieski i zielony. Czyli:

$P_{M_1MM_2D} = P_{ACD} - P_{MCM_2} - P_{AMM_1}$

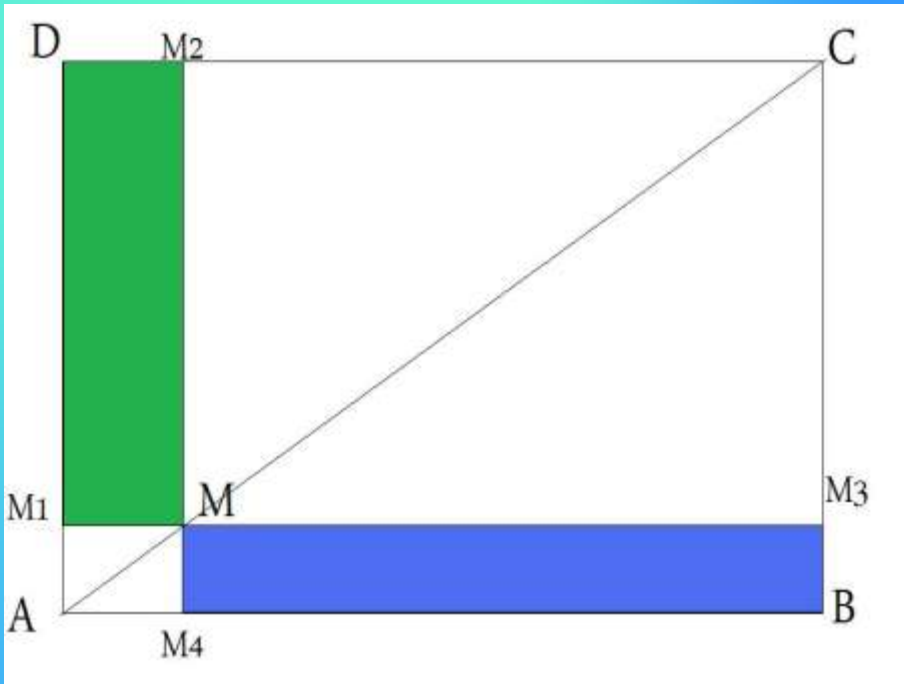
$P_{MM_4BM_3} = P_{ABC} - P_{AM_4M} - P_{MM_3C}$

A ponieważ:

$ACD = ABC$, $AMM_1 = AM_4M$ i $MCM_2 = MM_3C$

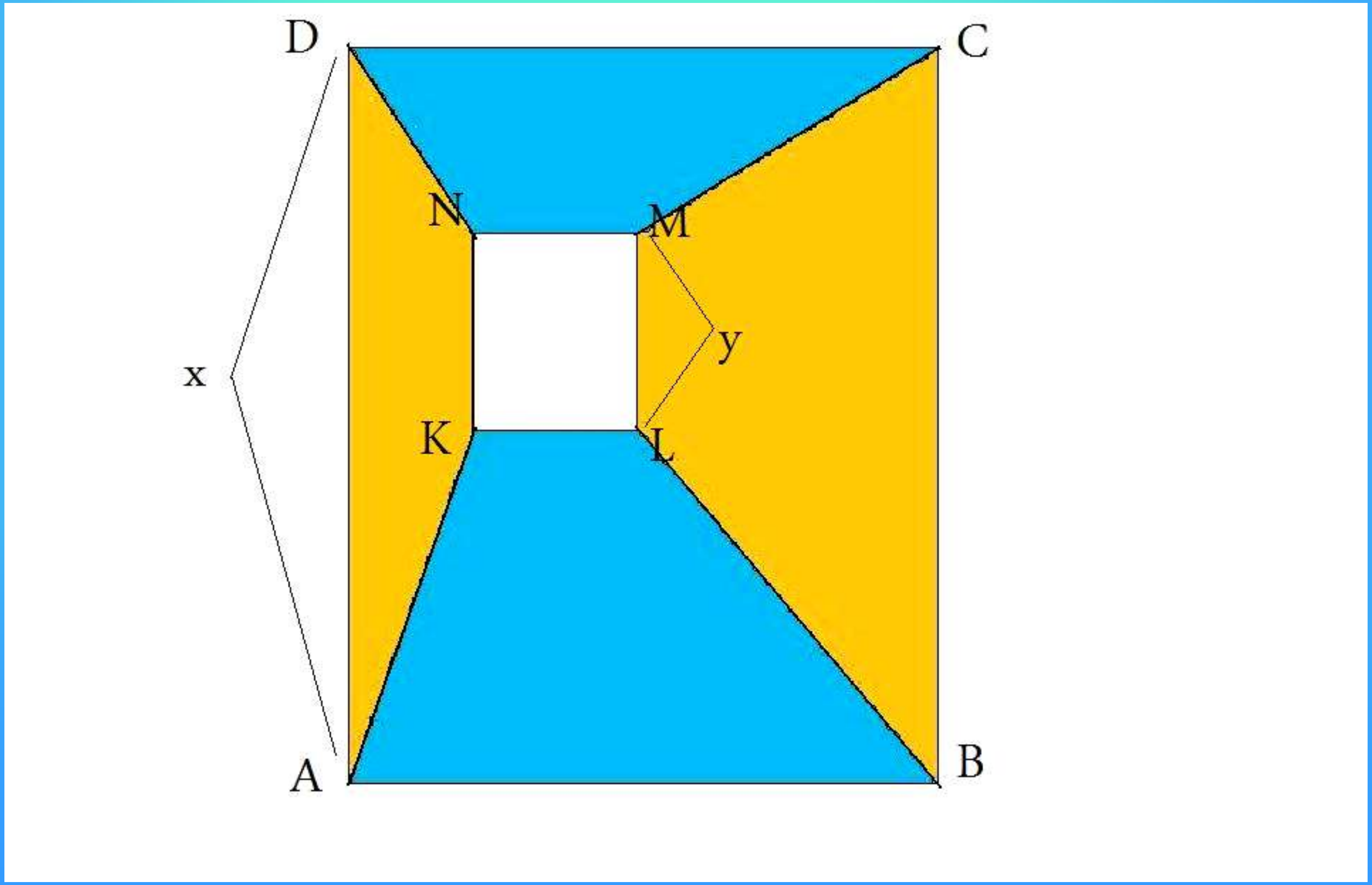
To $P_{M_1MM_2D} = P_{MM_4BM_3}$

Co należało dowieść.



Zadanie 2

Kwadrat KLMN ma boki równoległe do boków kwadratu ABCD. Udowodnię, że pole obszaru niebieskiego równa się polu pomarańczowego obszaru.



Każdy z trapezów ma pewne wspólne wielkości potrzebne do obliczenia pola. Podstawy- jedna wynosi x, a druga y. Suma wysokości trapezów AKND i BCML jest równa $h_1 + h_2 = x-y$.

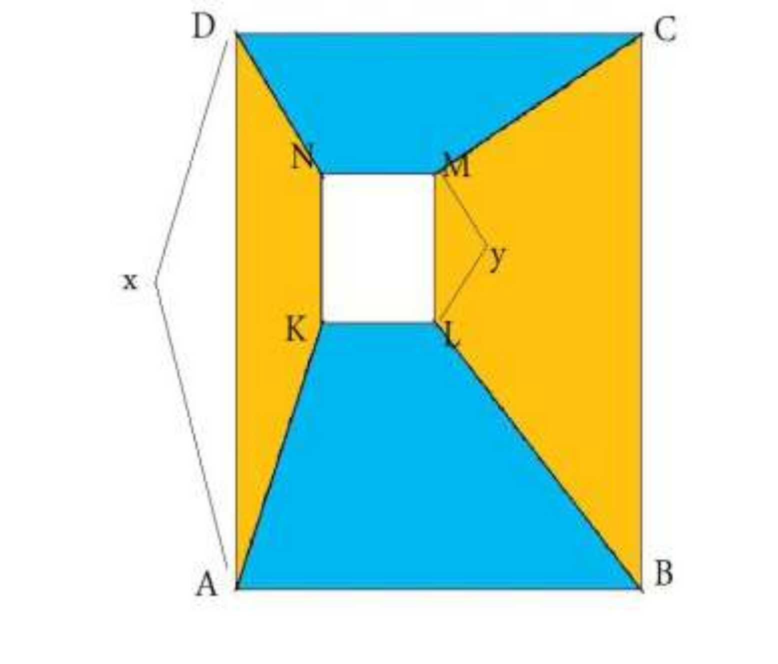
Analogicznie dla trapezów ABLK i NMKD wysokość to $h_1 + h_2 = x-y$.

$$\frac{(x+y)h_1}{2} + \frac{(x+y)h_2}{2} = \frac{(x+y)h_3}{2} + \frac{(x+y)h_4}{2}$$

$$\frac{(x+y)}{2}(h_1 + h_2) = \frac{(x+y)}{2}(h_3 + h_4)$$

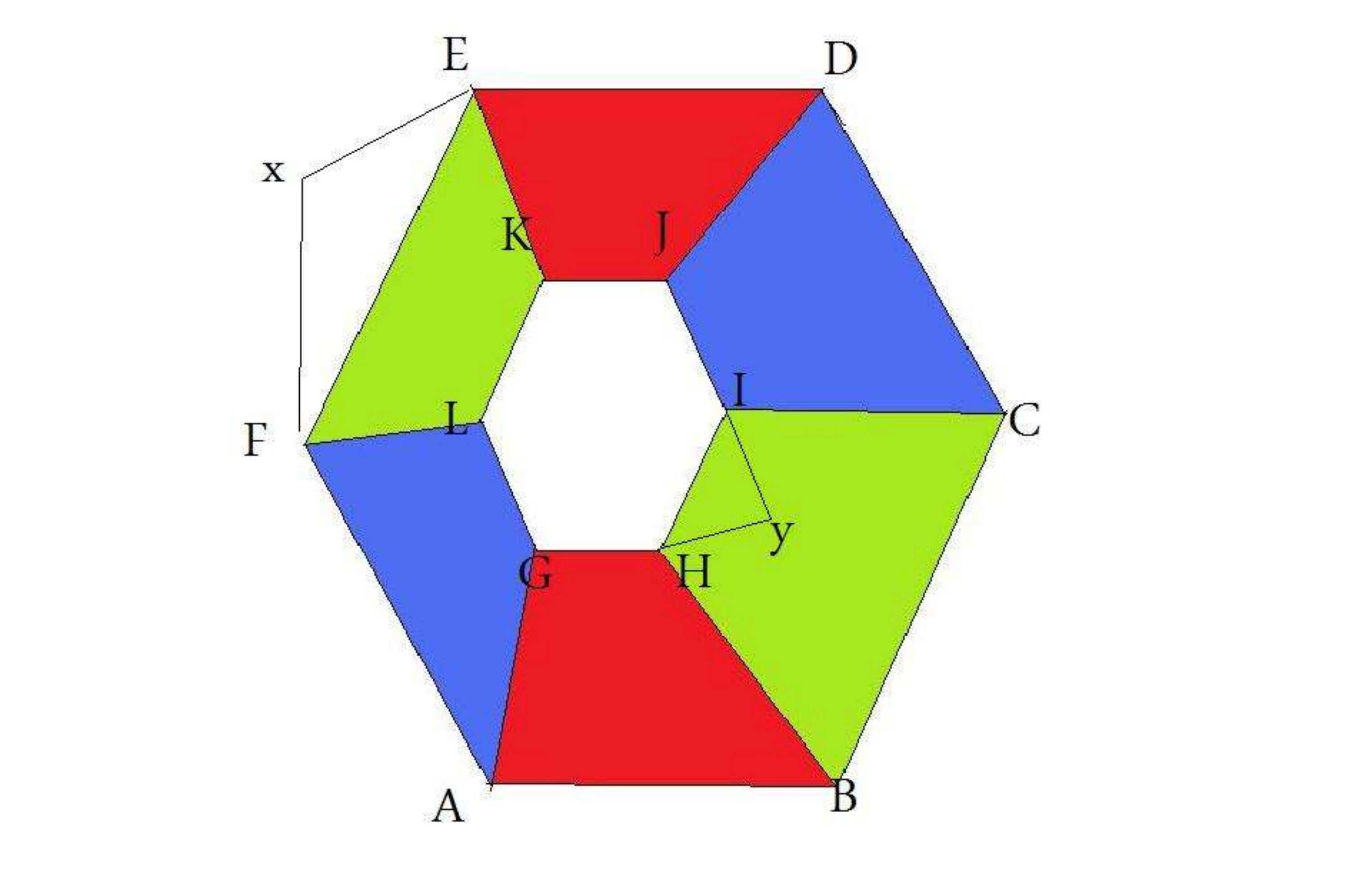
$$\frac{(x+y)}{2}(x-y) = \frac{(x+y)}{2}(x-y)$$

Tak więc wykazałam, że pole obszaru niebieskiego równa się pomarańczowemu.

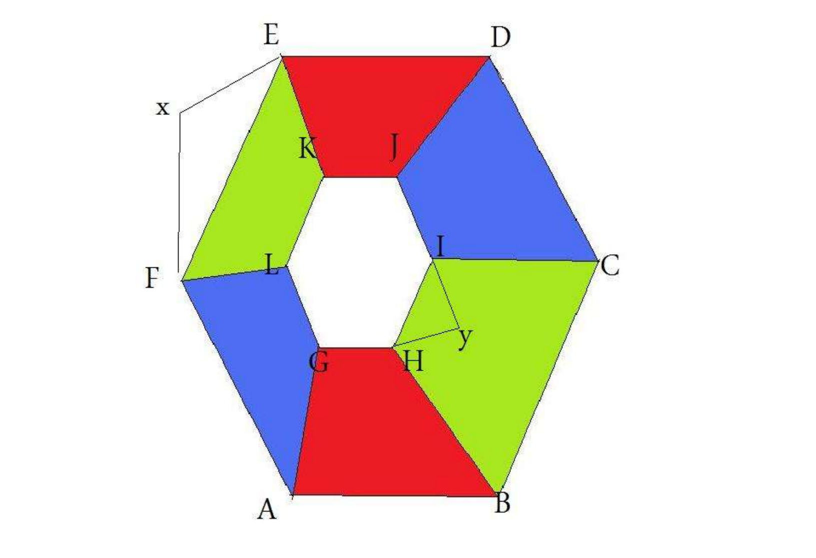


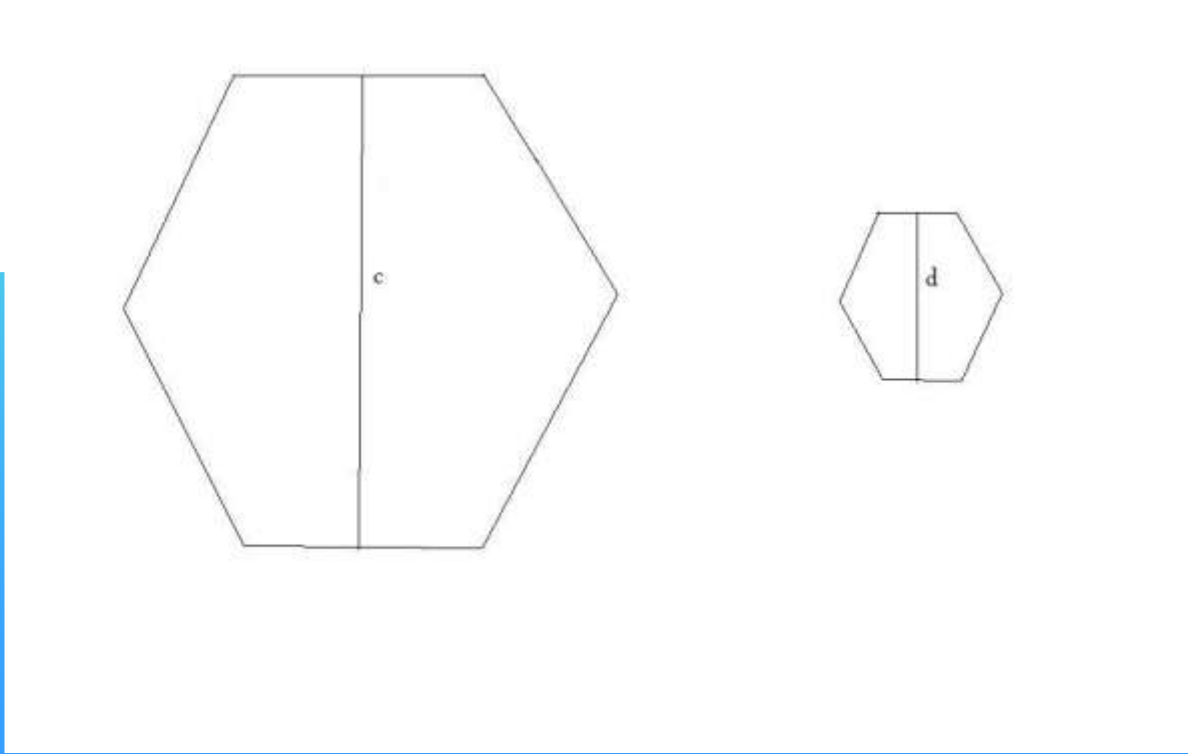
Zadanie 3

Analogicznie zadanie 2 można sformułować dla sześciokątów foremnych o bokach odpowiednio równoległych

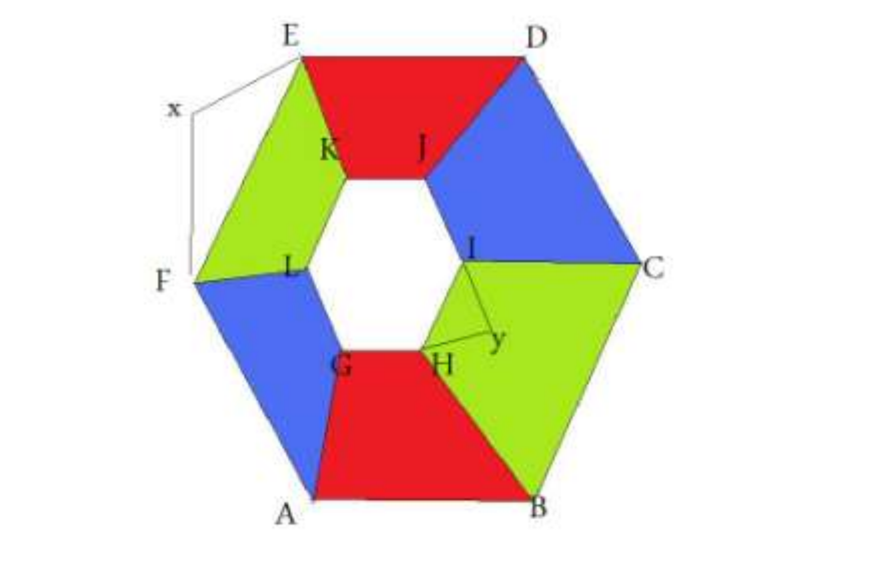


Oznaczmy odpowiednio przez „x” i przez „y” boki większego i mniejszego z sześciokątów foremnych, a przez „c” i „d” prostopadłe odcinki łączące przeciwległe boki w dużym i małym sześciokącie:





$P_{AGLF} + P_{CDJI} = \frac{1}{2}(x+y)h_6 + \frac{1}{2}(x+y)h_3 = \frac{1}{2}(x+y)(h_6+h_3)$ (*)



Ale

$h_6 + h_3 = c - d$

więc

(*)= $\frac{1}{2}(x+y)(c-d)$

Tak samo można pokazać, że

$P_{BCIH} + P_{EFLK} = \frac{1}{2}(x+y)(c-d)$

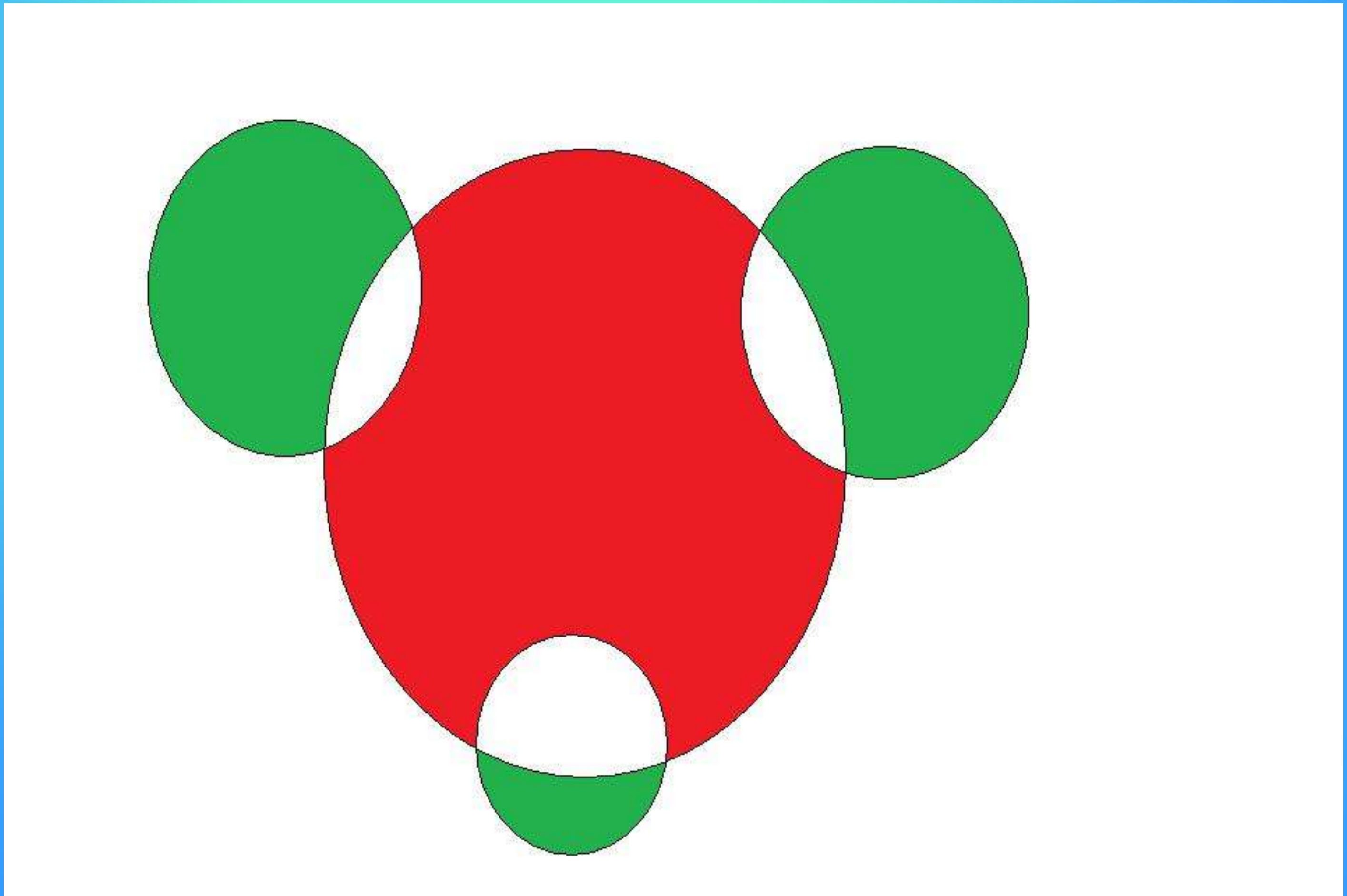
i

$P_{ABHG} + P_{DEKJ} = \frac{1}{2}(x+y)(c-d)$

Czyli pola wszystkich tych obszarów są równe.

Zadanie 4

Dane są cztery koła o średnicach 6,4,4,2. Udowodnię, że pole obszaru czerwonego równa się zielonemu



Pole koła o średnicy 6:

$$P = \pi r^2$$

$$P = \pi (6:2)^2$$

$$P = \pi 3^2$$

$$P = 9\pi$$

Pole koła o średnicy 4:

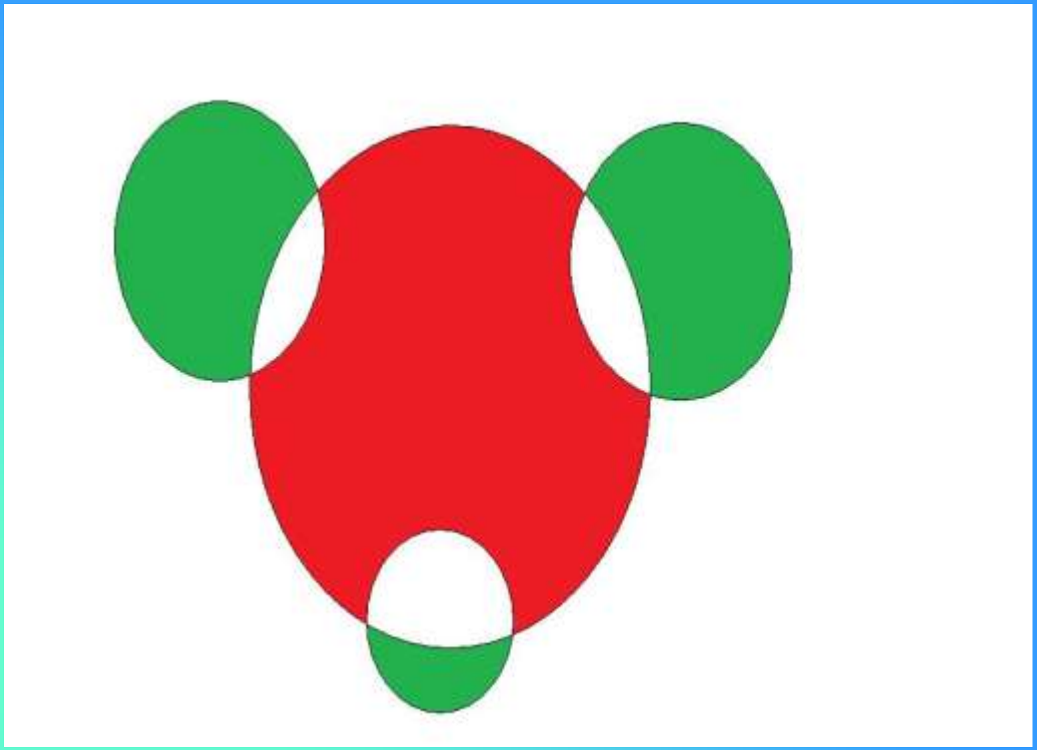
$$P = \pi 2^2$$

$$P = 4\pi$$

Pole koła o średnicy 2:

$$P = \pi 1^2$$

$$P = \pi$$



$$9\pi = 4\pi + 4\pi + \pi$$

Pole koła o średnicy 6 równa się sumie pól pozostałych kół, a że kiedy figura zaczyna zachodzić na inną figurę, pola obu tracą po tyle samo. Tak więc obszar zielony równa się czerwonemu.

Nie każde cztery koła o dowolnych średnicach mają taką własność. Jaki warunek zatem muszą spełniać ich średnice?

$P_1=P_2+P_3+P_4$ – dla kół

$$\pi(r_1)^2 = \pi(r_2)^2 + \pi(r_3)^2 + \pi(r_4)^2$$

$$(r_1)^2 = (r_2)^2 + (r_3)^2 + (r_4)^2$$

a ponieważ : $r_1 = \frac{d_1}{2}$

to: $(\frac{d_1}{2})^2 = (\frac{d_2}{2})^2 + (\frac{d_3}{2})^2 + (\frac{d_4}{2})^2$

$$\frac{(d_1)^2}{4} = \frac{(d_2)^2}{4} + \frac{(d_3)^2}{4} + \frac{(d_4)^2}{4} \qquad / :4$$

$$d_1{}^2 = d_2{}^2 + d_3{}^2 + d_4{}^2$$

Sprawdzę czy średnice w zad. 4 spełniają ten warunek:

$$6^2 = 4^2 + 4^2 + 2^2$$

$$36 = 16 + 16 + 4$$

$$36 = 36$$

Widać, że jeśli chcemy, aby liczby te były naturalne to mogą one mieć postać 3n, 2n, 2n, n gdzie n jest dowolną liczbą naturalną dodatnią, bo:

$$(3n)^2 = (2n)^2 + (2n)^2 + n^2$$

$$9n^2 = 4n^2 + 4n^2 + n^2 \qquad /n^2$$

$$9 = 4 + 4 + 1$$

$$9 = 9$$

Jeśli chodzi o trójki liczb naturalnych(czyli duże koło mające niepustą część wspólną z dwoma mniejszymi), to na pewno mogą nimi być boki trójkątów pitagorejskich, np:

3,4,5	5,12,13	8,15,17
6,8,10	10,24,26	16,30,34

Korzystając ze sposobu wyznaczenia trójek pitagorejskich:

$$a = n^2 - k^2$$

$$b = 2nk$$

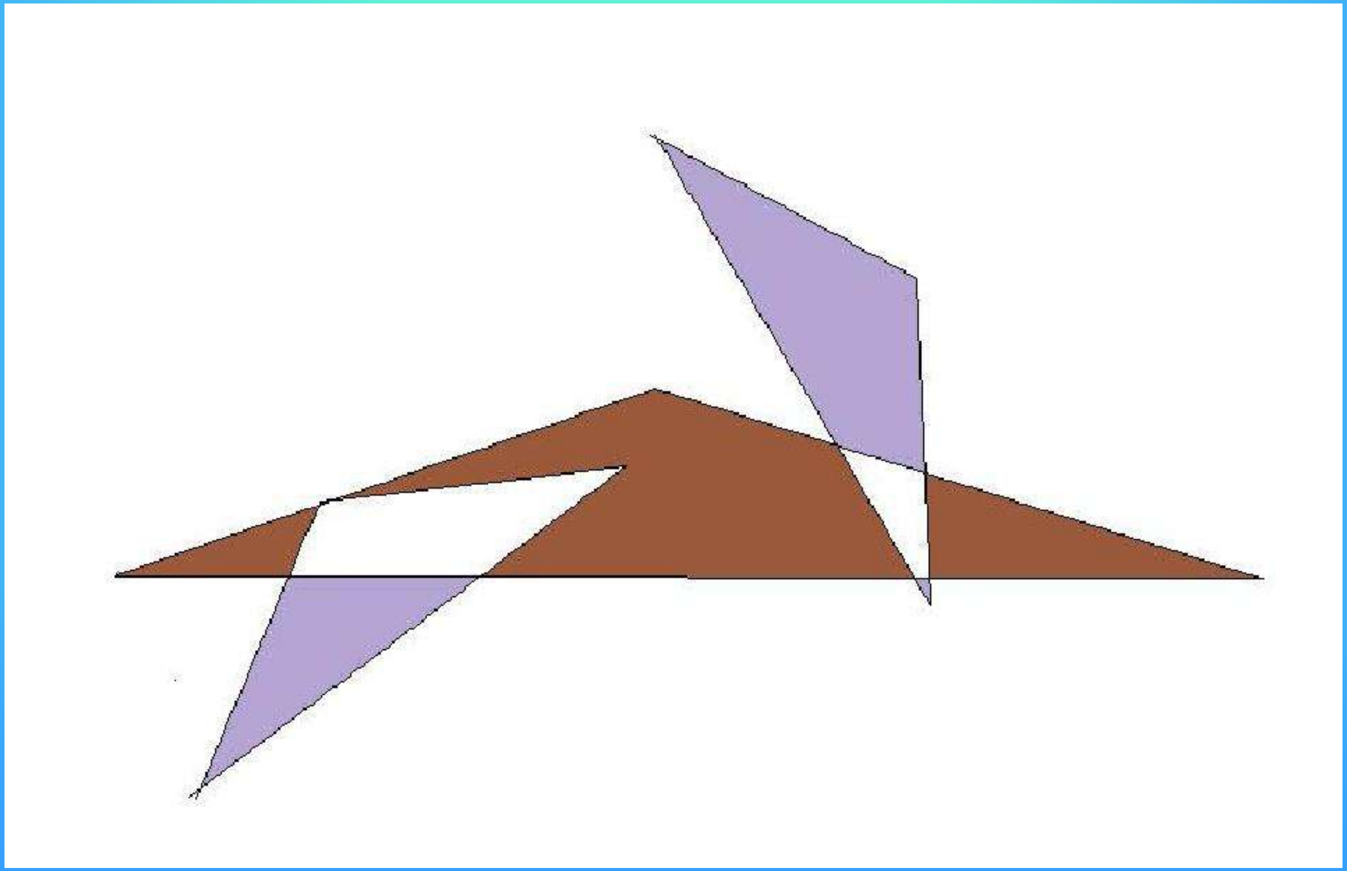
$$c = n^2 + k^2$$

Gdzie n i k są naturalne i n jest większe od k.

Tą metodą można znaleźć wszystkie serie tych trójek.

Zadanie 5

Wcześniej podane warunki mogą spełniać inne figury niż koło. Dane są trójkąty o podstawach 12, 6, 6. Udowodnię, że obszar różowy równa się brązowemu, biorąc pod uwagę, że wszystkie trójkąty mają wysokość 2.



$P = 12 \cdot 2 : 2$

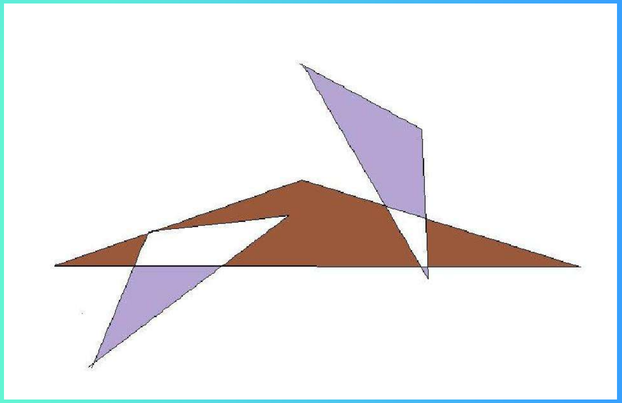
$P = 12$

$P = 6 \cdot 2 : 2$

$P = 6$

$$12 j^2 = 6 j^2 + 6 j^2$$

Pole dużego trójkąta równa się dwóm małym, a jeżeli jakaś figura zachodzi na inną, tracą po tyle samo. Stąd wiemy, że obszar różowy równa się brązowemu. Oczywiście te trójkąty nie muszą mieć jednakowych wysokości.



$$P_1 = P_2 + P_3$$

$$\frac{1}{2} a h_1 = \frac{1}{2} b h_2 + \frac{1}{2} c h_3 \qquad /*2$$

$$a h_1 = b h_2 + c h_3$$

Trzeba tak dobrać podstawy i wysokości aby był spełniony powyższy warunek dla boków trzech trójkątów a, b, c oraz h_1, h_2, h_3 odpowiednio padających na te boki. Np.

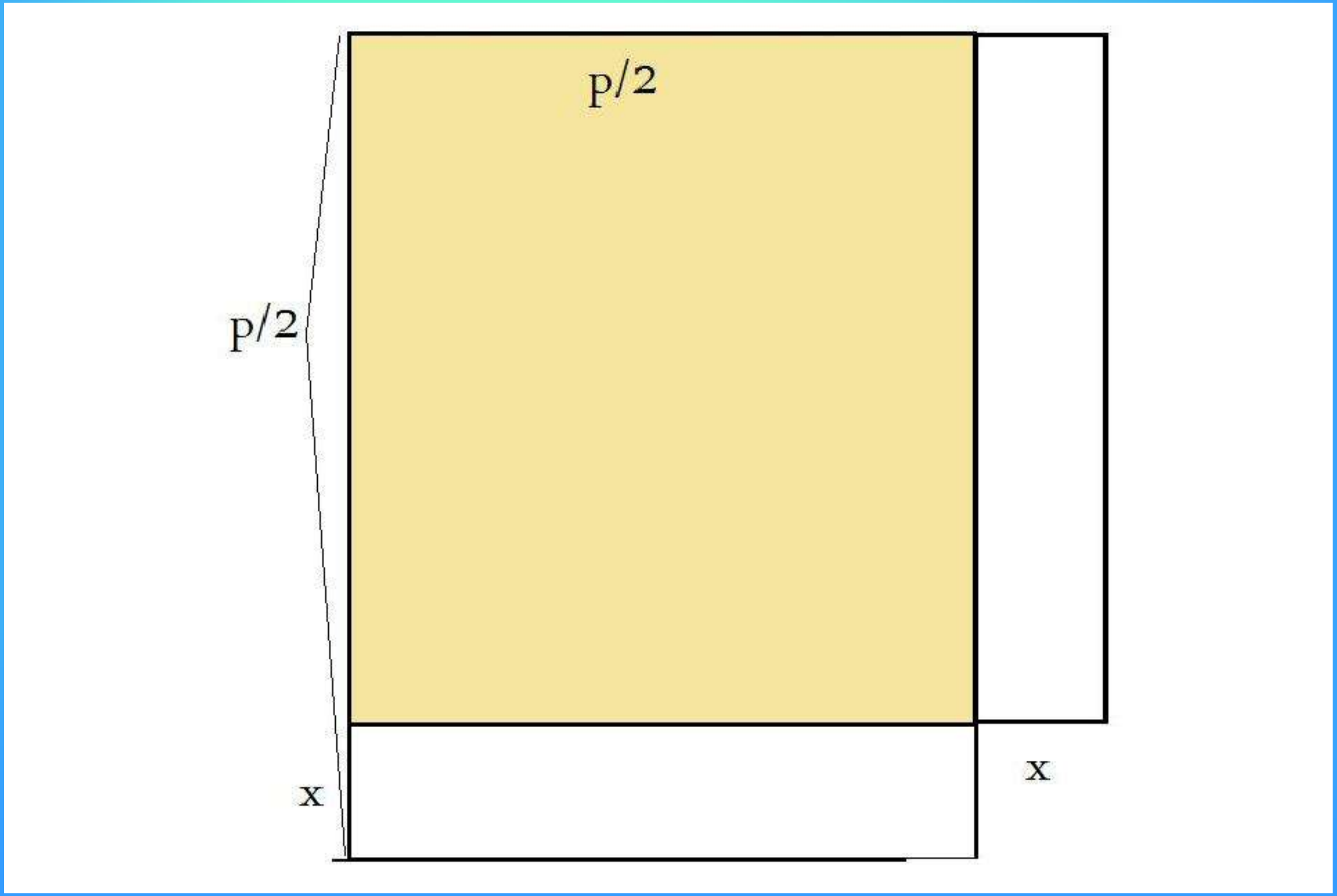
a=8 i $h_1=3$

b=7 i $h_2=2$

c=10 i $h_3=1$

Zadanie 6

Wykażę, że spośród wszystkich prostokątów o obwodzie 2p, największe pole ma kwadrat.



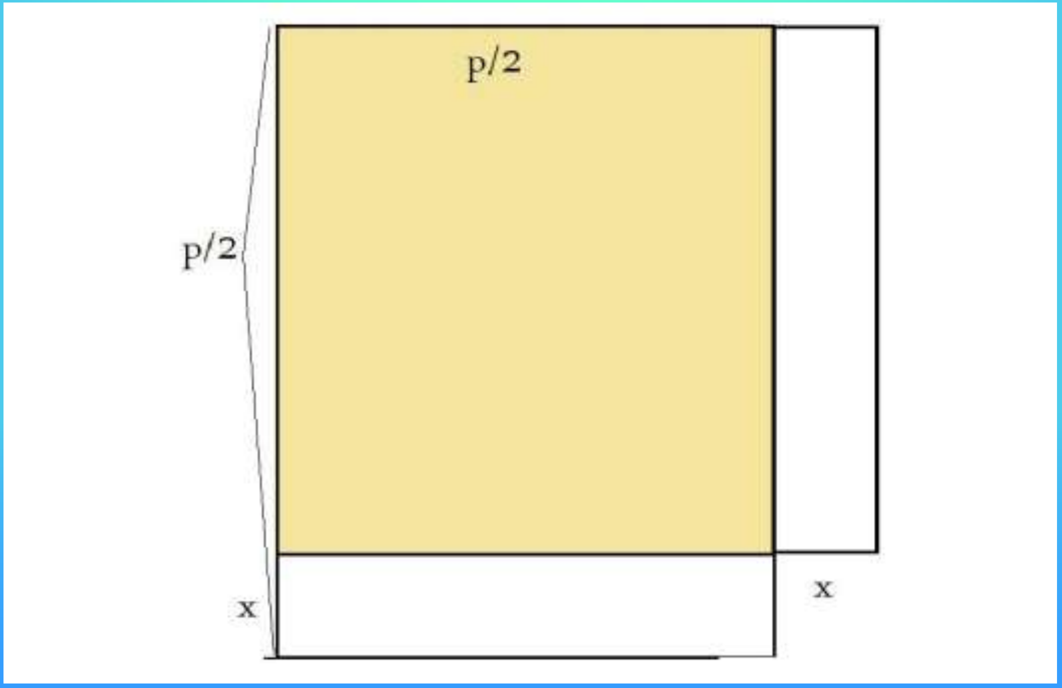
Pole kwadratu o obwodzie 2p:

$$\frac{p}{2}\cdot\frac{p}{2}=\frac{p}{4}=\frac{1}{4}p^{2}$$

Pole prostokąta o obwodzie 2p:

$$(\frac{p}{2}+x)(\frac{p}{2}-x)=\frac{1}{4}p^{2}+\frac{p}{2}x-\frac{p}{2}x-x^{2}=\frac{1}{4}p^{2}-x^{2}$$

Dla każdej wartości x większej od 0, pole kwadratu będzie większe od prostokąta.



Mam nadzieje, że moja praca wzbudziła wasze zainteresowanie dowodami przeprowadzonymi „na obrazkach” i zacheci Was do dalszych poszukiwań takich zadań i ich uogólnień.

Bibliografia

- „Miniatury matematyczne dla szkół gimnazjalnych dla szkół gimnazjalnych” zeszyt 16, wydawnictwo”Aksjomat” Toruń

- „Matematyka 2, podręcznik do gimnazjum”, praca zbiorowa pod redakcją M.Dobrowolskiej,

  Gdańskie wydawnictwo Oświatowe.