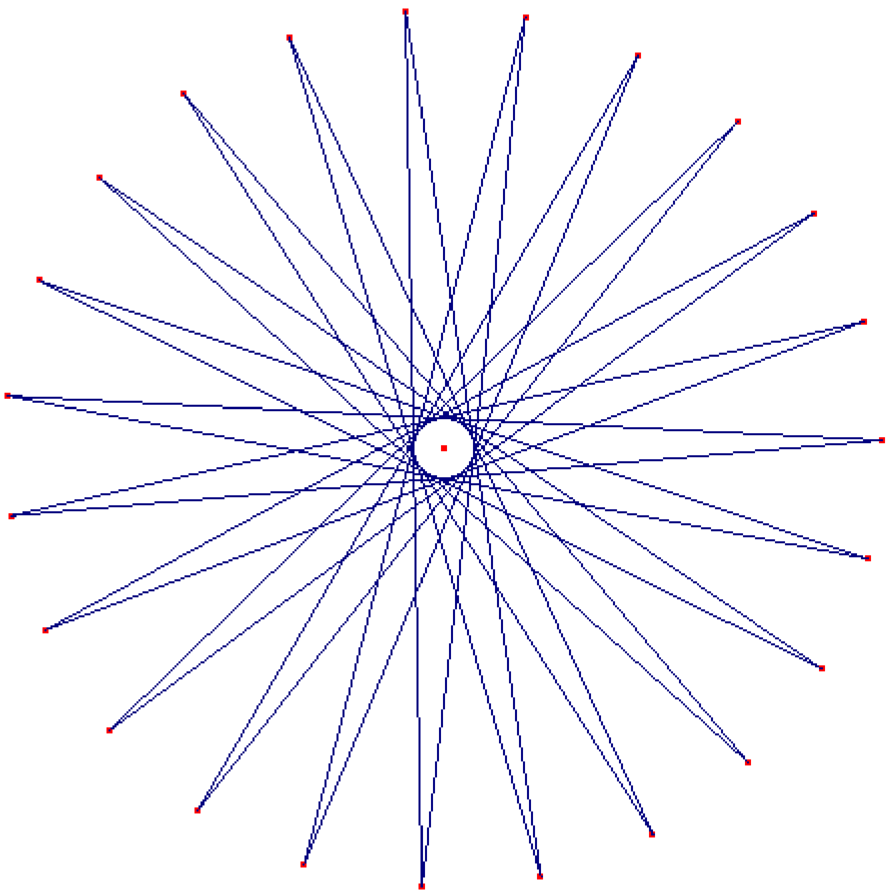
Gimnazjum nr. 16 im. Króla Stefana Batorego w Krakowie
ul. Konarskiego 2, 30-049 Kraków
tel. 12 633 13 83 lub 12 633 02 47

W ŚWIECIE WIELOKĄTÓW GWIAŹDZISTYCH

Arkadiusz Biel



Kraków 2011

Wielokąty gwiaździste są ciekawym przypadkiem wielokątów, gdyż posiadają różne kształty przy tej samej liczbie boków i kątów. Wielokąty gwiaździste, a zwłaszcza **wielokąty gwiaździste foremne** są szczególnymi przypadkami łamanych.
W rozważaniach na ich temat będę się odnosił do rodzajów i własności łamanych, dlatego na początek przytaczam niezbędne definicje.

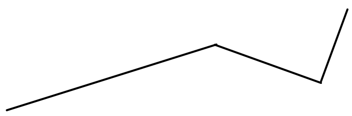
Definicja 1
Łamana to figura geometryczna utworzona ze skończonej liczby odcinków A_1A_2, A_2A_3, $A_3 A_{4,\ldots}$ A_{n-1} A_n takich, że:

- **żadne dwa następujące po sobie odcinki nie leżą na jednej prostej,**
- **koniec każdego odcinka (oprócz ostatniego) jest początkiem następnego odcinka.**

Odcinki, z których składa się łamana to jej boki, a końce boków to wierzchołki łamanej.
Jeżeli koniec ostatniego boku łamanej pokrywa się z początkiem pierwszego, czyli $A_1 = A_n$, to łamaną nazywamy zamkniętą.
Jeżeli niekolejne boki łamanej nie mają punktów, to łamana jest zwyczajna.

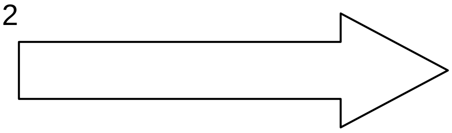
Przykłady łamanych

Rys.1



Łamana zwyczajna otwarta

Rys.2

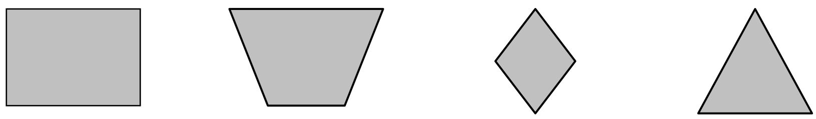


Łamana zwyczajna zamknięta

Definicja 2
Wielokąt, wielobok, *n*- kąt, *n*- bok domknięta płaska figura geometryczna ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą o *n*- bokach gdzie $n \geq 3$. Boki i wierzchołki łamanej ograniczającej wielokąt nazywa się odpowiednio bokami i wierzchołkami wielokąta.

Przykłady wielokątów

Rys.3

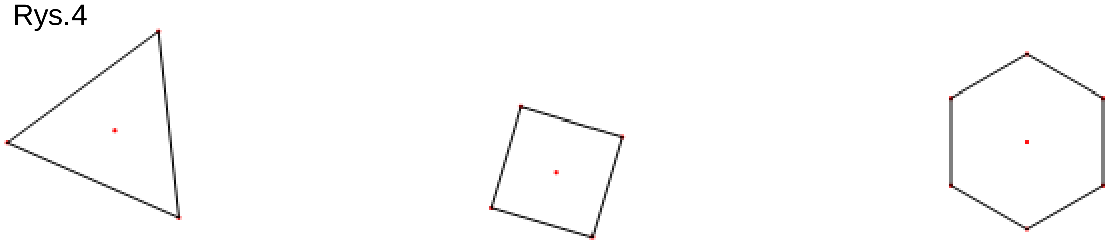


Wśród wielokątów wyróżniamy wielokąty foremne.

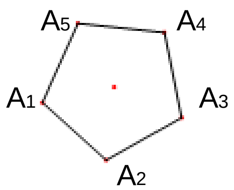
Definicja 3
Wielokąt foremny jest to wielokąt, który ma wszystkie boki równej miary, a kąty wewnętrzne są o tej samej mierze.

Przykłady wielokątów foremnych:

Rys.4



trójkąt równoboczny   kwadrat   sześciokąt foremny

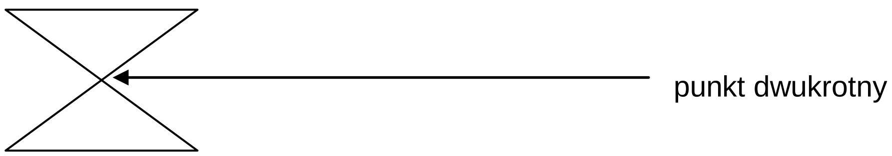


pięciokąt foremny

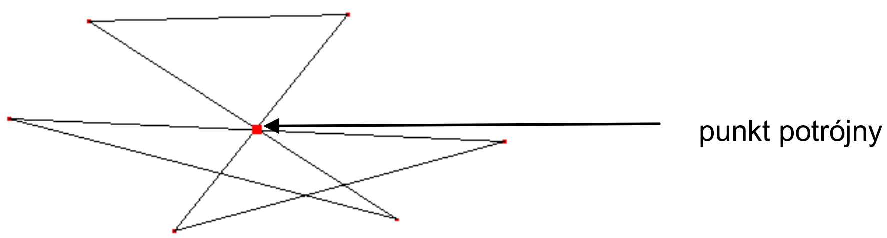
Punkty A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – wierzchołki wielokąta
odcinki A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 – boki wielokąta

Co będzie, jeśli łamana nie jest zwyczajną, czyli boki niesąsiadujące ze sobą mają punkty wspólne? Takie punkty nazywamy **punktami wielokrotnymi**.
Przykłady punktów wielokrotnych

Rys.5



Rys.6



Pytanie1

Ile maksymalnie punktów dwukrotnych może posiadać jeden wielokąt?

Jeden bok *n*-kąta nie może przeciąć sam siebie i boków sąsiadujących z nim, wiec może przeciąć co najwyżej *n*-3 boków. Zatem możliwa liczba punktów podwójnych może być teoretycznie równa $\frac{n(n-3)}{2}$, bo każdy punkt został policzony dwukrotnie.

Teoretycznie możliwe liczby punktów dwukrotnych w wielokątach.

nazwa wielokąta	liczba punktów podwójnych
trójkąt	$\frac{3\cdot(3-3)}{2}=0$
pięciokąt	$\frac{5\cdot(5-3)}{2}=5$
sześciokąt	$\frac{6\cdot(6-3)}{2}=9$
siedmiokąt	$\frac{7\cdot(7-3)}{2}=14$
ośmiokąt	$\frac{8\cdot(8-3)}{2}=20$

Trójkąt nie może mieć żadnych punktów dwukrotnych, co jest o tyle oczywiste, że każdy bok jest sąsiadem dwóch pozostałych.

Pytanie 2

Jeśli maksymalna liczba punktów podwójnych w *n*-kącie jest równa $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$, to czy istnieją wielokąty, które mają 0, 1, 2, 3… $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ punktów podwójnych?

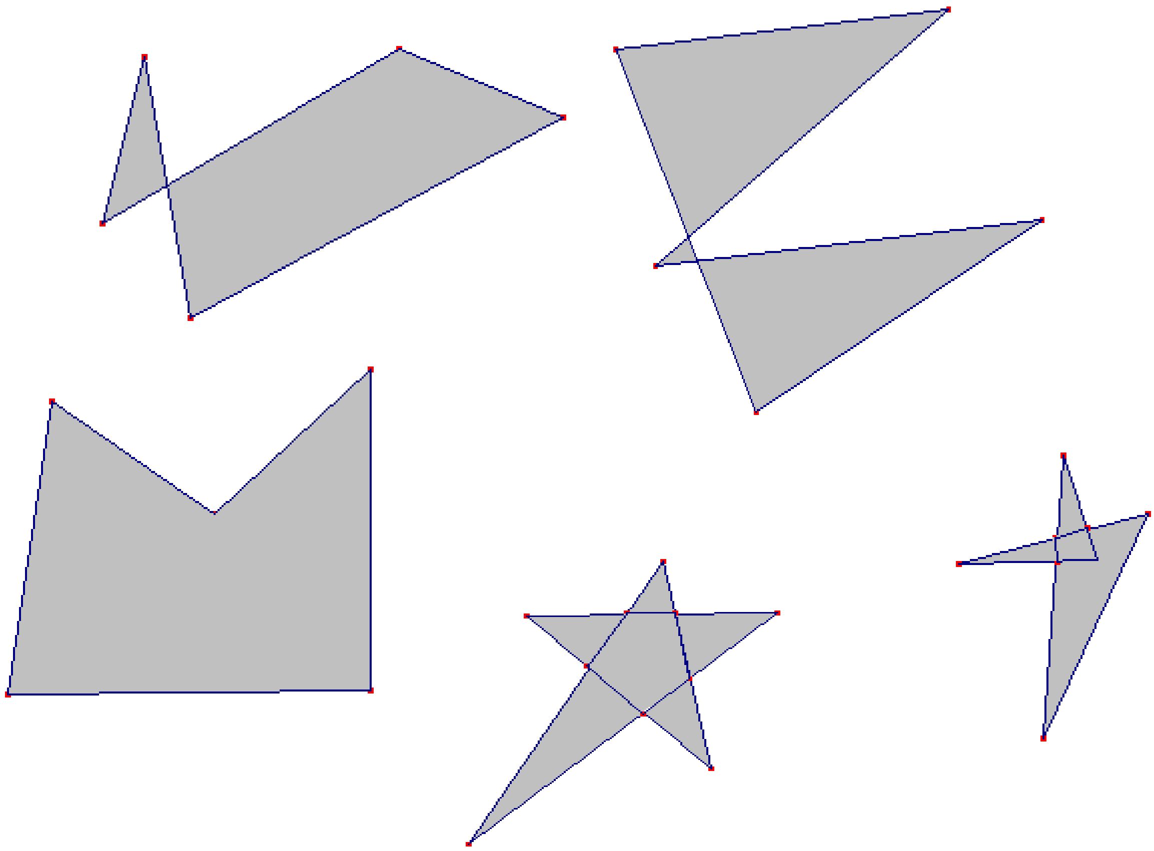
Do wyznaczenia liczby punktów dwukrotnych w wielokątach służą następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1

W przypadku nieparzystej liczby boków *n* istnieją wieloboki, dla których liczby punktów podwójnych są równe kolejnym liczbom całkowitym od 0 do ich liczby maksymalnej, tj. $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ z wyjątkiem przedostatniego wyrazu tego skończonego ciągu, czyli $\frac{n(n-3)}{2}-1$.

Taki przypadek zachodzi np. dla *n* = 5. Możliwe istniejące pięcioboki posiadają liczbę punktów podwójnych wynoszącą odpowiednio 0, 1, 2, 3 oraz 5, ale nie istnieje pięciobok z czterema punktami podwójnymi. Opisaną sytuację przedstawia poniższy rysunek.

Rys.7

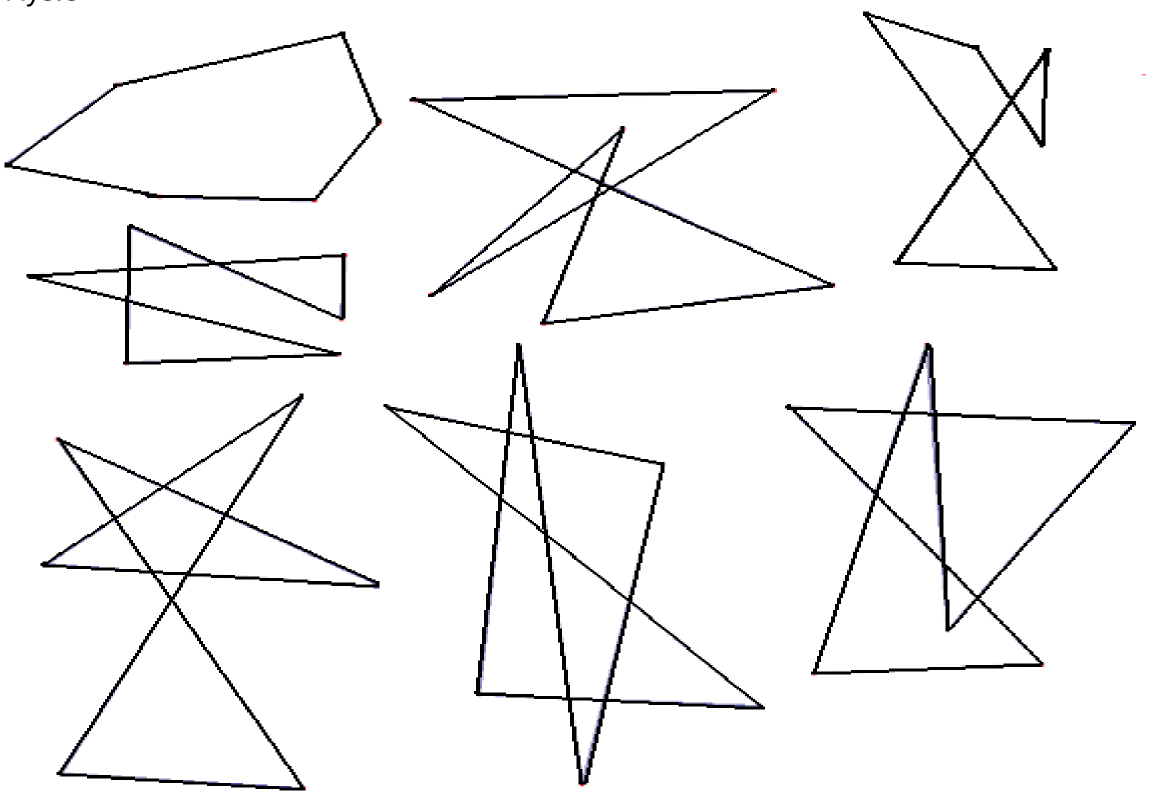


Twierdzenie 2

W przypadku parzystej liczby boków *n* istnieją wieloboki, dla których liczby punktów podwójnych są równe kolejnym liczbom całkowitym od 0 do maksymalnej ich liczby, która wynosi w tym przypadku $\frac{n(n-4)}{2}+1$(bez wyjątku).

Stosując to twierdzenie dla sześciokąta, wnioskuję, że może on mieć co najwyżej $\frac{6\cdot(6-4)}{2}$+1=7 punktów podwójnych oraz, że istnieją sześcioboki mające liczbę punktów podwójnych równą jednej z liczb całkowitych od 0 do 7 włącznie. Na kolejnym rysunku zaprezentowane są sześciokąty, które posiadają odpowiednio: 0, 1, 2, ... 7 punktów podwójnych.

Rys.8



Pytanie 3
Jaka może być maksymalna krotność punktu w *n*-kącie?
Np. czy pięciokąt może mieć punkt potrójny, a siedmiokąt może mieć punkt pięciokrotny?

W obydwu przypadkach odpowiedź brzmi nie, gdyż do istnienia punktu trzykrotnego potrzebnych jest 6 wierzchołków, a pięciokąt ma ich tylko pięć. Analogicznie do zaistnienia punktu pięciokrotnego trzeba pięć różnych odcinków, czyli 10 wierzchołków, tymczasem w siedmiokącie jest ich 7.

Twierdzenie 3

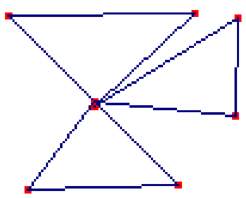
Jeżeli liczba boków wielokąta wynosi *n* i ma on punk *k*-krotny to zachodzi warunek :
$2k \le n$

Na przykład :

- w pięciokącie $2 \cdot k \le 5$ czyli $\mathrm{k} \le 2{,}5$, co oznacza że pięciokąt może mieć punkty co najwyżej dwukrotne,
- w sześciokącie $2 \cdot k \le 6$, czyli $k \le 3$, co oznacza że sześciokąt może mieć punkty co najwyżej trzykrotne.

Przykładowy sześciokąt z punktem trzykrotnym

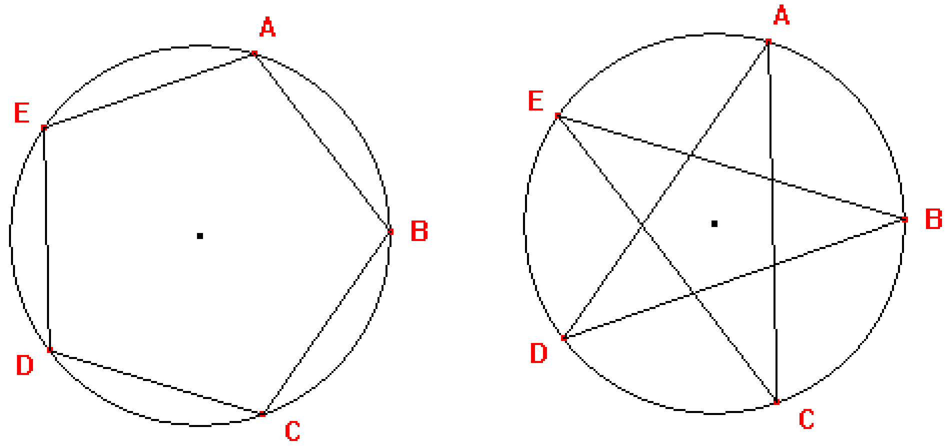
Rys.9



Pytanie 4

Jak zbudować wielokąty gwiaździste?
Łącząc po kolei punkty dzielące okrąg na 5 równych części otrzymałem pięciokąt foremny wypukły, a łącząc co drugi punkt, czyli A→C→E→B→D→A otrzymam pięciokąt gwiaździsty foremny.

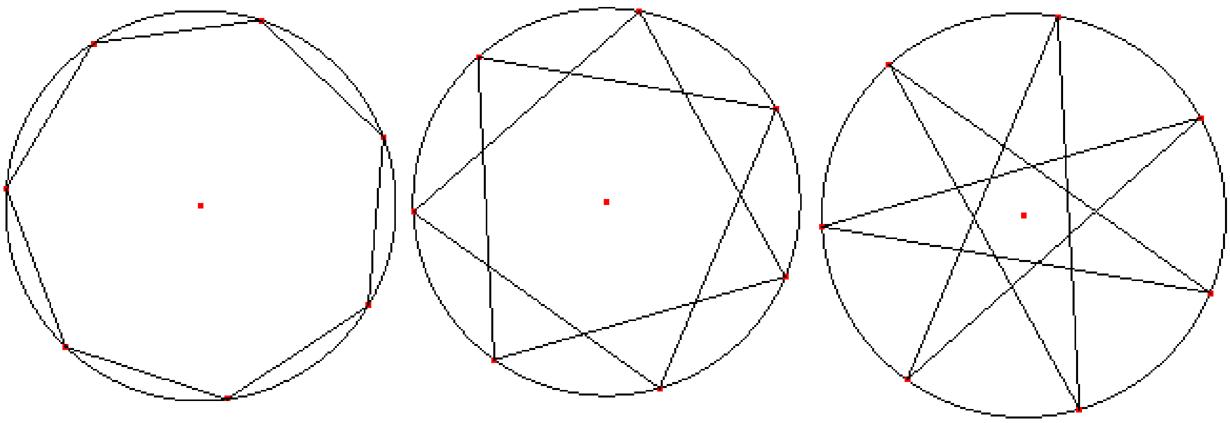
Rys.10



Wierzchołkami obydwu wielokątów są punkty A, B, C, D, E, inne punkty w wielokącie gwiaździstym są punktami dwukrotnymi. Kąty przy wierzchołkach wielokąta gwiaździstego nazywamy **kątami sterczącymi.** Nazwa ta pochodzi od polskiego uczonego, profesora Akademii Krakowskiej, **Jana Brożka**, który żył w latach 1585-1652.

W taki sam sposób zbudowałem różne siedmiokąty.
Łącząc po kolei punkty dzielące okrąg na siedem równych części uzyskałem siedmiokąt foremny, po połączeniu kolejno co drugiego wierzchołka powstał siedmiokąt gwiaździsty foremny, a łączenie kolejno co trzeciego wierzchołka dało inny siedmiokąt gwiaździsty foremny. Rysunek przedstawia trzy rodzaje siedmiokątów otrzymanych w opisany powyżej sposób.

Rys.11

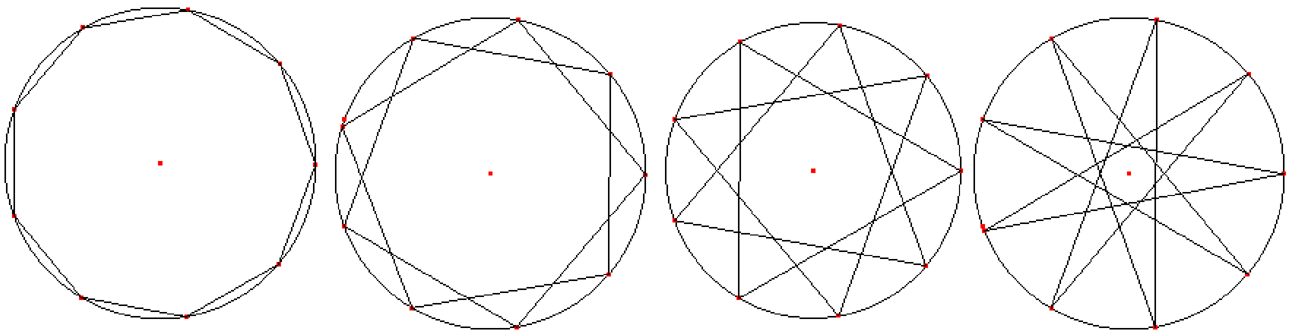


Pytanie 5

Ile różnych wielokątów gwiaździstych można zbudować dla danej liczby wierzchołków?

Metodą opisaną w poprzednich przykładach zbudowałem wszystkie możliwe dziewięciokąty. Jest ich 4, w tym trzy różne dziewięciokąty gwiaździste.

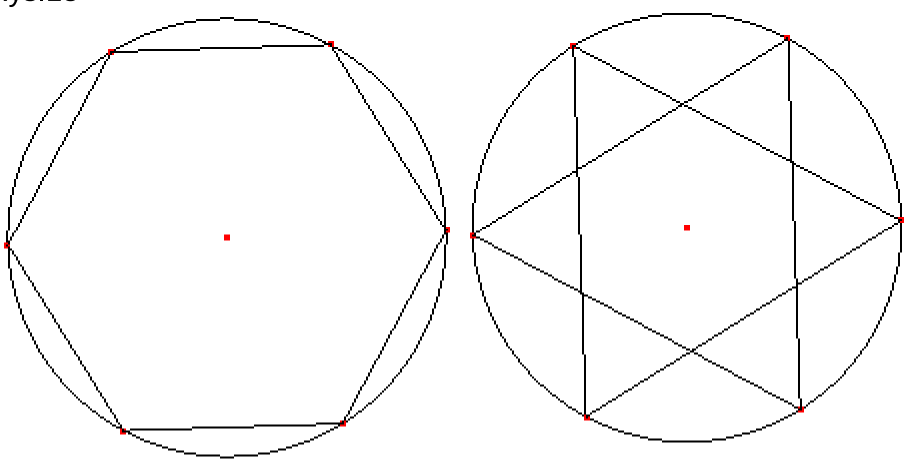
Rys.12



Budowa wielokątów gwiaździstych o parzystej liczbie wierzchołków.

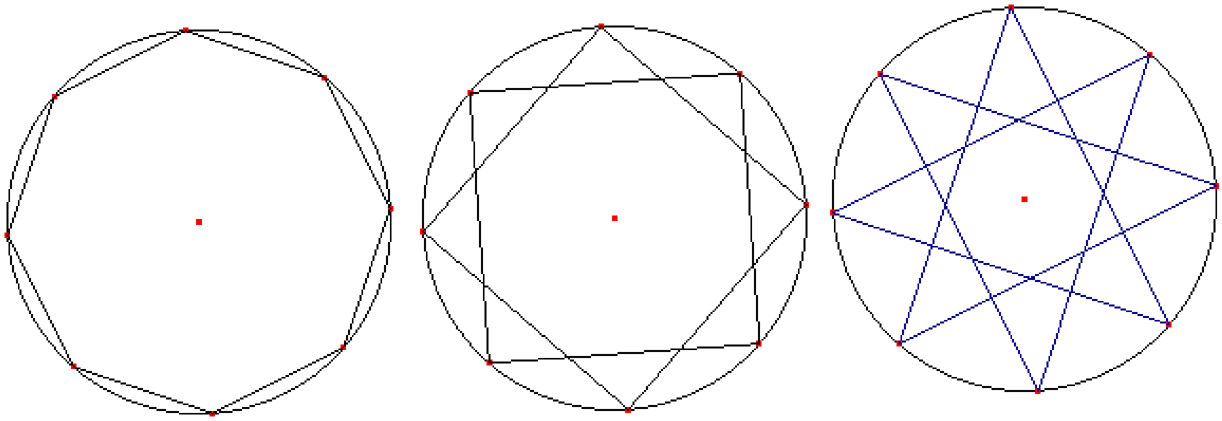
Łącząc kolejne punkty dzielące okrąg na sześć równych części otrzymuję sześciokąt foremny wypukły, łącząc co drugi wierzchołek łamana zamyka się w trójkąt. Następnie łączę pozostałe 3 punkty w drugi trójkąt. Wierzchołki trójkątów są wierzchołkami sześciokąta gwiaździstego. Gdy połączę co trzeci wierzchołek, otrzymam odcinek, który dzieli figurę na dwie przystające części.
Ostatecznie na bazie sześciokąta foremnego można utworzyć tylko jeden sześciokąt gwiaździsty.
Rysunek przedstawia sześciokąt foremny wypukły oraz sześciokąt gwiaździsty.

Rys.13



Ośmiokąt foremny wypukły może wygenerować tylko dwa wielokąty gwiaździste.
Kolejny rysunek przedstawia sposób tworzenia ośmiokątów

Rys.14



Jan Brożek podał sposób budowy różnych rodzajów wielokątów dla danej liczby wierzchołków poprzez odpowiedni rozkład na składniki tej liczby. Wyniki badań rozszerzył francuski matematyk, Poinsot. Liczba możliwych do zbudowania siedmiokątów jest równa 3, ponieważ liczbę 7 możemy rozłożyć na następujące trzy sumy: 7 = 1+ 6 = 2 + 5 = 3 + 4. Oznacza to, że po podzieleniu okręgu na 7 równych części otrzymamy:

- ✓ siedmiokąt wypukły łącząc po kolei wierzchołki,
- ✓ siedmiokąt gwiaździsty łącząc co drugi wierzchołek,
- ✓ inny siedmiokąt gwiaździsty łącząc co trzeci wierzchołek

Sytuacja ta została zaprezentowana na rysunku 11.

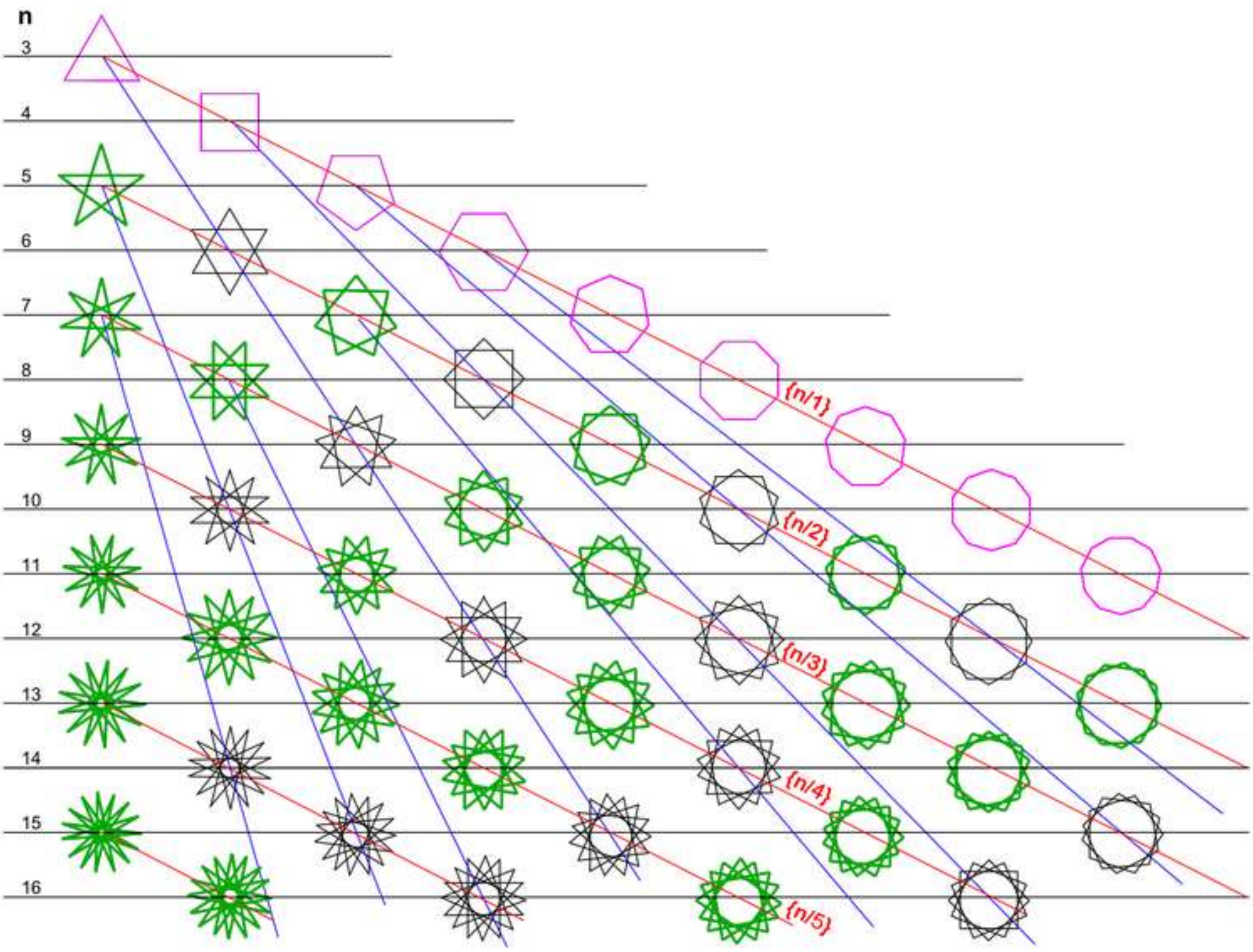
Podobnie jest z dziewięciokątem. Możliwe rozkłady liczby 9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5, co daje cztery różne dziewięciokąty, w tym 3 gwiaździste. Ilustruje je rysunek 11.
Dla ośmiokąta rozkłady liczby 8 są następujące 8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4. Ostatni z rozkładów dzieli ośmiokąt na 2 przystające figury, wiec nie powstanie wielokąt gwiaździsty. Ostatecznie istnieją trzy ośmiokąty foremne, w tym 2 gwiaździste. Zaprezentowane one zostały na rysunku 12.

Inne osiągnięcia Jana Brożka w zakresie badań własności wielokątów gwiaździstych można ująć w następujące punkty:

I. Podał sposób budowy różnych rodzajów wielokątów dla danej liczby wierzchołków przez rozkład tej liczby, wyznaczając tym po raz pierwszy liczbę wielokątów gwiaździstych o 7, 8, 11, 14, 15 wierzchołkach,
II. Pierwszy odkrył że przy danej liczbie nieparzystej wierzchołków wśród wszystkich wielokątów gwiaździstych o tej samej liczbie wierzchołków istnieje jeden taki, w którym suma kątów sterczących wynosi 180°
III. Wskazał nowy sposób konstrukcji wszystkich wielokątów foremnych o tej samej liczbie wierzchołków i równych obwodach za pomocą przekształceń na wielokącie.

Poniższy schemat pokazuje różnorodność wielokątów gwiaździstych foremnych i zależność miedzy nimi a zwykłymi wielokątami foremnymi.*

Rys.15



Bibliografia

1. Jadwiga Dianni, Adam Wachułka, *Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej,* PZWS, Warszawa 1963.
2. W. Krysicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski *Z geometrią za pan brat,* Iskry ,Warszawa 1992.
3. Praca zbiorowa *Encyklopedia szkolna- Matematyka,* WSiP, Warszawa 1998.
4. Z. Muzyczka, M. Kordos *Słownik szkolny-Matematyka,* WSiP, Warszawa 1996.
5. http://main3.amu.edu.pl/~wiadmat/131-138_kt_wm38.pdf Brzozek czy Brożek.

*Pobrane z *Wikipedii* z artykułu o wielokątach gwiaździstych