

Twierdzenie Menelausa i jego zastosowania

*Piotr Wiciak
Gimnazjum nr 17
im. Artura Grottgera
w Krakowie
klasa III a*

opiekun pracy – mgr Dorota Szczepańska

Kraków, 2005r.

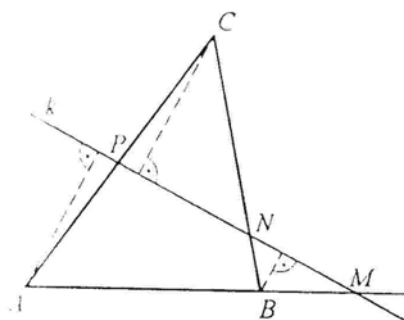
W mojej pracy przedstawię dwa interesujące twierdzenia: Menelausa i Cevy, oraz twierdzenia do nich odwrotne. Pochodzące z około 80 r.n.e. twierdzenie Menelausa z Aleksandrii (tw.1) dowodzi się w oparciu o twierdzenie Talesa, natomiast opublikowane w 1678 r. twierdzenie Giovanniego Cevy (tw.2) jest wnioskiem z twierdzenia Menelausa. Warto pamiętać o tych twierdzeniach, ponieważ dzięki nim można w bardzo prosty sposób udowodnić wiele faktów dotyczących trójkątów. W szczególności udowodnię, że w dowolnym trójkącie dwusieczne trzech kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie. Podobnie, każde z trzech prostych: środkowe trzech boków trójkąta, proste zawierające wysokości trójkąta, symetralne trzech boków trójkąta, i co mniej oczywiste i znane, proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgu wpisanego oraz proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych przecinają się w jednym punkcie. Wyżej wymienione punkty przecięcia nazywamy punktami szczególnymi trójkąta. Dowody twierdzeń zaczerpnąłem z książki [1]. Twierdzenie 2 oraz własności 5 i 6 udowodniłem samodzielnie.

Twierdzenie 1 *Jeżeli prosta nie przechodząca przez żaden wierzchołek trójkąta ABC przecina jego boki AB , BC , CA lub ich przedłużenia odpowiednio w punktach M , N , P to*

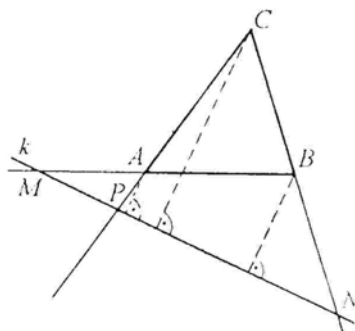
$$(1) \quad \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1.$$

Dowód. Niech k będzie prostą, taką jak w twierdzeniu, zaś przez d_A , d_B , d_C oznaczmy wysokości trójkątów AMP , BMN , PNC . Proste zawierające wysokości d_A , d_B , d_C są równoległe, więc zgodnie z twierdzeniem Talesa:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{d_A}{d_B}, \quad \frac{BN}{NC} = \frac{d_B}{d_C} \quad \text{zaś} \quad \frac{CP}{PA} = \frac{d_C}{d_A}.$$



Rys. 1



Rys. 2

Mnożąc stronami otrzymujemy

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = \frac{d_A}{d_B} \cdot \frac{d_B}{d_C} \cdot \frac{d_C}{d_A} = 1,$$

co należało wykazać. □

Mogę sformułować twierdzenie odwrotne:

Twierdzenie 2 *Jeżeli punkty M, N, P leżą na prostych AB, BC, CA , przy czym żaden nie jest wierzchołkiem trójkąta ABC , parzysta ich liczba leży na bokach trójkąta oraz wyznaczają odcinki spełniające warunek (1), to punkty M, N, P leżą na jednej prostej.*

Dowód. Przeprowadzę dowód nie wprost. Zakładam, że zachodzi (1) oraz, że prosta NP przecina prostą AB w punkcie M' , różnym od M . Wtedy zgodnie z twierdzeniem 1

$$\frac{AM'}{M'B} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1,$$

co wobec (1), daje

$$\frac{AM'}{M'B} = \frac{AM}{MB},$$

czyli

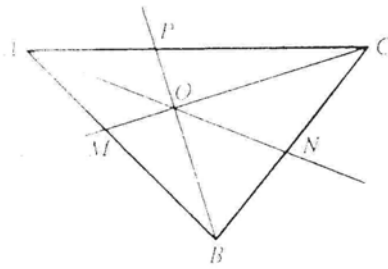
$$\frac{AM'}{AM} = \frac{M'B}{MB},$$

co nie jest prawdziwe, bowiem jeden ułamek jest większy, a drugi mniejszy od 1. Zatem $M = M'$, czyli punkty M, N, P są współliniowe. □

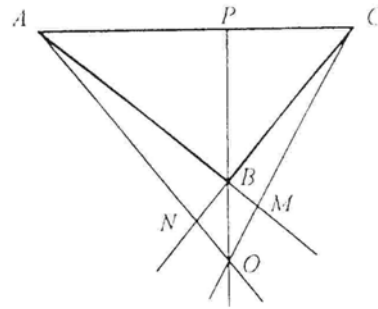
Twierdzenie 3 *Jeżeli proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC i nie zawierające żadnego boku trójkąta przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe, to odcinki wyznaczone przez punkty M, N, P (punkty przecięcia się tych prostych odpowiednio z bokami AB, BC, CA lub ich przedłużeniami) spełniają warunek (1).*

Dowód. Jeżeli proste, o których mówi twierdzenie, przecinają się w jednym punkcie, oznaczę go O , to do trójkąta ABP i prostej CO stosuję twierdzenie 1, a następnie analogicznie dla trójkąta BCP i prostej AO . Otrzymuję w ten sposób:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BO}{OP} \cdot \frac{PC}{CA} = 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{PO}{OB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CA}{AP} = 1.$$



Rys. 3



Rys. 4

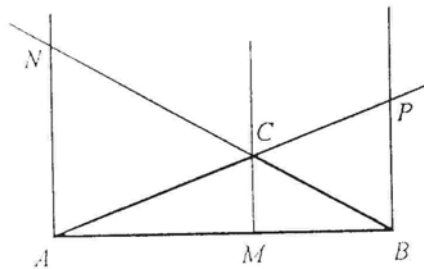
Po przemnożeniu stronami mam

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BO}{OP} \cdot \frac{PC}{CA} \cdot \frac{PO}{OB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CA}{AP} = 1,$$

czyli

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1.$$

Natomiast, jeżeli proste są równoległe, to prawdziwe są zależności:



Rys. 5

$$\frac{BN}{NC} = \frac{BA}{AM}, \quad \frac{CP}{PA} = \frac{MB}{BA} \quad \text{oraz oczywiście} \quad \frac{AM}{MB} = \frac{AM}{MB}$$

i znów mnożąc stronami otrzymujemy równość (1):

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BA}{AM} \cdot \frac{MB}{BA} = 1$$

□

Twierdzenie 4 Jeżeli trzy proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC i nie zawierające żadnego boku trójkąta, wyznaczają na bokach AB , BC , CA lub ich przedłużeniach takie punkty M , N , P , że spełniony jest warunek (1) oraz nieparzysta ich liczba leży na bokach trójkąta, to proste przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

Dowód Przeprowadzę dowód nie wprost. Prowadzę proste AN i BP tak, aby przecinały się w punkcie O , oraz prostą CM nie zawierającą punktu O . Następnie prowadzę prostą CM' zawierającą punkt O . Wówczas z twierdzenia 2

$$\frac{AM'}{M'B} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{AP} = 1$$

oraz ponieważ zakładam (1)

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1.$$

Porównując obie równości otrzymuję

$$\frac{AM'}{M'B} = \frac{AM}{MB}$$

czyli

$$\frac{AM'}{AM} = \frac{M'B}{MB}$$

co nie jest prawdziwe, zatem $M = M'$ i wszystkie trzy proste przecinają się w punkcie O .

Podobne rozumowanie stosuję w drugim przypadku. W trójkącie ABC prowadzę proste AN i BP tak, aby były równoległe oraz prostą CM , która nie jest równoległa do nich. Następnie prostą CM' równoległą do AN i BP . Zgodnie z twierdzeniem Cevy otrzymuję

$$\frac{AM'}{M'B} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{AP} = 1,$$

co łącznie z (1) daje

$$\frac{AM'}{AM} = \frac{M'B}{MB},$$

ale to, jak poprzednio, nie jest prawdą. Zatem prosta CM musi być równoległa do AN i BP . □

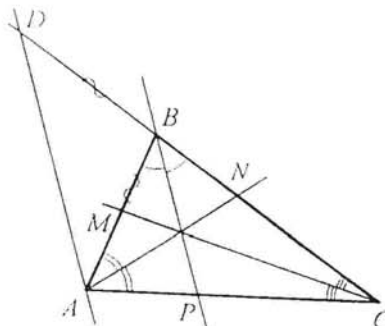
W oparciu o powyższe twierdzenia w bardzo prosty, szybki i łatwy sposób wykażę własności przecinania się w jednym punkcie:

- 1) dwusiecznych trzech kątów wewnętrznych trójkąta (jest to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt),
- 2) środkowych trzech boków trójkąta (jest to środek ciężkości trójkąta),
- 3) prostych zawierających wysokości trójkąta (jest to tak zwane ortocentrum trójkąta),

- 4) symetralnych trzech boków trójkąta (jest to środek okręgu opisanego na tym trójkącie),
- 5) prostych łączących wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgu wpisanego (jest to tak zwany punkt Gergonne'a),
- 6) prostych łączących wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych (jest to tak zwany punkt Nagela).

Własność 1 Trzy dwusieczne kątów trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Niech punkt D oznacza przecięcie prostej BC z prostą równoległą do PB i przechodzącą przez A .



Rys. 6

Z twierdzenia Talesa $\frac{CP}{PA} = \frac{CB}{BD}$. Ponieważ prosta PB jest dwusieczną kąta B , trójkąt ABD jest trójkątem równoramiennym, czyli $AB = BD$. Zatem

$$\frac{CP}{PA} = \frac{CB}{AB}.$$

Podobnie pokazujemy, że

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{CB}, \quad \frac{NB}{CN} = \frac{AB}{AC}.$$

Zatem

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CB}{AB} = 1$$

i z twierdzenia 4 wynika teza.

□

Własność 2 Trzy środkowe boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

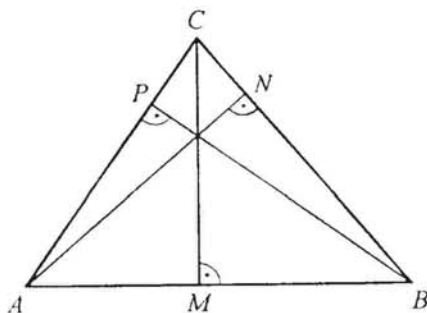
Dowód. Niech M, N, P oznaczają odpowiednio środki boków AB, BC, AC . W takim razie $AM = MB, AP = CP$ i $BN = NC$. Stąd

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

i jak poprzednio korzystamy z twierdzenia 4. □

Własność 3 Trzy proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Dla trójkąta prostokątnego własność jest oczywista. Zakładam więc, że trójkąt nie jest prostokątny. Niech M, N, P oznaczają punkty wspólne prostych zawierających wysokości z prostymi AB, BC, AC .



Rys. 7

Trójkąty ABP i ACM są prostokątne i mają wspólny kąt A , są więc podobne. Stąd

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AM}.$$

Podobnie

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BN}{MB} \quad \text{i} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{PC}{NC}.$$

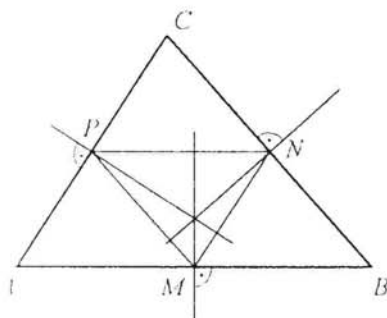
Mnożąc stronami dwie ostatnie równości i porównując z pierwszą otrzymuje

$$\frac{PC}{NC} \cdot \frac{BN}{MB} = \frac{AP}{AM},$$

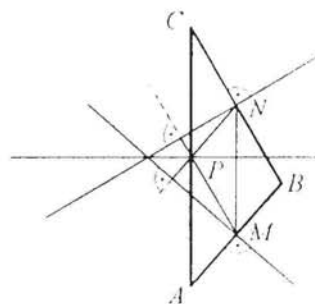
co po uporządkowaniu daje (1). W oparciu o twierdzenie 4 proste przecinają się w jednym punkcie. □

Własność 4 Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód.



Rys. 8



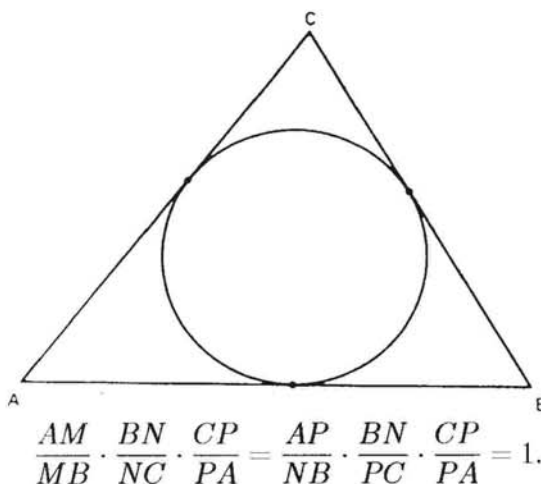
Rys. 9

Rozważam trójkąt MNP , gdzie M, N, P oznaczają środki boków trójkąta ABC . Prosta MN jest równoległa do AC , prosta PM jest równoległa do CB , zaś PN jest równoległa do AB . Wobec tego symetralne boków trójkąta ABC są wysokościami trójkąta MNP . Na mocy własności 3 przecinają się w jednym punkcie.

□

Własność 5 Proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt przecinają się w jednym punkcie.

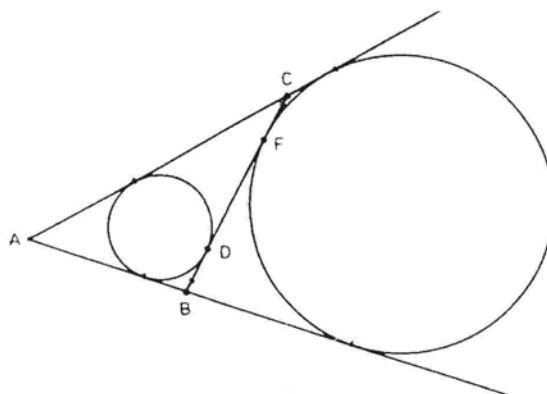
Dowód. Skorzystam z faktu 1, z pracy [3]. Jeśli M, N, P oznaczają punkty styczności okręgu wpisanego, odpowiednio z bokami AB, BC, AC , to $MB = NB, AM = AP, NC = PC$. Zatem



I zgodnie z twierdzeniem 4 zachodzi teza. □

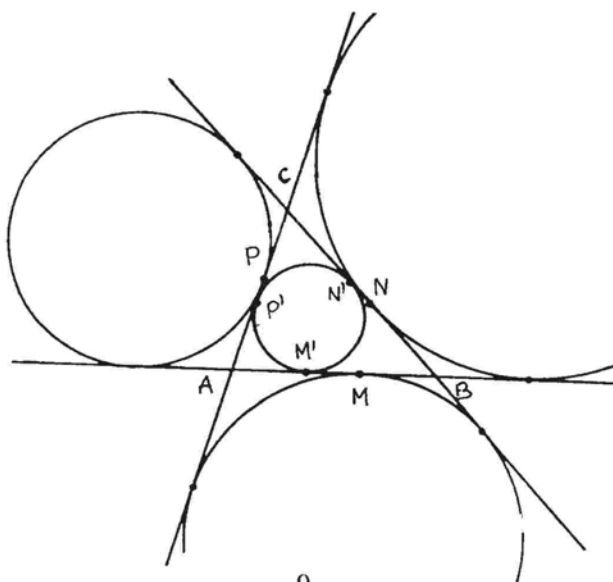
W dowodzie kolejnej własności skorzystam z lematu, który dowodziłem w pracy [3], jako fakt 2.

Lemat *Jeśli okręgi: wpisany w trójkąt i dopisany do trójkąta ABC są styczne do boku BC odpowiednio w punktach D i F , to $CF = BD$.*



Własność 6 *Prosta łącząca wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych przecina się w jednym punkcie.*

Dowód. Niech M, N, P oznaczają punkty styczności okręgów dopisanych do trójkąta ABC , odpowiednio do boków AB, BC , i AC , zaś M', N', P' punkty styczności okręgu wpisanego w ten trójkąt, odpowiednio z bokami



AB , BC , i AC . W oparciu o lemat, mamy:

$$AM = BN' = BM' = NC,$$

$$MB = AM' = AP' = CP,$$

$$BN = CN' = AP.$$

Zatem

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = \frac{NC}{CP} \cdot \frac{AP}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1,$$

czyli spełniony jest warunek (1) i ponownie korzystając z twierdzenia 4 proste przecinają się w jednym punkcie.

□

Bibliografia

- [1 | J. Górnicki, *Okruchy matematyki*, PWN, Warszawa 1995.
- [2 | W. Pompe, *Jak udowodnić wzór Herona?*, Delta nr 9 (232) 1993.
- [3 | P. Wiciak, *Jak udowodnić wzór Herona*, Sesja prac uczniowskich, Kraków 2004.