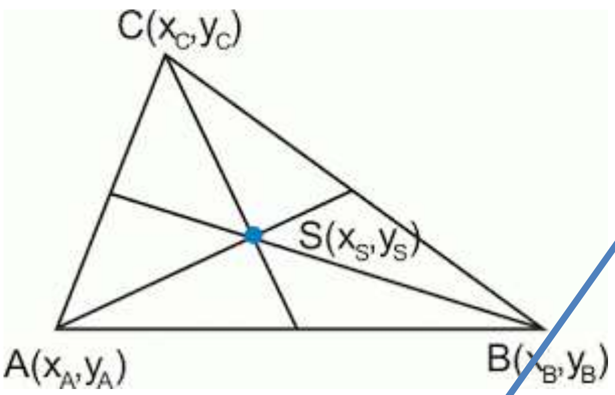
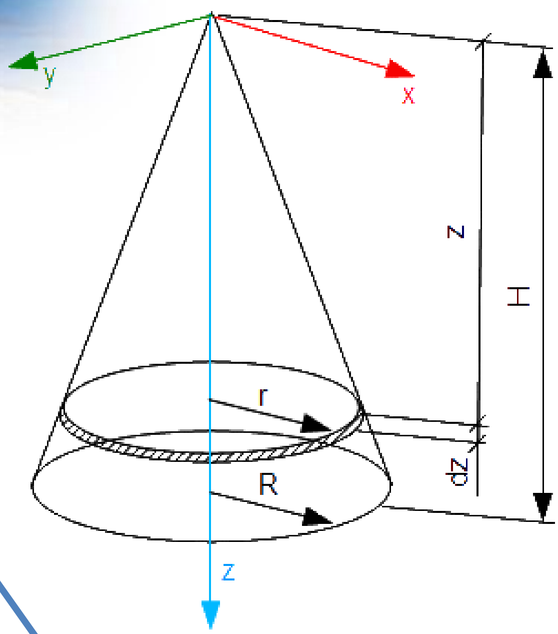
Środek Ciężkości

Daniel Woźniak, XX Liceum Ogólnokształcące w Krakowie

Opiekun: Iwona Sitnik-Szumiec





Praca moja poświęcona jest metodom wykorzystywania środka ciężkości, określaniu jego dokładnego położenia jak również obliczaniu pola powierzchni i objętości za pomocą zależności jakimi są reguły Pappusa-Guldina.

Środek ciężkości (barycentrum) ciała lub układu ciał jest punktem, w którym przyłożona jest wypadkowa siła ciężkości danego ciała. Dla ciała znajdującego się w jednorodnym polu grawitacyjnym środek ciężkości pokrywa się ze środkiem masy, dlatego pojęcia te często są mylone lub wręcz utożsamiane. W geometrii (w tym stereometrii) pojęcie środka ciężkości jest synonimem środka masy czyli punktu, w którym skupiona jest cała masa. Dla ciała znajdującego się w jednorodnym polu grawitacyjnym środek ciężkości pokrywa się ze środkiem masy dlatego pojęcia te często są mylone lub wręcz utożsamiane. W geometrii (w tym stereometrii) pojęcie środka ciężkości jest synonimem środka masy.

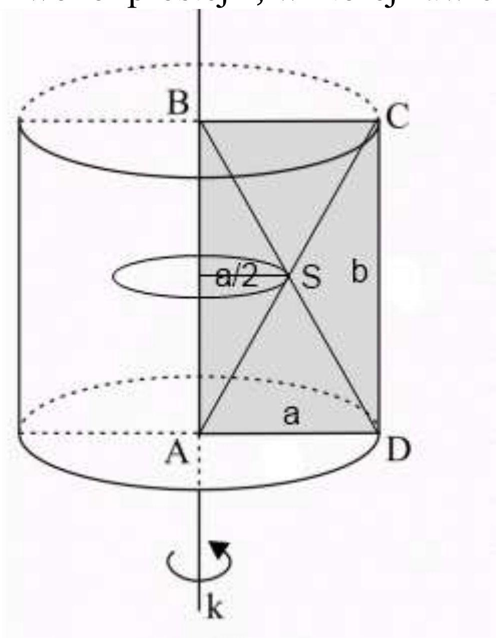
Środek ciężkości posiada prawie każde ciało.

W matematyce środek ciężkości okazuje się bardzo przydany.

Teraz wykażę na kilku przykładach jak można ciekawie wykorzystać środek ciężkości.

Twierdzenie Pappusa - Guldina

Doświadczenie 1.
Obliczmy pole i objętość walca powstałego przez obrót prostokąta o wymiarach $a \times b$ wokół prostej k, w której zawiera sie jeden z boków tego prostokąta.



a,b - bok prostokąta

S - środek ciężkości prostokąta

$\frac{a}{2} = r = S$ –promień, koła które zakreślił w przestrzeni środek ciężkości tego prostokąta.

Znając wymiary prostokąta można łatwo obliczyć pole i objętość powstałego walca:

$$V_{walca} = Pole_{podstawy} \cdot Wysokość$$

$$V_{walca} = \pi \cdot a^2 \cdot b$$

Zapiszmy wynik w trochę innej postaci:

$$V_{walca} = a \cdot b \cdot \pi \cdot 2 \cdot \frac{a}{2}$$

$$V_{walca} = Pole_{prostokąta\ ab} \cdot 2\pi \frac{a}{2}$$

$$V_{walca} = Pole_{prostokąta\ ab} \cdot Obwód_{koło\ o\ promieniu\ s}$$

Obliczmy teraz pole walca:

$$P_{walca} = 2 \cdot Pole_{podstawy} + Pole_{boczne}$$

$$P_{walca} = 2\pi a^2 + 2\pi ab$$

po małych przekształceniach:

$$P_{walca} = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot 2 \cdot \frac{a}{2} + 2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot 2 \cdot b$$

$$P_{walca} = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot (2a + 2b)$$

$$Pole_{walca} = Obwód_{koło\ o\ promieniu\ s} \cdot Obwód_{prostokąta\ ab}$$

Okazuje się, że objętość tej bryły można obliczyć mnożąc pole figury płaskiej (prostokąta), który obracaliśmy wokół prostej k przez obwód koła, które zakreślił środek ciężkości tego prostokąta.

Natomiast pole powierzchni otrzymanego walca to iloczyn obwodu koła o promieniu S, który jest odległością od osi obrotu do środka ciężkości figury płaskiej przez obwód figury, którą obracaliśmy (w tym przypadku prostokąta ABCD).

W ten sposób na konkretnym przykładzie odkryliśmy zasady, które odkrył szwajcarski matematyk i astronom Paul Guldin na początku XVII wieku, jakkolwiek już u Pappusa z Aleksandryi (około 300 lat po narodzeniu Chrystusa) znajdujemy te samą metodę.

Zasady te brzmią następująco:

I reguła Guldina

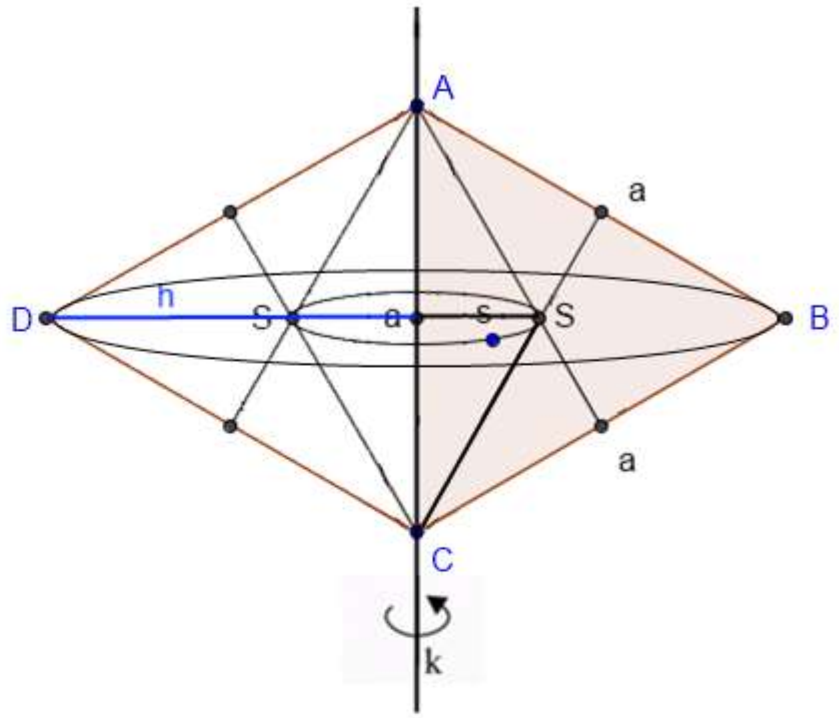
Objętość bryły powstającej przez obrót figury płaskiej dookoła nie przecinającej jej osi jest równa iloczynowi pola tej figury przez długość okręgu, jaki zakreśla przy tym obrocie jej środek ciężkości.,

II reguła Guldina

Pole powierzchni, powstałej przez obrót płaskiej linii dookoła osi leżącej w płaszczyźnie tej linii i nie przecinającej jej, jest równe długości tej linii pomnożonej przez długość okręgu, jaki przy obrocie zakreśla środek ciężkości danej linii.

Doświadczenie 2.

Sprawdźmy czy podczas obrotu trójkąta równobocznego względem prostej k odnajdziemy podobne zależności.



a - *bok*

S - środek ciężkości

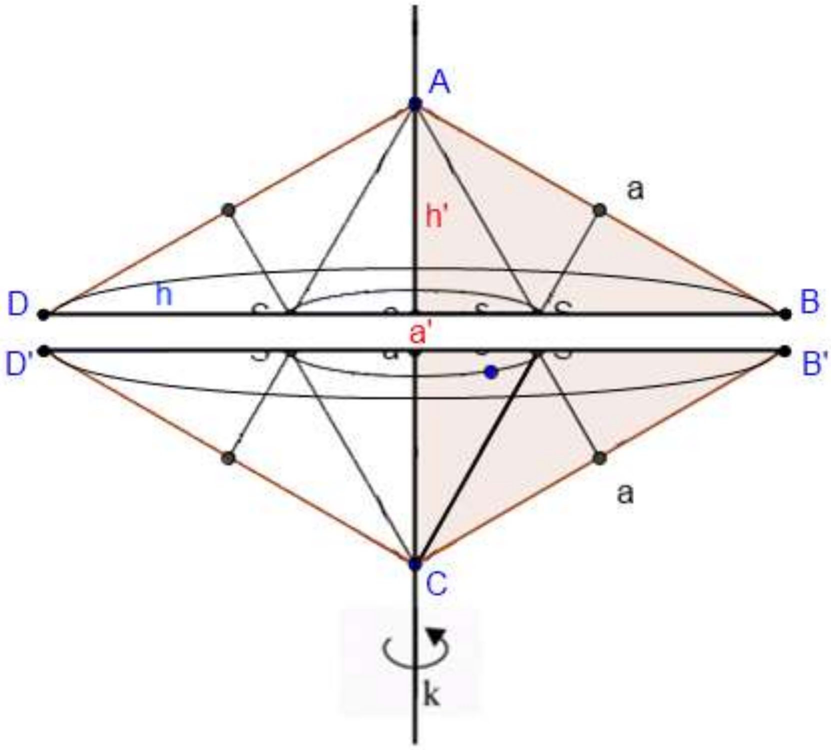
s - promień okręgu równy odległości od osi obrotu do środka ciężkości

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Obliczamy objętość na początku tradycyjnym wzorem:

$$V_{stożka} = \frac{1}{3} Pole_{\ podstaawy} \cdot wysokość$$

Podzielimy tę bryłę na dwa stożki. Suma objętości stożków to objętość bryły, zaś suma pól powierzchni bocznych to pole powierzchni tej bryły.



$$V_c = 2 \cdot V_{ABD}$$

$$V_c = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot 2$$

po małych przekształceniach:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot 2$$

$$V_c = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot 2$$

$$V_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$V_c = Pole_{trójkątaABC} \cdot Obwód_{koło\ o\ prom\ S}$$

Znów się okazuje, że objętość tej bryły to iloczyn pola figury, którą obracaliśmy przez obwód koła, którego promieniem jest odległość od osi obrotu do środka ciężkości obracanego trójkąta.

Sprawdźmy co otrzymamy z obliczenia pola powierzchni powstałej bryły:

$$Pole_{całkowite} = 2 \cdot Pole_{boczne\ stożka\ ABD}$$

$$P_c = 2 \cdot \pi h a$$

$$P_c = 2 \cdot \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

przekształcamy równanie:

$$P_c = \pi \cdot a \cdot a \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3$$

$$P_c = \frac{a\sqrt{3}}{3}\pi \cdot 3a$$

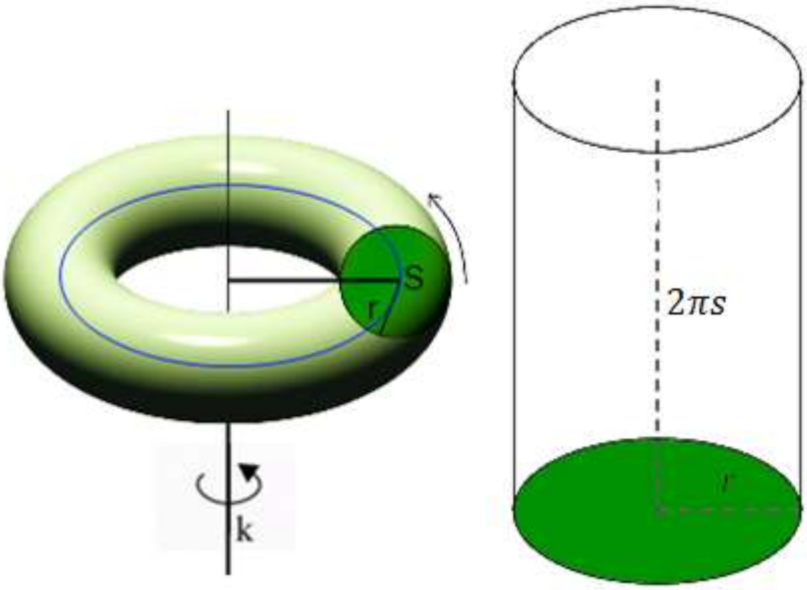
$$Pole_{całkowite} = Obwód_{koło\ o\ prom\ s} \cdot Obwód_{trójtąta\ ABC}$$

Jak widzimy kolejny raz pole jak i objętość możemy zapisać za pomocą pewnej zależności jakimi są REGUŁY GULDINA.

Nasuwa nam się pytania *po co nam Reguły Guldina skoro pole i objętość możemy policzyć z tradycyjnego wzoru, do czego mogą się przydać te reguły* ??

- Otóż jak widzimy fizyk dzięki tym regułom może określić dokładnie położenie środka ciężkości płaskiego obiektu, jeżeli jest w stanie obliczyć pole lub objętość bryły powstającej z obrotu tego obiektu wokół osi nie przecinającej go w żadnym punkcie. Natomiast matematyk może bez problemu obliczyć pole lub objętość bryły obrotowej znając odległość środka ciężkości figury płaskiej (która po obrocie dała kształt tej bryły) od osi obrotu tej figury.

Obliczmy teraz pole i objętość torusa sprawdzając czy i w tym przypadku pojawi się nam pewna zależność:



S = odległość środka okręgu do osi obrotu

r - promień okręgu

Torus powstaje poprzez obrót koła wokół prostej k leżącej w tej samej płaszczyźnie i nie przecinającej tego koła. Gdybyśmy taką obręcz (torus) wyprostowali, to otrzymalibyśmy walec mający za podstawę koło tworzące ten torus . Przy tym prostowaniu wewnętrzne części powierzchni pierścienia musiałyby doznać rozciągnięcia a zewnętrzne zgniecenia. Wysokość tego walca musi być krótsza od zewnętrznego równoleżnika a dłuższa od wewnętrznego. Wydaje się więc, że wysokość walca będzie równa średniemu równoleżnikowi, przechodzącemu przez środek ciężkości S koła tworzącego torus. Nazywając literą r promień koła tworzącego torus, otrzymamy wzór na objętość i pole powierzchni tego walca (a więc i obręczy-torusa)

Zacznijmy od policzenia objętości torusa:

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi s$$

$$V = 2\pi^2 r^2 s$$

$$V = Pole_{koło\ o\ prom\ r} \cdot Obwód_{koło\ o\ prom\ S}$$

teraz policzmy pole powierzchni obręczy:

$$Pole_{obręczy} = Pole_{boczne\ walca}$$

$$Pole_{obręczy} = 2\pi r \cdot 2\pi s$$

$$Pole_{obręczy} = Obwód_{koło\ o\ prom\ S} \cdot Obwód_{koło\ o\ prom\ r}$$

$$Pole_{obręczy} = 4\pi^2 \cdot r \cdot s$$

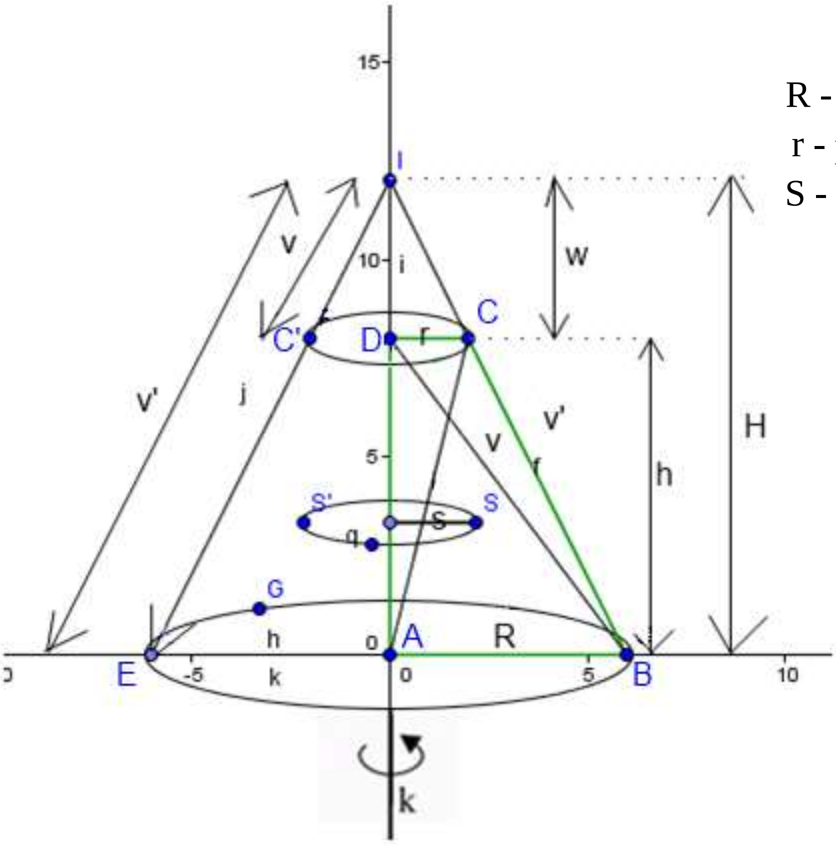
Widzimy, że kolejny raz pojawia nam się ta sama zależność w obliczaniu pola i objętości brył obrotowych.

- Znając reguły Pappusa-Guldina możemy wyznaczyć objętość i pole powierzchni bryły powstałej przez obrót trapezu prostokątnego ABCD o podstawach AB i CD wokół ramienia AD. W tym celu wyznaczę środek ciężkości tego trapezu. Dla ustalenia uwagi rozważam trapez ABCD.

Niech to będzie czworokąt o współrzędnych

A=(0,0) C=(2,8)

B=(6,0) D=(0,8)



R - promień koła o promieniu AB
r - promień koła o promieniu DC
S - promień koła o promieniu KS

$$v' = \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$v = \sqrt{r^2 + i^2}$$

Obliczmy odległość środka ciężkości od osi obrotu stosując I regułę Guldina:

$$V_{bryły} = V_{stożka\ S1} - V_{stożka\ S2}$$

$$V_{bryły} = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 w$$

$$V_{bryły} = \left(\frac{1}{3}\pi 36 \cdot 12\right) - \left(\frac{1}{3}\pi 4 \cdot 4\right)$$

$$V_{bryły} = 144\pi - \frac{16}{3}\pi$$

$$V_{bryły} = \frac{432}{3}\pi - \frac{16}{3}\pi$$

$$V_{bryły} = \frac{416}{3}\pi$$

Objętość liczona regułą I Guldina wynosi:

$$V_{bryły} = Pole_{ABCD} \cdot Obwód_{koło\ o\ prom\ S}$$

$$V_{bryły} = \frac{(R + r) \cdot h}{2} \cdot 2\pi s$$

$$V_{bryły} = \frac{8 \cdot 8}{2} \cdot 2\pi s$$

$$V_{bryły} = 64\pi$$

znając obie wartości porównajmy je:

$$\frac{416}{3}\pi = 64\pi s$$

$$s = \frac{416}{3} \cdot \frac{1}{64}$$

$$s = \frac{13}{6}$$

Według reguły Guldina środek ciężkości znajduje się w odległości $\frac{13}{6}$ od osi obrotu do środka ciężkości.

Czy stosując drugą regułę Guldina dotyczącą pola powierzchni otrzymamy taki sam wynik ? Sprawdźmy.

Obliczmy pole tradycyjnymi wzorami:

$$Pole_c = Pole_{cał.stożka\ ABI} - Pole_{boczn\ stożna\ CFI} + Pole_{koła\ o\ prom\ r}$$

$$Pole_c = \pi R v' - \pi r v + \pi r^2$$

$$Pole_c = \left(\pi 6 \cdot \sqrt{36+144}\right) - \left(\pi \cdot 2 \cdot \sqrt{4+16}\right) + 4\pi + 36\pi$$

$$Pole_c = 6\sqrt{180}\pi - 2\sqrt{20}\pi + 40\pi$$

$$Pole_c = 36\sqrt{5}\pi - 4\sqrt{5}\pi + 40\pi$$

$$Pole_c = 32\sqrt{5}\pi + 40\pi$$

Obliczmy pole stosując drugą zasadę Guldina:

$$Pole_c = Obwód_{czworokąt\ ABCD} \cdot Obwód_{koło\ o\ prom\ S}$$

$$Pole_c = (R + r + h + v') \cdot 2\pi s$$

$$Pole_c = \left(16 + 4\sqrt{5}\right) \cdot 2\pi s$$

porównajmy wartości:

$$32\sqrt{5}\pi + 40\pi = 2\pi s(16 + 4\sqrt{5})$$

$$16\sqrt{5} + 20 = s(16 + 4\sqrt{5})$$

$$s = \frac{16\sqrt{5}+20}{16+4\sqrt{5}} = \frac{\left(4\sqrt{5}+5\right)(4-\sqrt{5})}{\left(4+\sqrt{5}\right)(4-\sqrt{5})} = \frac{11\sqrt{5}}{11} \approx 2{,}236$$

porównajmy otrzymane wyniki:

Licząc I regułą s=$\frac{13}{6} \approx 2{,}1(6)$

licząc II regułą s=$\frac{11\sqrt{5}}{11} \approx 2{,}23$

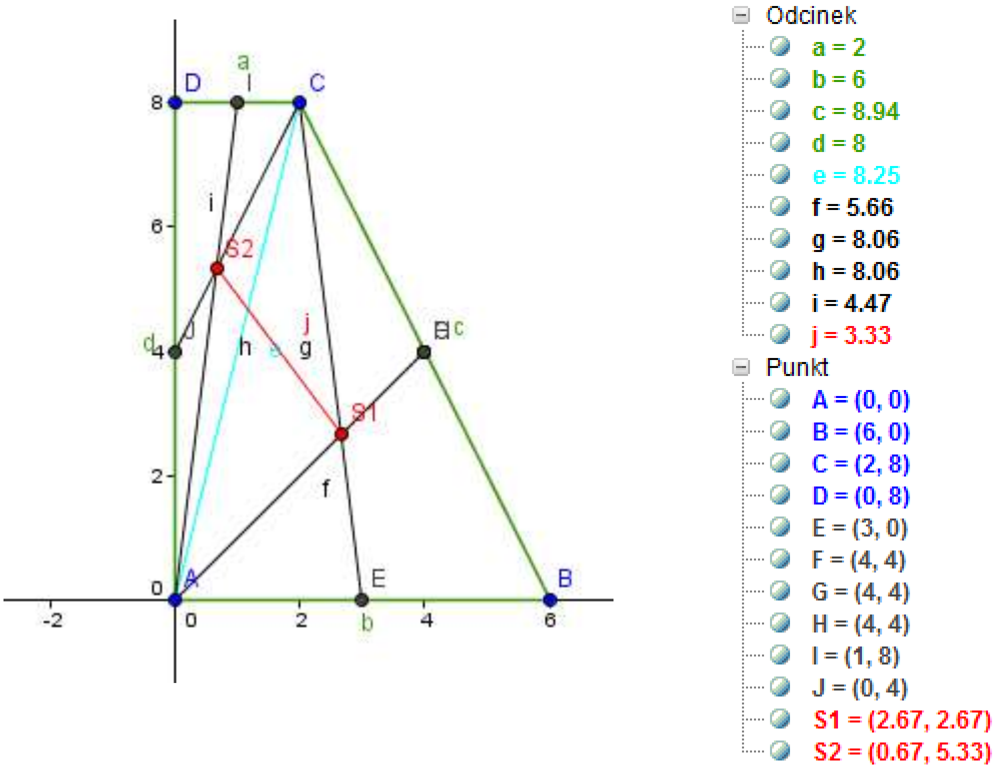
różnica tych wyników wynosi $\frac{13}{6} - \frac{11\sqrt{5}}{11} \approx 0{,}069$

Różnica jest bardzo niewielka.

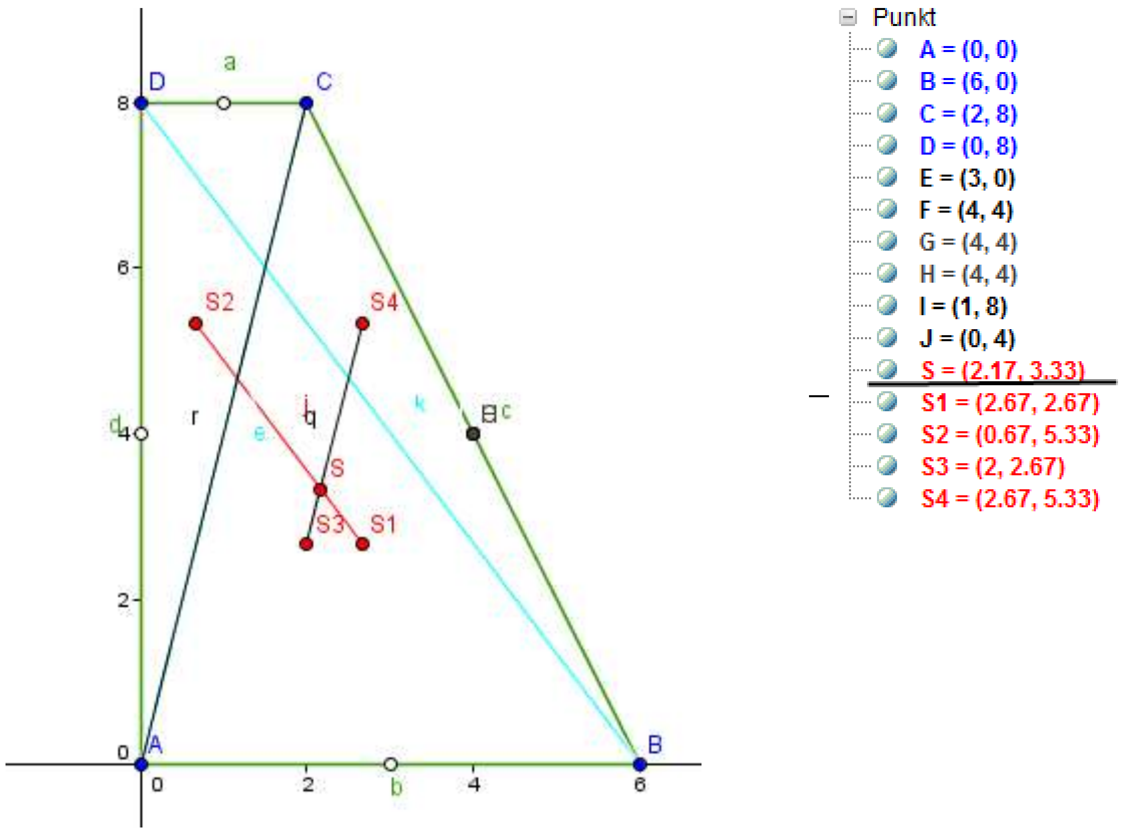
Obliczmy teraz algebraicznie odległość od osi obrotu do środka ciężkości.

Jak wyznaczyć środek ciężkości czworokąta? Dla trójkąta konstrukcja wyznaczania środka ciężkości jest na ogół znana, lecz przy czworokącie sprawa się nieco komplikuje. Środek ciężkości czworokąta wyznaczamy według poniższej konstrukcji:

- prowadzimy w czworokącie ABCD jedną z jego przekątnych



- przekątna podzieliła czworokąt ABCD na dwa trójkąty ABC i ACD
- wyznaczmy środek ciężkości każdego z nich
- następnie łączymy odcinkiem wyznaczone środki ciężkości
- teraz prowadzimy w czworokącie drugą z jego przekątnych
- podzieliła nam nasz czworokąt na dwa trójkąty ABD i BCD
- wyznaczmy środek ciężkości każdego z nich



- łączymy odcinkiem wyznaczone środki ciężkości w trójkącie ABD i BCD
- punkt S przecięcia obu odcinków jest środkiem ciężkości całego czworokąta ABCD

Z pomocą programu GeoGebra wyznaczyliśmy dokładnie środek ciężkości czworokąta ABCD postępując zgodnie z instrukcjami konstrukcji, który jest dokładnie taki sam jaki otrzymaliśmy stosując I regułę Guldina

Teraz obliczmy środek ciężkości bez używania żadnych dodatkowych programów:

Współrzędne środka ciężkości trójkąta można szybko wyznaczyć jako średnie arytmetyczne jego odpowiednich wierzchołków: (S1,S2,S3,S4 - patrz rys. wyżej)

$$S1_{ABC} = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$S2_{ACD} = \left(\frac{2}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

$$S3_{ABD} = \left(\frac{6}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$S4_{BCD} = \left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

prosta S1S2 ma równanie:

$$y - \frac{16}{3} = \frac{\frac{8}{3} - \frac{16}{3}}{\frac{8}{3} - \frac{2}{3}} \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{56}{9}$$

Prosta S3S4 ma równanie:

$$y - \frac{8}{3} = \frac{\frac{16}{3} - \frac{8}{3}}{\frac{8}{3} - \frac{6}{3}} \cdot \left(x - \frac{6}{3}\right)$$

$$y = 4x - \frac{16}{3}$$

Rozwiążmy teraz układ równań:

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{56}{9} \\ y = 4x - \frac{16}{3} \end{cases}$$

$-$

$$0 = -\frac{4}{3}x - 4x + \frac{56}{9} + \frac{16}{3}$$

$$0 = -\frac{4}{3}x - \frac{12}{3}x + \frac{56}{9} + \frac{48}{9}$$

$$0 = -\frac{16}{3}x + \frac{104}{9}$$

$$\frac{16}{3}x = \frac{104}{9}$$

$$x = \frac{104}{9} \cdot \frac{3}{16}$$

$$x = \frac{13}{6}$$

$$y = -\frac{4}{3} \cdot \frac{13}{6} + \frac{56}{9}$$

$$y = \frac{10}{3}$$

$$\begin{cases} x = \frac{13}{6} \\ y = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$S_{ABCD} = \left(\frac{13}{6}, \frac{10}{3}\right)$$

Z obliczeń wynika, że środek ciężkości ma współrzędne $S_{ABCD} = \left(\frac{13}{6}, \frac{10}{3}\right)$ czyli odległość od osi obrotu do środka ciężkości wynosi $\frac{13}{6} \approx 2{,}1(6)$.

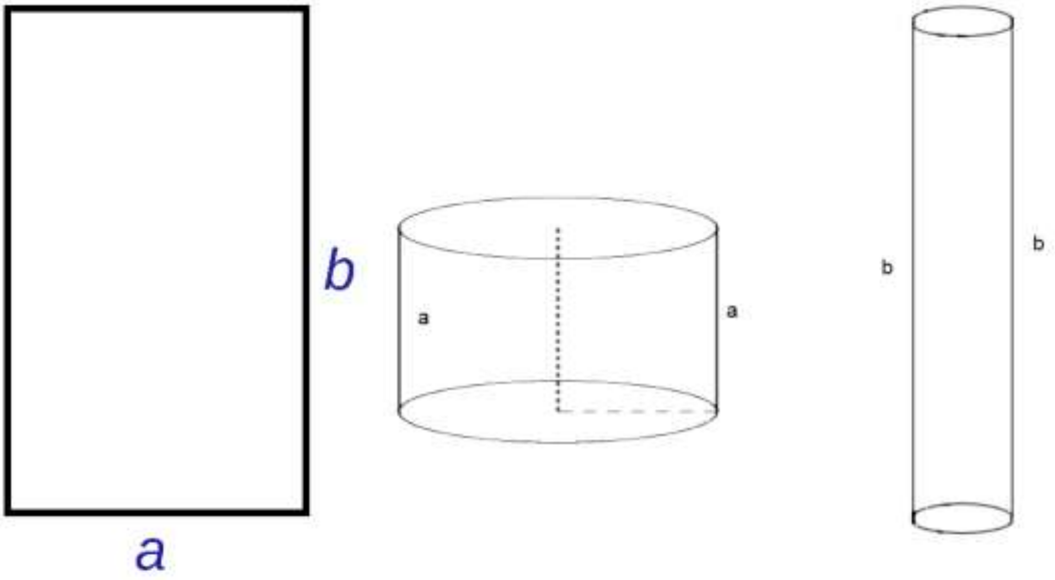
Dokładnie taką samą wartość otrzymaliśmy stosując I regułę Guldina.

Przy drugiej regule wyniki różniły sie zaledwie o 0,069.

Dochodzimy do wniosku, że I reguła okazała się dokładniejsza od drugiej. Tzn, z jej pomocą wyznaczymy dokładną odległość od osi obrotu do środka ciężkości.

Skoro te reguły w jakimś stopniu ułatwiają nam pewne obliczenia, nasuwa się nam pytanie czy zawsze możemy stosować te reguły? Otóż rozważmy w tym celu pewien problem porównujący objętości dwóch walców. Mamy dany arkusz kartki papieru o bokach a i b, którą zwijamy na dwa sposoby, tak aby za każdym razem uzyskać powierzchnię walca. W jednym przypadku będzie to szeroki walec o małej wysokości a w drugim przypadku będzie to wąski walec o dużej wysokości. Jakich wymiarów powinna być kartka papieru, aby walec pierwszy lub drugi miał większą objętość?

Obliczmy objętość obu powstałych walców:



Na pierwszy rzut oka wydaje się nam, że ten szerszy walec ma większą objętość, ale gdy kartka z której zwijamy walce zbliżona jest swym kształtem do kwadratu, wówczas trudno rozstrzygnąć, który z walców ma większą objętość.

a,b - wymiary kartki papieru

Objętość walca wynosi:

$$V = Pole_{\ podstawy} \cdot wysokość$$

W przypadku szerszego walca wysokością będzie bok a, a promień koła wyraża równanie :

$$b = 2\pi r$$

$$r = \frac{b}{2\pi}$$

- Objętość szerszego walca wynosi:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \cdot a = \frac{b^2 a}{4\pi} = b \cdot \frac{ab}{4\pi}$$

- Natomiast pole wąskiego walca wynosi:

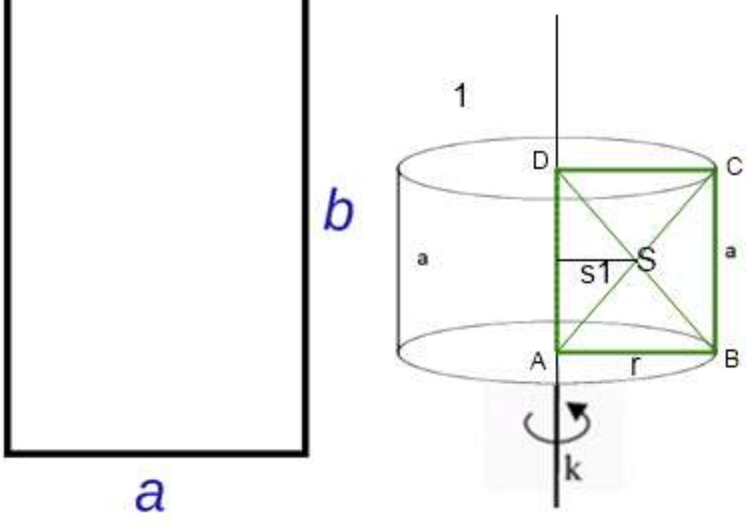
$$V = \pi \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot b = \frac{a^2 b}{4\pi} = a \cdot \frac{ab}{4\pi}$$

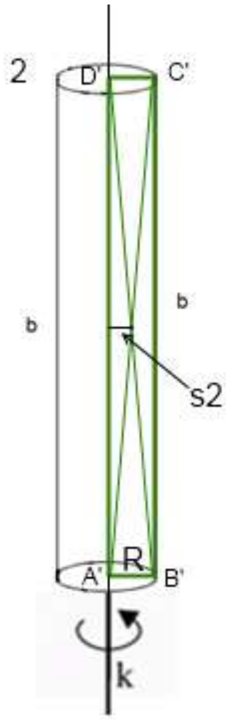
Dla obu rozwiązań pojawia się ten sam współczynnik jakim jest: $\frac{ab}{4\pi}$

Zatem: ten walec ma większą objętość, którego wysokość (wcześniej bok kartki papieru) (a lub b) jest większa. W tym przypadku a>b, więc walec o wysokości a ma większą objętość.

Sprawdźmy teraz czy uda nam się rozwiązać ten problem regułą Guldina:

Dokonajmy pewnej analizy powstałych walców:





$b = 2\pi r,\ a = 2\pi R$

$r = \frac{b}{2\pi}$ - promień koła będącego podstawą szerokiego walca

$R = \frac{a}{2\pi}$ - promień koła będącego podstawą wąskiego walca

$s1 = \frac{b}{4\pi}$, $s2 = \frac{a}{4\pi}$

Obliczamy objętość szerokiego i wąskiego walca regułą Guldina:

$$V_1 = Pole_{prosto\ ABCD} \cdot Obwód_{koło\ o\ prom\ s1}$$

$$V_1 = \frac{b}{2\pi} \cdot a \cdot \frac{b}{4\pi} \cdot 2\pi$$

$$V_1 = \frac{b^2 a}{4\pi}$$

$$V_1 = b \cdot \frac{ab}{4\pi}$$

$$V_2 = Pole_{prosto\ A'B'C'D'} \cdot Obwód_{koło\ o\ prom\ s2}$$

$$V_2 = \frac{a}{2\pi} \cdot b \cdot \frac{a}{4\pi} \cdot 2\pi$$

$$V_2 = \frac{a^2 b}{4\pi}$$

$$V_2 = a \cdot \frac{ab}{4\pi}$$

Okazało się, że podczas obliczania objętości otrzymanych walców regułą Guldina również otrzymaliśmy wszędzie ten sam współczynnik $\frac{ab}{4\pi}$ przez długość lub szerokość kartki papieru. Wynika z tego to, że ta reguła nadaje się do rozwiązania tego problemu.

Środek ciężkości (środek masy, barycentrum) pojawia się także w astronomii.

Położenie barycentrum dwóch ciał możemy obliczyć ze wzoru:

$$S = \frac{d \cdot m_1}{m_1 + m_2}$$

Gdzie:
S - odległość ciała 1 od barycentrum
d - odległości między środkami ciał
m_1,m_2 - masy ciał

Dla przykładu obliczmy środek masy układu Ziemia-Słońce oraz Ziemia księżyc.

Potrzebne dane:

$$Masa_{ziemii} \approx 6 \cdot 10^{24} kg$$

$$Masa_{słońca} \approx 2 \cdot 10^{30} kg$$

$$Masa_{księżyca} \approx 7{,}35 \cdot 10^{22} kg$$

$$Odległość_{ziemia-księżyc} \approx 384\,403 \text{ km}$$

$$Odległość_{ziemia-słońce} \approx 1{,}5 \cdot 10^{8} km$$

Dla układu ziemia słońce:

$$S_{zs} = \frac{d_{zs} \cdot M_s}{M_s + M_z} = \frac{1{,}5 \cdot 10^8 km \cdot 2 \cdot 10^{30} kg}{6 \cdot 10^{24} kg + 2 \cdot 10^{30} kg} = \frac{3 \cdot 10^{38} km}{2{,}000006 \cdot 10^{30}} \approx 149999550 km$$

Dla układu ziemia księżyc:

$$S_{zk} = \frac{d_{zk} \cdot M_k}{M_k + M_z} = \frac{384403 km \cdot\ 7{,}35 \cdot 10^{22} kg}{6 \cdot 10^{24} kg +\ 7{,}35 \cdot 10^{22} kg} = \frac{2825362{,}0{,}5 \cdot 10^{22} km}{6{,}0735 \cdot 10^{24}} =$$

$$= 465195{,}0358 \cdot 10^{-2} km \approx 4651 km$$

Środek masy dla układu ziemia słońce znajduje się w odległości około $149999550 km$ od środka ziemi natomiast środek masy dla układu ziemia-księżyc znajduje się w odległości około 4651km od środka ziemi.

Na koniec pokażę zdjęcie z moim doświadczeniem ze środkiem ciężkości.

Od razu wspomnę, że nikt nie chciał uwierzyć dopóki nie zobaczył na własne oczy.

Niesamowite...