

Joanna Szczepańska, *Liczby jajeczne*

Szkoła Podstawowa nr 119
im. Janiny Porazińskiej
w Krakowie
ul. Czerwieńskiego 1
31-319 Kraków

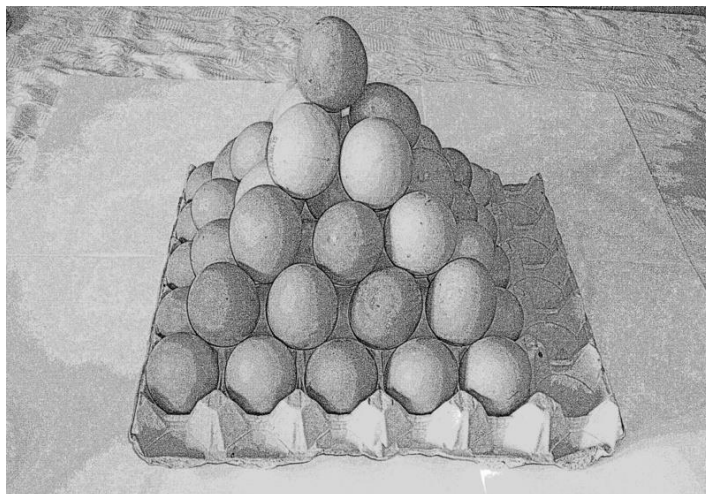
Liczby jajeczne

Joanna Szczepańska
uczennica klasy 6 B

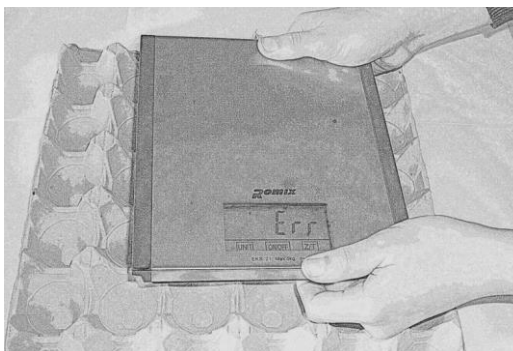
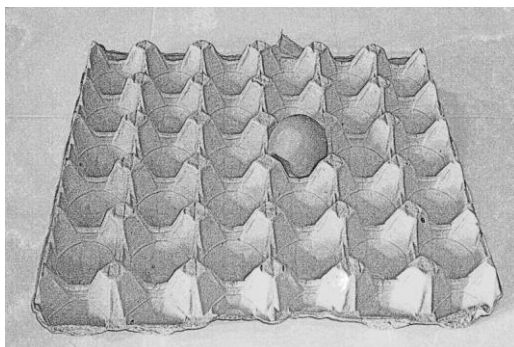
Praca nadesłana na konkurs prac matematycznych organizowany przez
Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Przyjaciół
Nauk i Sztuk w Krakowie
w roku 2015

1. Wstęp.

W czasie sobotnich zakupów na Placu Imbramowskim zauważyłam, że sprzedawcy układają jajka w piramidy.



Zastanawiałam się jakie można skonstruować piramidy z jaj i czy z każdej ilości jajek da się skonstruować piramidę. W domu postanowiłam zbudować piramidy o różnych podstawach i wielkościach, a potem, kiedy zabrakło mi już jajek zaczęłam liczyć z ilu warstw można by stworzyć te budowle. Na początek sprawdziłam, że jajka są bardzo wytrzymałe. Wywierałam na pojedyncze jajko nacisk za pomocą wagi kuchennej siłą odpowiadającą naciskowi około 5 kilogramów.

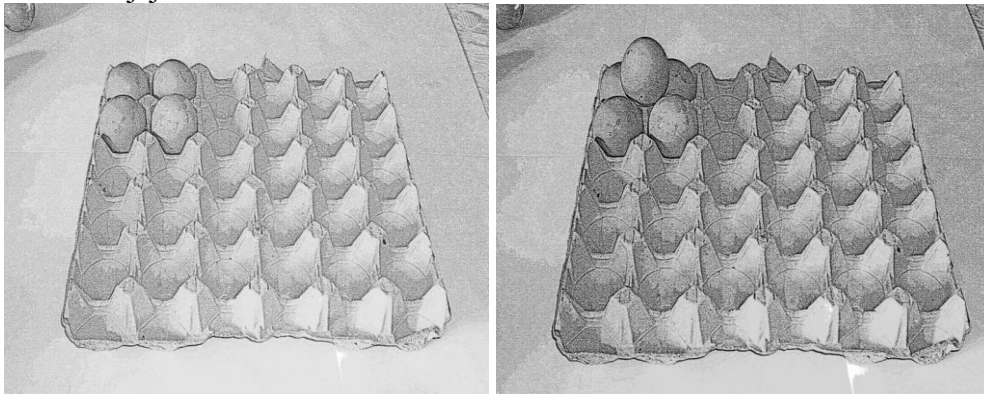


Jajko nie pękło. Zaczęłam więc konstruować piramidy.

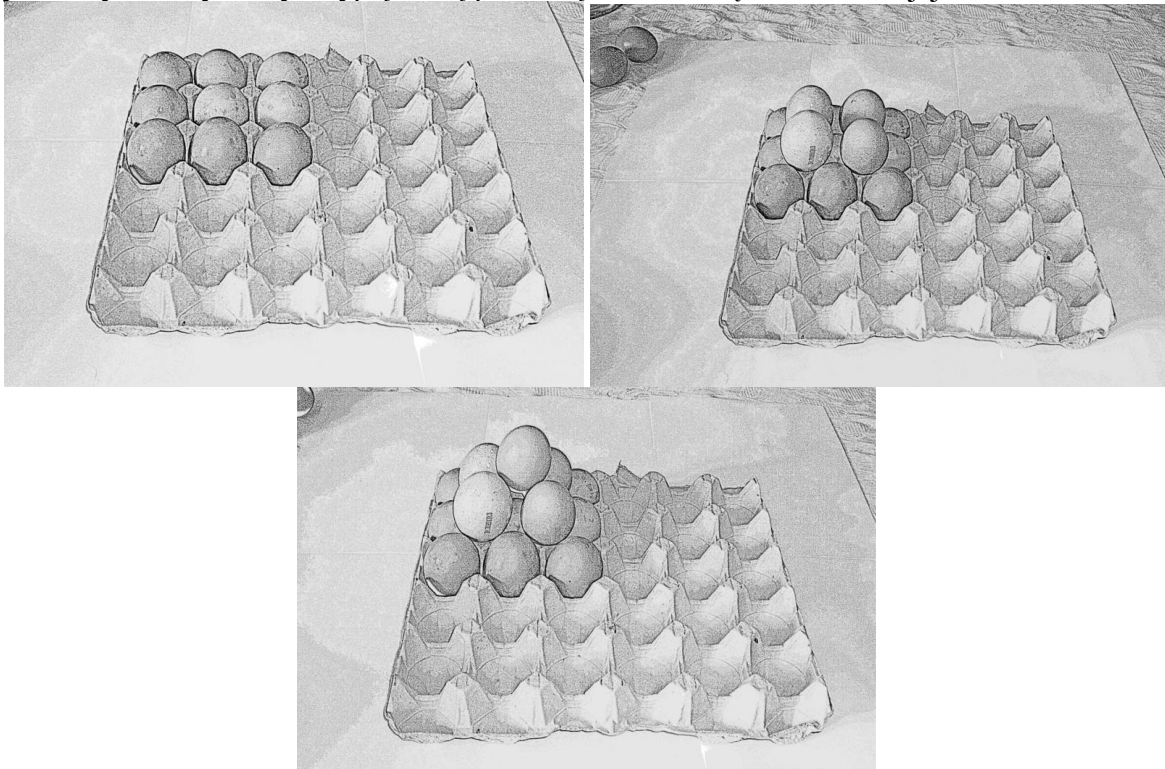
2. Piramidy o podstawie kwadratowej.

Zastanówmy się jak wysoką piramidę możemy skonstruować, mając do dyspozycji daną liczbę jajek. Określmy najpierw czym jest piramida. *Piramidą* nazywamy każdą budowlę, której podstawą jest prostokąt ułożony z jajek, która ma co najmniej dwie warstwy i każda warstwa jest całkowicie wypełniona. Warto zauważyć, że każde jajko z wyższej warstwy jest

podpierane przez cztery jajka poniżej. Z wyjątkiem podstawy, która jest ułożona na papierowym wkładzie do jajek.



Należy zauważyć, że jajko w warstwie niższej może być podporą dla więcej niż jednego jaja w warstwie wyższej. Maksymalnie dla czterech jajek. Zacznę moje rozważania od piramid o podstawie kwadratowej. Zastanówmy się, jaka jest najmniejsza liczba jaj, którą potrzebujemy, aby zbudować piramidę. Łatwo zauważyć, że tą liczbą jest pięć. Wtedy w dolnej warstwie mamy cztery jajka, a w górnej - jedno. To teraz zbudujemy piramidę o podstawie, w której jest dziewięć jaj. Na niej kładziemy naszą poprzednią piramidę złożoną z pięciu jaj. Tym samym otrzymamy trzypiętrową piramidę zbudowaną z czternastu jajek.



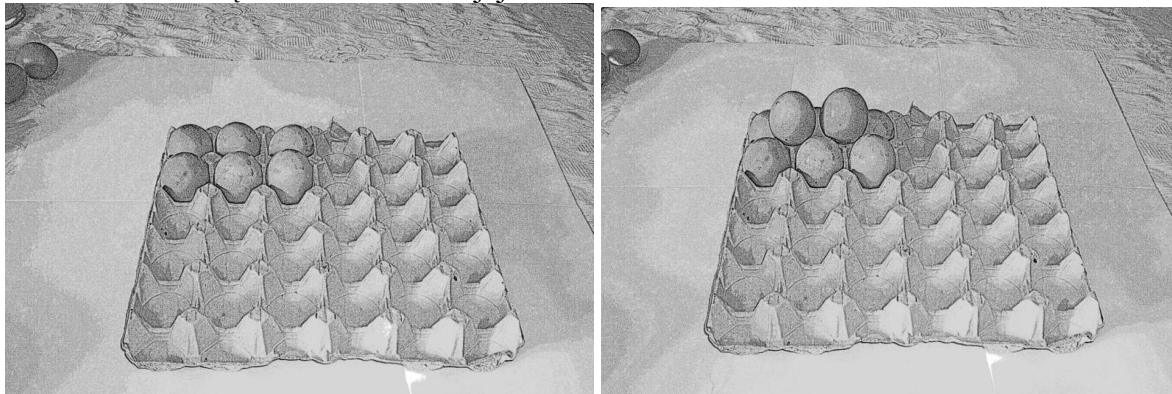
Zbudujmy kolejną piramidę o podstawie z szesnastu jajek, na której ustawiamy poprzednio opisaną trzypiętrową piramidę. Sumujemy liczbę jaj w podstawie z liczbą jaj, z której zbudowana jest piramida trzypiętrowa:

$$16 + (9 + 4 + 1) = 30.$$

Stąd mamy, że piramida czteropiętrowa o kwadratowej podstawie zbudowana jest z trzydziestu jaj. Analogicznie możemy skonstruować kolejne piramidy, w których podstawach mam: 25, 36, 49 itd. jaj. Szczepan Jeleński w [1], str. 102-103, liczby, z których da się zbudować pełne piramidy o podstawie kwadratowej, nazywa *liczbami piramidalnymi kwadratowymi*. Takimi liczbami są: 5, 14, 30, 55, ...

3. Piramidy o podstawie prostokątnej.

Zauważmy, że piramidy o podstawie kwadratowej nie są jedynym typem piramidy, które da się zbudować. Możemy zbudować piramidę, w której podstawie liczba kolumn i rzędów nie będzie równa. Rozpatrzmy przykład, w którym liczba kolumn jest o jeden większa od liczby rzędów. Zatem najmniejsza piramida dwupiętrowa o podstawie prostokątnej, która nie jest kwadratem, będzie miała w podstawie sześć jaj, a w drugiej warstwie – dwa jajka, czyli ta piramida składa się w sumie z ośmiu jaj.



Widzimy, że na czubku mamy dwa jaja, więc nie możemy ustawić ich więcej. Kolejne piramidy będziemy budować tak samo jak piramidy kwadratowe.

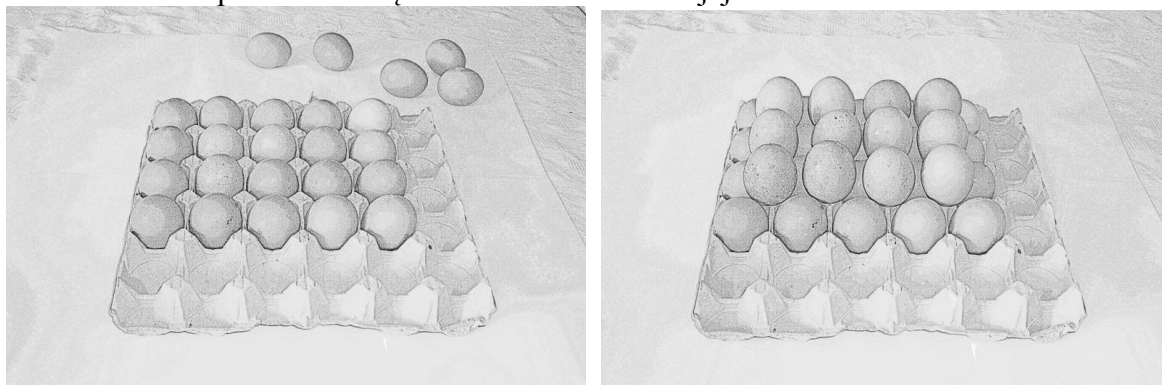
Zauważmy, że piramida trzypiętrowa o podstawie złożonej z jajek ułożonych w trzech rzędach po cztery jajka będzie miała w podstawie dwanaście jaj. Na niej położymy warstwę złożoną z sześciu jaj a na samej górze zmieszczą się tylko dwa jaja. Stąd piramida trzypiętrowa zbudowana jest z dwudziestu jaj:

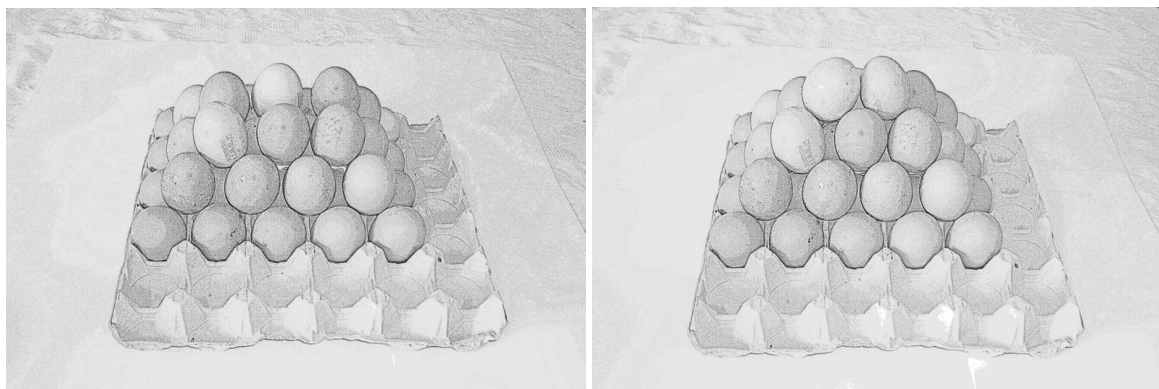
$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 20.$$

Podobnie będziemy budować piramidę czteropiętrową o podstawie złożonej z dwudziestu jajek ułożonych w czterech rzędach po pięć jaj:

$$4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 40$$

Piramida czteropiętrowa będzie miała w sumie 40 jaj.





Pięciopiętrowa piramida będzie miała w podstawie trzydzieści jaj ułożonych w pięciu rzędach po sześć jajek i zbudowana będzie w sumie z siedemdziesięciu jaj:

$$5 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 70.$$

Warto zauważyć, że kolejna wyższa piramida powstaje tak, że układamy większą podstawę i stawiamy na niej poprzednią piramidę:

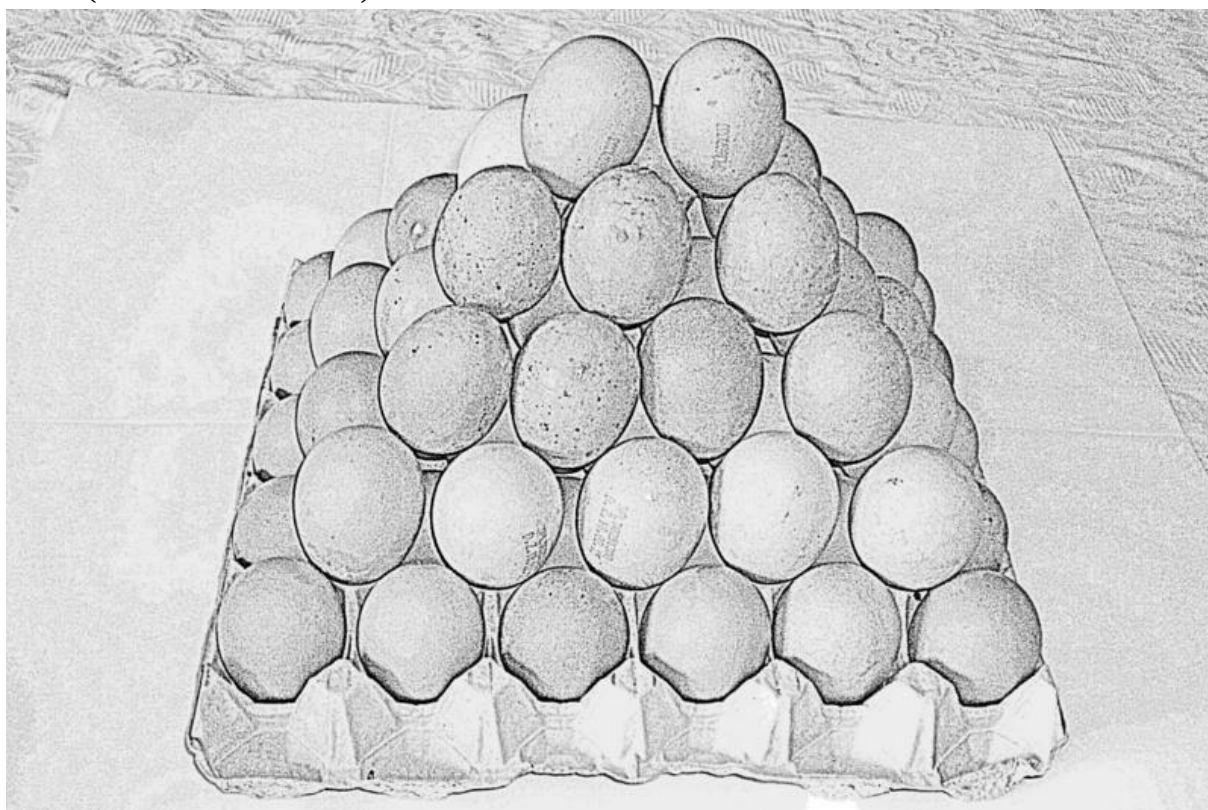
$$1 \cdot 2 = 2,$$

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8,$$

$$3 \cdot 4 + (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) = 20,$$

$$4 \cdot 5 + (3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) = 40,$$

$$5 \cdot 6 + (4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) = 70 \text{ itd.}$$



Piramida pięciowarstwowa ułożona z siedemdziesięciu jaj na podstawie o wymiarach pięć na sześć.

4. Czy z każdej liczby jajek da się zbudować piramidę?

Zauważmy, że jeśli weźmiemy siedem jaj i zaczniemy budować piramidę dwupiętrową, która w podstawie będzie mieć sześć jaj, to w górnej warstwie położymy jedno jajko, które nam zostało. Widzimy, że zostało nam jeszcze jedno wolne miejsce, w którym moglibyśmy

położyć jajko. Taka sama sytuacja będzie miała miejsce, gdy weźmiemy dziewiętnaście jaj i zaczniemy budować piramidę trzypoziomową, w której podstawie jest dwanaście jaj.

Uwaga. Nie z każdej liczby jajek można zrobić piramidę, nawet jeśli jest to piramida ścięta.

Piramidy (pełne lub ścięte) o podstawach kwadratowych wymieniam w tej tabeli:

podstawa	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw	7 warstw	8 warstw	9 warstw	10 warstw
1 na 1	1									
2 na 2	4	5								
3 na 3	9	13	14							
4 na 4	16	25	29	30						
5 na 5	25	41	50	54	55					
6 na 6	36	61	77	86	90	91				
7 na 7	49	85	110	126	135	139	140			
8 na 8	64	113	149	174	190	199	203	204		
9 na 9	81	145	194	230	255	271	280	284	285	
10 na 10	100	181	245	294	330	355	371	380	384	385

Na przykład piramidę ściętą z 77 jajek możemy zbudować następująco:

$$6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 77.$$

Można zbudować pięć piramid pełnych o podstawach kwadratowych, mając 5, 14, 30, 55, 91 jajek. Można też zbudować jedenaście piramid ściętych z co najwyżej stu jajek, układając 13, 25, 29, 41, 50, 54, 61, 77, 85, 86, 90 jajek.

Piramidy (pełne lub ścięte) o podstawach prostokątnych:

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o jedno jajko więcej niż wynosi liczba rzędów.

podstawa	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw	7 warstw	8 warstw	9 warstw	10 warstw
1 na 2	2									
2 na 3	6	8								
3 na 4	12	18	20							
4 na 5	20	32	38	40						
5 na 6	30	50	62	68	70					
6 na 7	42	72	92	104	110	112				
7 na 8	56	98	128	148	160	166	168			
8 na 9	72	128	170	200	220	232	238	240		
9 na 10	90	162	218	260	290	310	322	328	330	
10 na 11	110	200	272	328	370	400	420	432	438	440

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować cztery piramidy pełne, biorąc 8, 20, 40 lub 70 jajek. Można też skonstruować dziewięć piramid ściętych, biorąc 18, 32, 38, 50, 62, 68, 72, 92, 98 jajek.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dwa jajka więcej niż wynosi liczba rzędów.

podstawa	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw	7 warstw	8 warstw	9 warstw	10 warstw
1 na 3	3									
2 na 4	8	11								
3 na 5	15	23	26							
4 na 6	24	39	47	50						
5 na 7	35	59	74	82	85					
6 na 8	48	83	107	122	130	133				
7 na 9	63	111	146	170	185	193	196			
8 na 10	80	143	191	226	250	265	273	276		
9 na 11	99	179	242	290	325	349	364	372	375	
11 na 12	120	219	299	362	410	445	469	484	492	495

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować cztery piramidy pełne, biorąc 11, 26, 50 lub 85 jajek. Można też skonstruować siedem piramid ściętych, biorąc 23, 39, 47, 59, 74, 82, 83 jajka.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o trzy jajka więcej niż wynosi liczba rzędów.

podstawa	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw	7 warstw	8 warstw	9 warstw
1 na 4	4								
2 na 5	10	14							
3 na 6	18	28	32						
4 na 7	28	46	56	60					
5 na 8	40	68	86	96	100				
6 na 9	54	94	122	140	150	154			
7 na 10	70	124	164	192	210	220	224		
8 na 11	88	158	212	252	280	298	308	312	
9 na 12	108	196	266	320	360	388	406	416	420

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować cztery piramidy pełne, biorąc 14, 32, 60 lub 100 jajek. Można też skonstruować siedem piramid ściętych, biorąc 28, 46, 56, 68, 86, 94, 96 jajek.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o cztery jajka więcej niż wynosi liczba rzędów.

podstawa	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw	7 warstw	8 warstw	9 warstw
1 na 5	5								
2 na 6	12	17							
3 na 7	21	33	38						

4 na 8	32	53	65	70					
5 na 9	45	77	98	110	115				
6 na 10	60	105	137	158	170	175			
7 na 11	77	137	182	214	235	247	252		
8 na 12	96	173	233	278	310	331	343	348	
9 na 13	117	213	290	350	395	427	448	460	465

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować trzy piramidy pełne, biorąc 17, 38 lub 70 jajek. Można też skonstruować pięć piramid ściętych, biorąc 33, 53, 65, 77, 98 jajek.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o pięć jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw	7 warstw	8 warstw
podstawa								
1 na 6	6							
2 na 7	14	20						
3 na 8	24	38	44					
4 na 9	36	60	74	80				
5 na 10	50	86	110	124	130			
6 na 11	66	116	152	176	190	196		
7 na 12	84	150	200	236	260	274	280	
8 na 13	104	188	254	304	340	364	378	384

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować trzy piramidy pełne, biorąc 20, 44 lub 80 jajek. Można też skonstruować cztery piramidy ścięte, biorąc 38, 60, 74, 86 jajek.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o sześć jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw	7 warstw	8 warstw
podstawa								
1 na 7	7							
2 na 8	16	23						
3 na 9	27	43	50					
4 na 10	40	67	83	90				
5 na 11	55	95	122	138	145			
6 na 12	72	127	167	194	210	217		
7 na 13	91	163	218	258	285	301	308	
8 na 14	112	203	275	330	370	397	413	420

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować trzy piramidy pełne, biorąc 23, 50 lub 90 jajek. Można też skonstruować cztery piramidy ścięte, biorąc 43, 67, 83, 95 jajek.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o siedem jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

podstawa	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw	7 warstw	8 warstw
1 na 8	8							
2 na 9	18	26						
3 na 10	30	48	56					
4 na 11	44	74	92	100				
5 na 12	60	104	134	152	160			
6 na 13	78	138	182	212	230	238		
7 na 14	98	176	236	280	310	328	336	
8 na 15	120	218	296	356	400	430	448	456

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować trzy piramidy pełne, biorąc 26, 56 lub 100 jajek. Można też skonstruować trzy piramidy ścięte, biorąc 48, 74, 92 jajka.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o osiem jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

podstawa	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw	7 warstw
1 na 9	9						
2 na 10	20	29					
3 na 11	33	53	62				
4 na 12	48	81	101	110			
5 na 13	65	113	146	166	175		
6 na 14	84	149	197	230	250	259	
7 na 15	105	189	254	302	335	355	364

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować dwie piramidy pełne, biorąc 29 lub 62 jajka. Można też skonstruować dwie piramidy ścięte, biorąc 53, 81 jajek.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dziewięć jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

podstawa	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw	7 warstw
1 na 10	10						
2 na 11	22	32					
3 na 12	36	58	68				
4 na 13	52	88	110	120			
5 na 14	70	122	158	180	190		
6 na 15	90	160	212	248	270	280	
7 na 16	112	202	272	324	360	382	392

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować dwie piramidy pełne, biorąc 32 lub 68 jajek. Można też skonstruować dwie piramidy ścięte, biorąc 58, 88 jajek.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dziesięć jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw	7 warstw
podstawa							
1 na 11	11						
2 na 12	24	35					
3 na 13	39	63	74				
4 na 14	56	95	119	130			
5 na 15	75	131	170	194	205		
6 na 16	96	171	227	266	290	301	
7 na 17	119	215	290	346	385	409	420

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować dwie piramidy pełne, biorąc 35 lub 74 jajka. Można też skonstruować dwie piramidy ścięte, biorąc 63, 95 jajek.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o jedenaście jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw
podstawa						
1 na 12	12					
2 na 13	26	38				
3 na 14	42	68	80			
4 na 15	60	102	128	140		
6 na 16	80	140	182	208	220	
7 na 17	102	182	242	284	310	322

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować dwie piramidy pełne, biorąc 38 lub 80 jajek. Można też skonstruować jedną piramidę ściętą, biorąc 68 jajek.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dwanaście jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw
podstawa						
1 na 13	13					
2 na 14	28	41				
3 na 15	45	73	86			
4 na 16	64	109	137	150		
5 na 17	85	149	194	222	235	
6 na 18	108	193	257	302	330	343

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować dwie piramidy pełne, biorąc 41 lub 86 jajek. Można też skonstruować jedną piramidę ściętą, biorąc 73 jajka.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o trzynaście jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw
podstawa						
1 na 14	14					
2 na 15	30	44				
3 na 16	48	78	92			
4 na 17	68	116	146	160		
5 na 18	90	158	206	236	250	
6 na 19	114	204	272	320	350	364

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować dwie piramidy pełne, biorąc 44 lub 92 jajka. Można też skonstruować jedną piramidę ściętą, biorąc 78 jajek.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o czternaście jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw	6 warstw
podstawa						
1 na 15	15					
2 na 16	32	47				
3 na 17	51	83	98			
4 na 18	72	123	155	170		
5 na 19	95	167	218	250	265	
6 na 20	120	215	287	338	370	385

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować dwie piramidy pełne, biorąc 47 lub 98 jajek. Można też skonstruować jedną piramidę ściętą, biorąc 83 jajka.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o piętnaście jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy	4 warstwy	5 warstw
podstawa					
1 na 16	16				
2 na 17	34	50			
3 na 18	54	88	104		
4 na 19	76	130	164	180	
5 na 20	100	176	230	264	280

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 50 jajek. Można też skonstruować jedną piramidę ściętą, biorąc 88 jajek.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o szesnaście jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			

1 na 17	17		
2 na 18	36	53	
3 na 19	57	93	110
4 na 20	80	137	173
5 na 21	105	185	242

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 53 jajka. Można też skonstruować jedną piramidę ściętą, biorąc 93 jajka.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o siedemnaście jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 18	18		
2 na 19	38	56	
3 na 20	60	98	116
4 na 21	84	144	182
5 na 22	110	194	254

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 56 jajek. Można też skonstruować jedną piramidę ściętą, biorąc 98 jajek.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o osiemnaście jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 19	19		
2 na 20	40	59	
3 na 21	63	103	122
4 na 22	88	151	191
5 na 23	115	203	266

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 59 jajek. Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dziewiętnaście jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 20	20		
2 na 21	42	62	
3 na 22	66	108	128
4 na 23	92	158	200
5 na 24	120	212	278

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 62 jajka. Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dwadzieścia jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 21	21		
2 na 22	44	65	
3 na 23	69	113	134
4 na 24	96	165	209

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 65 jajek. Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dwadzieścia jeden jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 22	22		
2 na 23	46	68	
3 na 24	72	118	140
4 na 25	100	172	218

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 68 jajek. Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dwadzieścia dwa jajka więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 23	23		
2 na 24	48	71	
3 na 25	75	123	146

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 71 jajek. Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dwadzieścia trzy jajka więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 24	24		
2 na 25	50	74	

3 na 26	78	128	152
---------	----	-----	-----

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 74 jajka. Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dwadzieścia cztery jajka więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 25	25		
2 na 26	52	77	
3 na 27	81	133	158

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 77 jajek. Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dwadzieścia pięć jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 26	26		
2 na 27	54	80	
3 na 28	84	138	164

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 80 jajek. Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dwadzieścia sześć jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 27	27		
2 na 28	56	83	
3 na 29	87	143	170

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 83 jajka. Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dwadzieścia siedem jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 28	28		
2 na 29	58	86	
3 na 30	90	148	176

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 86 jajek.
Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dwadzieścia osiem jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 29	29		
2 na 30	60	89	
3 na 31	93	153	182

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 89 jajek.
Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o dwadzieścia dziewięć jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 30	30		
2 na 31	62	92	
3 na 32	96	158	188

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 92 jajka.
Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o trzydzieści jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 31	31		
2 na 32	64	95	
3 na 33	99	163	194

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 95 jajek.
Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o trzydzieści jeden jajek więcej niż wynosi liczba rzędów.

	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
podstawa			
1 na 32	32		
2 na 33	66	98	
4 na 34	102	168	200

Mając co najwyżej sto jajek można zbudować jedną piramidę pełną, biorąc 98 jajek. Nie można skonstruować żadnej piramidy ściętej.

Rozważmy teraz piramidy o podstawach prostokątnych takich, że w każdym rzędku jest o trzydzieści dwa jajka więcej niż wynosi liczba rzędów.

podstawa	1 warstwa	2 warstwy	3 warstwy
1 na 33	33		
2 na 34	68	101	

Mając co najwyżej sto jajek nie można zbudować piramidy pełnej (zabraknie jednego jajka). Nie można też zbudować piramidy ściętej.

W ten sposób rozważyłam wszystkie możliwe piramidy pełne lub ścięte o podstawach prostokątnych zbudowane z co najwyżej stu jajek.

W kolejnej tabeli zanotuję, na ile sposobów można zbudować piramidę z określonej liczby jajek, mając co najwyżej 100 jajek:

ile jajek	ile sposobów	w 2 warstwach	w 3 warstwach	w 4 warstwach	w 5 warstwach	w 6 warstwach	w 7 warstwach	w 8 warstwach	w 9 warstwach	w 10 warstwach
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
14	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
18	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0

24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
26	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
29	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
30	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
33	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	4	2	2	0	0	0	0	0	0	0
39	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
40	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
41	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
44	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
46	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
47	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
48	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	5	2	2	1	0	0	0	0	0	0
51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
53	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0
54	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
55	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
56	3	1	2	0	0	0	0	0	0	0
57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
58	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
59	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
60	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
61	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
62	3	1	2	0	0	0	0	0	0	0
63	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
65	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
67	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
68	5	3	1	1	0	0	0	0	0	0

69	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
70	2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
71	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
72	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
73	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
74	5	2	3	0	0	0	0	0	0	0
75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
77	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
78	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
79	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
80	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0
81	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
82	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
83	4	3	1	0	0	0	0	0	0	0
84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
85	2	1	0	0	1	0	0	0	0	0
86	5	2	2	1	0	0	0	0	0	0
87	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
88	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
89	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
90	2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
91	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
92	4	1	3	0	0	0	0	0	0	0
93	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
94	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
95	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0
96	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
97	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
98	5	3	2	0	0	0	0	0	0	0
99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
ile jajek	ile sposobów	w 2 warstwach	w 3 warstwach	w 4 warstwach	w 5 warstwach	w 6 warstwach	w 7 warstwach	w 8 warstwach	w 9 warstwach	w 10 warstwach

Wnioski. Nie da się zbudować piramidy o podstawie prostokątnej (ani pełnej, ani ściętej), jeśli mamy: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 16, 19, 21, 22, 24, 27, 31, 34, 36, 37, 42, 45, 49, 51, 52, 57, 64, 66, 69, 75, 76, 79, 84, 87, 97, 99 jajek.

Da się zbudować piramidę tylko na jeden sposób, gdy jajek jest: 5, 8, 11, 13, 17, 18, 25, 28, 30, 33, 35, 39, 40, 43, 46, 48, 54, 55, 58, 61, 63, 67, 71, 72, 73, 78, 81, 82, 89, 91, 93, 94, 96.

Dwie różne piramidy można zbudować z 14, 20, 23, 26, 29, 41, 44, 47, 59, 60, 65, 70, 85, 88, 90, 100 jajek.

Po trzy różne piramidy można zbudować z 32, 53, 56, 62, 77, 80, 95 jajek.

Po cztery różne piramidy można zbudować z 38, 83, 92.

Pięć różnych piramid można zbudować, mając 50, 68, 74, 86 i 98 jajek.

Przykład. Mając 50 jajek można zbudować dwie różne piramidy dwuwarstwowe:

$$50 = 5 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \text{ lub } 50 = 2 \cdot 17 + 1 \cdot 16$$

dwie różne piramidy trójwarstwowe:

$$50 = 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \text{ lub } 50 = 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 7$$

jedną piramidę czterowarstwową:

$$50 = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3.$$

Pełne piramidy o podstawach kwadratowych można zbudować, mając: 5, 14, 30, 55, 91 jajek. Szczepan Jeleński w [1], str. 102-103, liczby, z których da się zbudować pełne piramidy o podstawie kwadratowej, nazywa *liczbami piramidalnymi kwadratowymi*.

Pełne piramidy o podstawach prostokątnych nie kwadratowych można zbudować, mając 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 40, 41, 44, 47, 50, 56, 60, 62, 68, 70, 74, 80, 85, 86, 90, 92, 98, 100.

Naśladując Szczepana Jeleńskiego, nazwijmy liczby jajek, z których da się zbudować pełne piramidy o podstawach prostokątnych (lub kwadratowych) *liczbami jajecznymi*. Jeśli z określonej liczby jajek da się zbudować ściętą piramidę, to liczbę tę nazwiemy *niepełną liczbą jajeczną*.

Podziękowania. Pragnę serdecznie podziękować mojej Siostrze Ani za pomoc w przyniesieniu 50 jajek ze sklepu do domu.

Uwaga. W czasie budowania piramid z jajek tylko jedno z nich ucierpiało.

Literatura

[1] Szczepan Jeleński, *Śladami Pitagorasa*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1995, wydanie dziewiąte