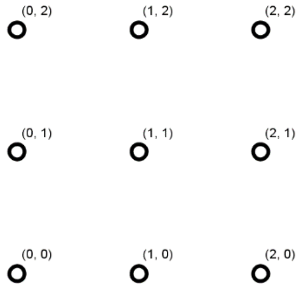
Geometria 9 punktów

Gimnazjum im. Jana Matejki w Zabierzowie
nauczyciel: Anna Ochel

Andrzej Szablewski

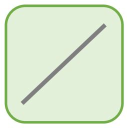
Wstęp

Geometria 9 punktów, czyli płaszczyzna złożona z 9 punktów (3x3) działająca na zasadzie modulo (3) czyli reszty z dzielenia przez 3. Geometria 9 punktów zainteresowała mnie z prostego powodu – jest to coś niecodziennego. O płaszczyznach skończonych dowiedziałem się na wykładach prowadzonych u mnie w szkole przez Pana Tomasza Szemberga. Tematem wykładów były właśnie płaszczyzny skończone, „działające” na tej samej zasadzie, lecz składające się z większych ilości punktów. Płaszczyznę składającą się z dziewięciu punktów ilustruje poniższy rysunek.

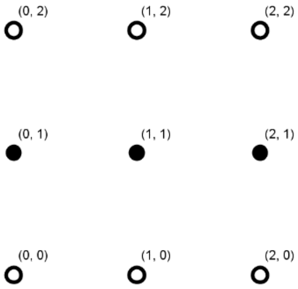


Rys. 1

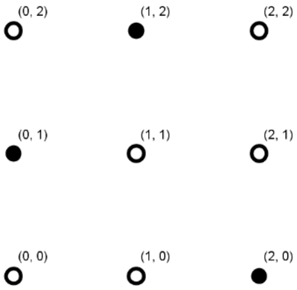
Proste



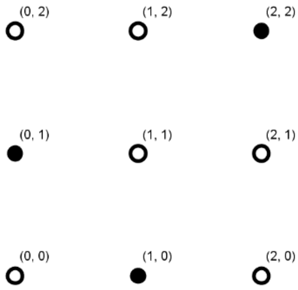
Jak na każdej płaszczyźnie, także na tej możemy wyróżnić pewne figury. Zaczniemy od najprostszych figur, czyli prostych. Wszystkie punkty w jednej linii pionowej lub poziomej mają jedną, taką samą współrzędną. Można wyróżnić też trójki punktów, które nie mają ani jednej wspólnej współrzędnej. Punkty z jedną wspólną cechą leżące na jednej linii tworzą 3-elementowy zbiór, który nazwiemy zbiorem punktów pierwszego typu, natomiast każde trzy punkty nie miejące ze sobą ani jednej wspólnej współrzędnej zaliczymy do również 3-elementowego zbioru punktów drugiego typu. Przykładem zbioru punktów pierwszego typu jest {(1,2); (1,1); (1,0)}. Przykładem zbioru punktów drugiego typu będzie zbiór {(0,0);(1,1);(2,2)}. Prostą będziemy nazywać zbiór punktów, które są albo pierwszego, albo drugiego rodzaju. Zatem każda prosta na tej płaszczyźnie ma 3 punkty. Poniżej zostały zaprezentowane przykłady prostych.



Zbiór punktów pierwszego typu
Rys. 2

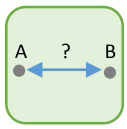


Zbiór punktów drugiego typu
Rys. 3



Zbiór punktów drugiego typu
Rys. 4

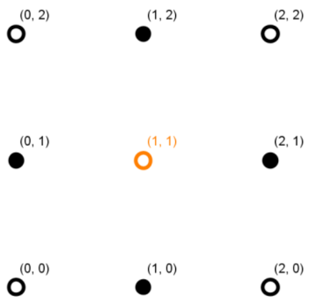
Odległość



Na płaszczyźnie tej, odległości między punktami definiuje się liczbą współrzędnych, którymi się one różnią, czyli gdy mamy podane punkty (0,0) oraz (0,2) to odległość między nimi będzie równa 1. Odległość między (0,0) i (1,1) wyniesie natomiast dwa z powodu tego, że różnią się one obiema współrzędnymi. Dysponując odległością możemy zdefiniować odwołujące się do niej figury.

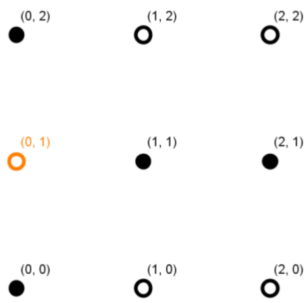
Okrąg

Przykładem takiej figury może być okrąg. By narysować okrąg, musimy się cofnąć do jego definicji, dzięki której możemy go narysować na tradycyjnej płaszczyźnie euklidesowej. „Okrąg jest to zbiór punktów płaszczyzny, których odległości od środka są równe promieniowi okręgu, czyli dowolnej liczbie dodatniej”. Z definicji wynika, że powinniśmy wybrać sobie środek (który nie należy do okręgu), oraz dodatnią długość promienia, czyli odległość jednego punktu od drugiego. Zauważmy, że na tej płaszczyźnie między różnymi punktami może wynieść tylko 1 lub 2. Przykład okręgu obrazuje rysunek 2. Środek okręgu został oznaczony na pomarańczowo (punkt 1,1), natomiast promień ma długość jeden. Punkty oznaczone na czarno przedstawiają wszystkie punkty oddalone od środka o 1, czyli różniące się dokładnie 1 cechą (współrzędną). Na rysunkach zostały zaprezentowane niektóre okręgi.



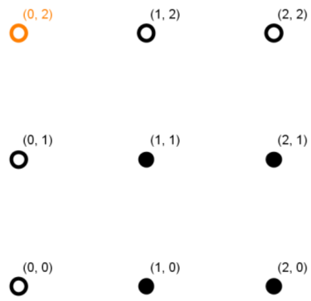
Środek: (1,1) Promień: 1

Rys. 5



Środek: (0,1) Promień: 1

Rys. 6

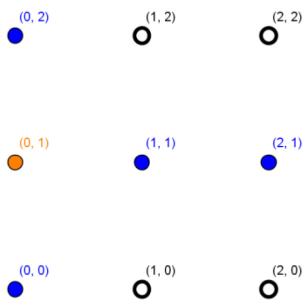


Środek: (0,2) Promień: 2

Rys. 7

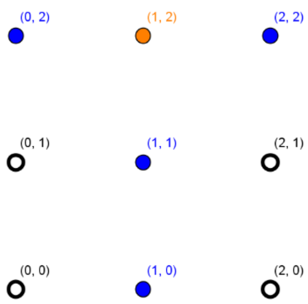
Koło

Będąc już przy okręgu, możemy łatwo przejść do koła. Koło jest to „zbiór **wszystkich** punktów płaszczyzny, których odległość od środka koła, jest mniejsza lub równa długości promienia”. Oczywiście musimy zaliczyć do koła jego środek. Na poniższych rysunkach zobrazowano 3 koła. Kolorem pomarańczowym zaznaczono środek, a niebieskim okrąg, czyli obwód koła. Kolor czarny, oznacza wszystkie punkty należące do koła, jednak niebędące jego obwodem ani środkiem.



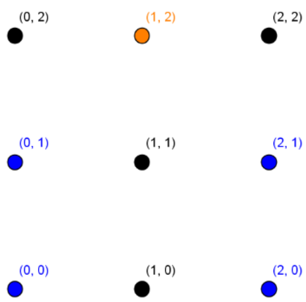
Środek: (0,1) Promień: 1

Rys. 8



Środek: (1,2) Promień: 1

Rys. 9



Środek: (1,2) Promień: 2

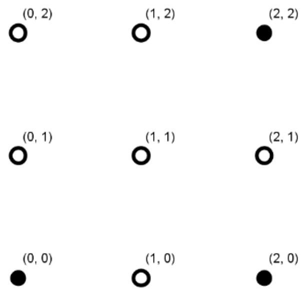
Rys. 10

Trójkąt równoboczny

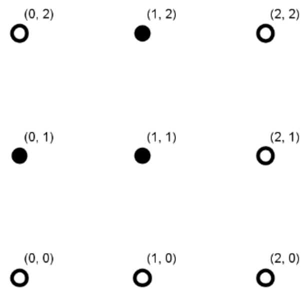
Na płaszczyźnie 9 punktów pojawia się fenomen, z którym nie spotkamy się w geometrii euklidesowej, której się uczymy w gimnazjum. Mianowicie, na jednej prostej leżą trzy punkty, których odległość parami wynosi tyle samo (konkretnie: 1). Tak się nie może zdarzyć w geometrii euklidesowej. Trzy punkty odległe od siebie parami o tyle samo, są wierzchołkami trójkąta równobocznego, czyli punkty te nie mogą być współliniowe. Na płaszczyźnie 9 punktów możemy zatem mówić tylko o „trójkącie równobocznym”. Cudzysłów sygnalizuje, że nie jest to właściwy trójkąt, bo jego „wierzchołki” leżą na jednej prostej. Przykłady „trójkątów równobocznych” wyglądają dokładnie tak samo jak przykłady zbiorów punktów pierwszego lub drugiego typu.

Trójkąt równoramienny

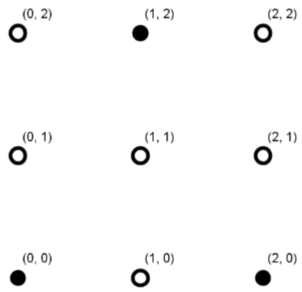
Trójkąt równoramienny musi mieć 2 boki równej długości, więc długości jego boków mogą wynosić tylko: 2,2,1 lub 1,1,2. Poniżej zostały zaprezentowane przykłady.



Długości boków: 1,1,2
Rys. 11



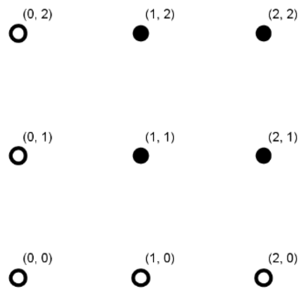
Długości boków: 1,1,2
Rys. 12



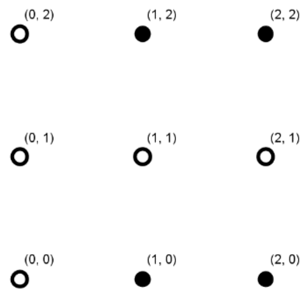
Długości boków: 2,2,1
Rys. 13

Romb

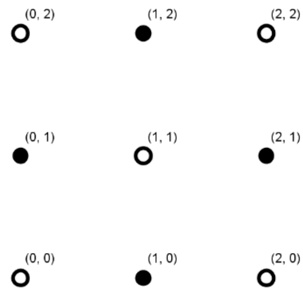
Romb jest czworokątem, więc musi mieć cztery boki. Dodatkowo muszą mieć one jednakową długość. Możliwymi długościami są tylko 1 oraz 2. Poniżej zostały zaprezentowane niektóre romby.



Długości boku: 1
Rys. 14



Długości boku: 1
Rys. 15



Długości boku: 2
Rys. 16

Zakończenie

Po napisaniu opisu do ostatniej figury zdziwiło mnie, że zbiór dziewięciu punktów odpowiednio zinterpretowany może być tak ciekawy. Dziwi mnie to że nawet te dziewięć punktów daje olbrzymie możliwości. Znalazłem i opisałem tylko część figur, a jest ich na pewno o wiele więcej. Na zajęciach w szkole omawialiśmy przecież większe, skończone płaszczyzny, które dają jeszcze większe „pole do manewru”.