„Ach te trójkąty, czyli dwa interesujące twierdzenia i mnóstwo przemyśleń."

Justyna Stefaniak

V Liceum Ogólnokształcące

Spis treści:

1. Twierdzenie Harcourt'a
2. Dowód twierdzenia Harcourt'a
3. Twierdzenie Harcourt'a dla okręgu dopisanego
4. Dowód Twierdzenia Harcourt'a dla okręgu dopisanego
5. Pójdźmy dalej
6. Twierdzenie Van Lamoen'a
7. Dowód Twierdzenia Van Lamoen'a
8. Pójdźmy dalej
9. Bibliografia

Oba twierdzenia nie są spotykane w polskiej literaturze, a wg. mnie zasługują na zainteresowanie. Zaskakują one nas swoją prostotą i ciekawymi wnioskami. Zapraszam do lektury.

1. Twierdzenie Harcourt'a

Twierdzenie stworzone przez J. Harcourt' a, irlandzkiego profesora. Dotyczy ono okręgu wpisanego w trójkąt i prostej stycznej do niego, pokazuje przy tym jak można w inny sposób obliczyć pole trójkąta.

Twierdzenie:

Mamy dany trójkąt ABC o polu P i wpisany w niego okrąg. Oznaczmy przez a_1, b_1, c_1, odległości punktów A, B, C do stycznej do okręgu wpisanego. Wówczas:

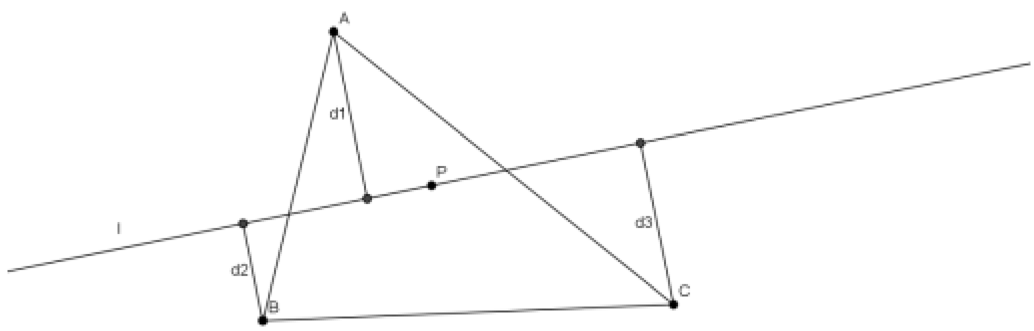
$aa_1 + \ bb_1 + cc_1 = 2P.$

2. Dowód Twierdzenia Harcourt'a

Do przeprowadzenia dowodu skorzystamy z następującego lematu:

Niech l będzie prostą przechodzącą przez punkt P o współrzędnych barycentrycznych (x : y : z). Jeśli odległości A, B, C, od prostej l to odpowiednio d_1, d_2, d_3 to:

$$d_1x + \ d_2y + \ d_3z = 0$$



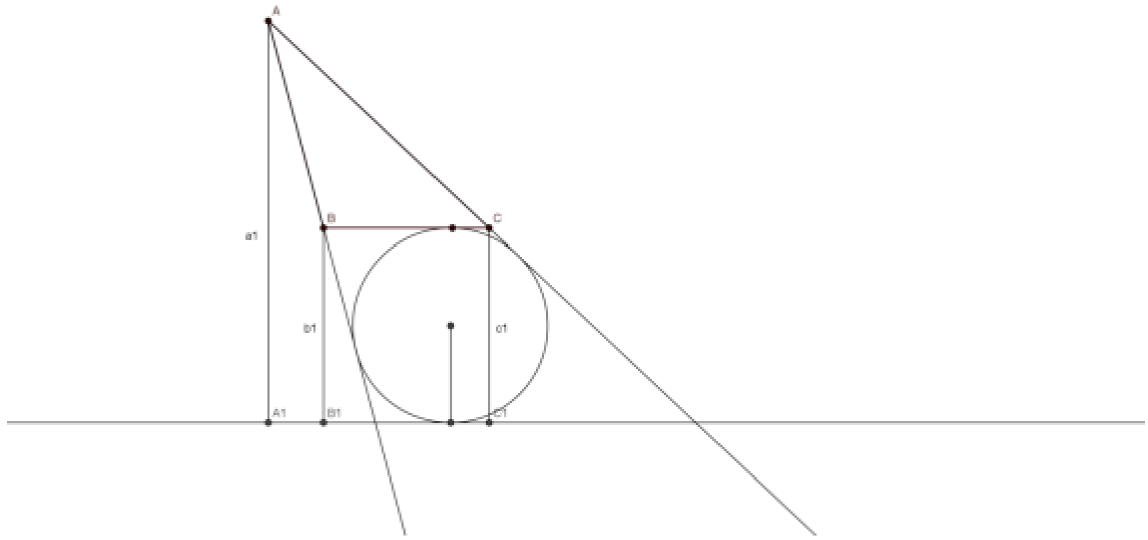
Korzystając z lematu, przyjmujemy dla środka okręgu wpisanego I = (a, b, c) i równoległej do stycznej. Oznaczamy odległość A, B, C od l przez: $d_1 = a_1 - r$, $d_2 = a_2 - r$, $d_3 = a_3 - r$, gdzie a_1, a_2, a_3, są odległościami od stycznej. Wówczas:

$aa_1 + \ bb_1 + cc_1 = a(d_1 + r) + b(d_2 + r) + c(d_3 + r) = \ d_1a + \ d_2b + \ d_3c + r(\ a + b + c) = 2P$

3. Twierdzenie Harcourt'a dla okręgu dopisanego

Twierdzenie:

Weźmy trójkąt ABC o polu P. Jeśli odległość A, B, C od stycznej okręgu dopisanego (do kąta przy wierzchołku A) oznaczymy przez odpowiednio a_1, b_1, c_1, to wówczas: $-aa_1 + bb_1 + cc_1 = 2P$. Analogicznie będzie dla okręgów dopisanych naprzeciw wierzchołków B i C.



4. Dowód Twierdzenia Harcourt'a dla okręgu dopisanego

Korzystamy z wcześniej pokazanego lematu dla środka okręgu dopisanego o współrzędnych barycentrycznych I_a = (-a : b : c) i prostej przechodzącej przez niego. Oznaczmy odległości A, B, C, od prostej przechodzącej przez punkt I_a równoległej do stycznej przez d_1, d_2, d_3, odpowiednio. Z lematu wiemy, że:

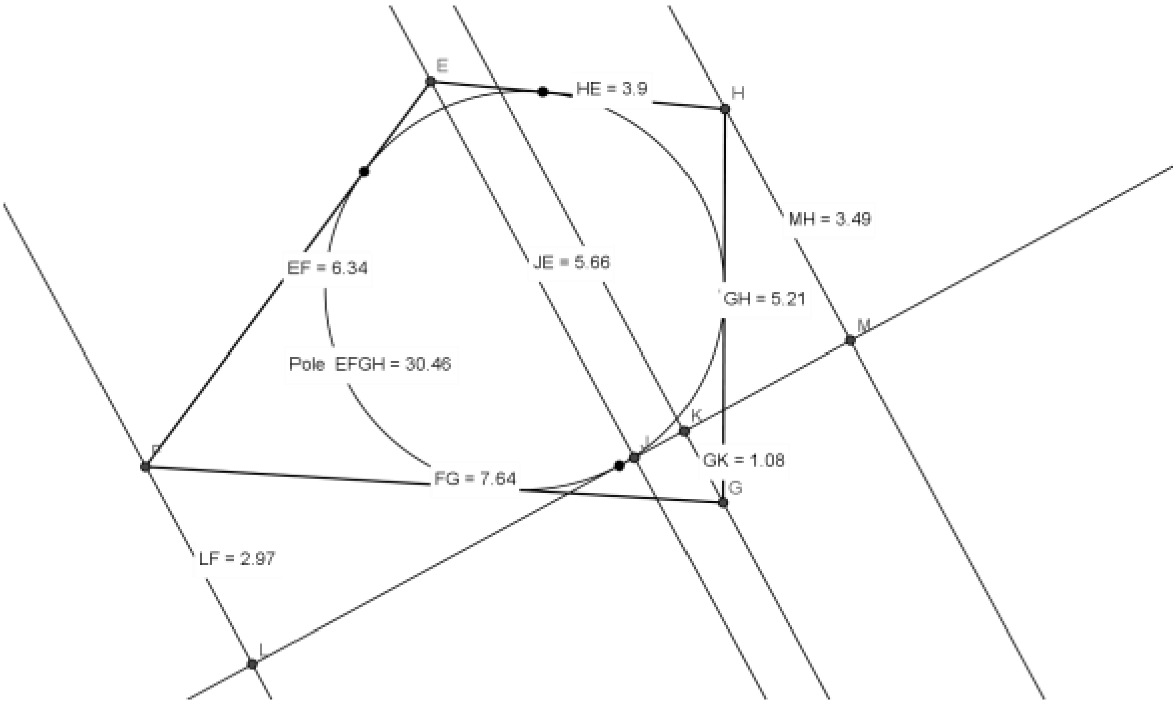
$$-aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$

Ale $a_1 = d_1 + r$, $b_1 = d_2 + r$, $c_1 = d_3 + r$, gdzie r to promień okręgu dopisanego. Zatem:

$$-aa_1 + bb_1 + cc_1 = -ad_1 + bd_1 + cd_1 + r(-a + b + c) = r(-a + b + c) = 2P$$

5. Pójdźmy dalej

Zadajmy sobie pytanie, czy coś takiego mogłoby zadziałać dla czworokąta opisanego na okręgu? Sprawdźmy.



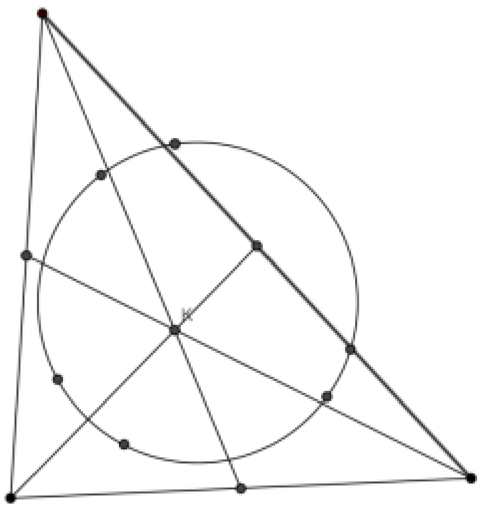
Niestety nie zauważyłam żadnych własności, zależności przemnażając odległości razy różne boki, porównując do pola figury itd.

6. Twierdzenie Van Lamoen'a

Belgijski matematyk Floor Van Lamoen stworzył poniższy problem w 2000 roku. Już rok później doczekał się on rozwiązania przez nijakiego Kin Y. Li'a. Obecnie twierdzenie jest znane pod nazwą Twierdzenia Van Lamoen'a.

Twierdzenie:

Środki okręgów opisanych na sześciu trójkątach powstałych za pomocą trzech przecinających się w punkcie K czewian, leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy K jest ortocentrum lub środkiem ciężkości trójkąta.

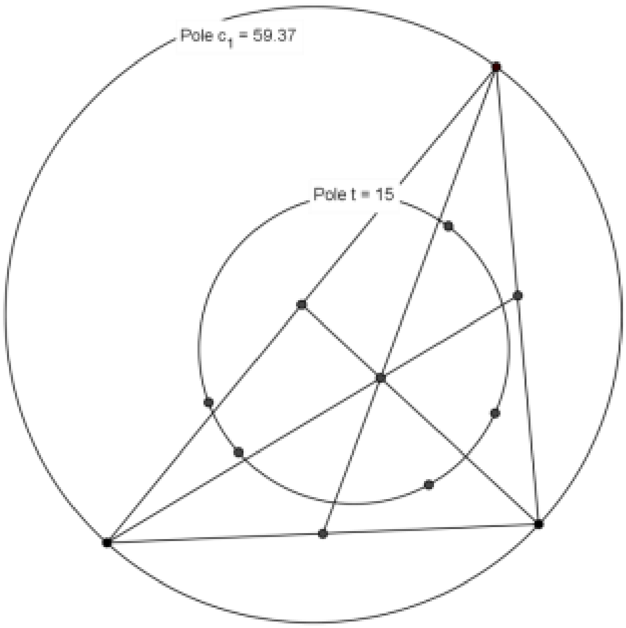


7. **Dowód Twierdzenia Van Lamoen'a**

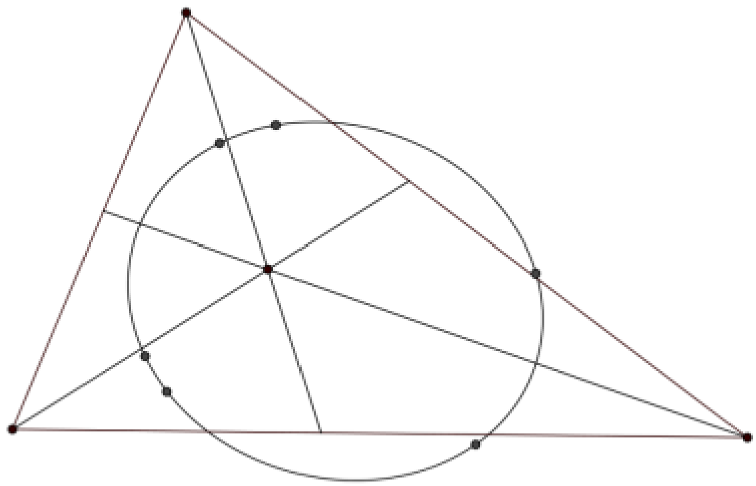
Dowód jest długi i techniczny, dla zainteresowanych można go znaleźć w bibliografii podanej na końcu pracy.

8. **Pójdźmy dalej**

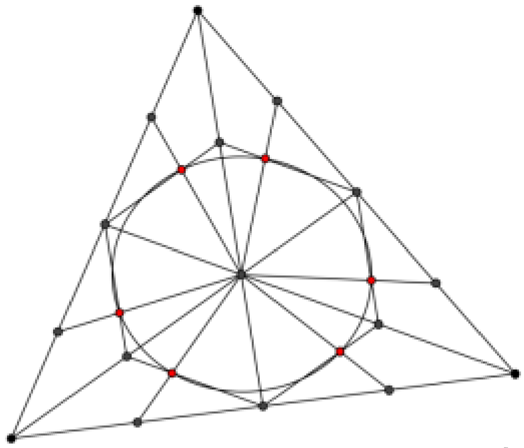
Sprawdziłam czy występuje zależność pomiędzy okręgiem opisanym na dużym trójkącie, a utworzonym przez te sześć punktów (środków okręgów opisanych na małych trójkątach). Niestety nie znalazłam takiej zależności.

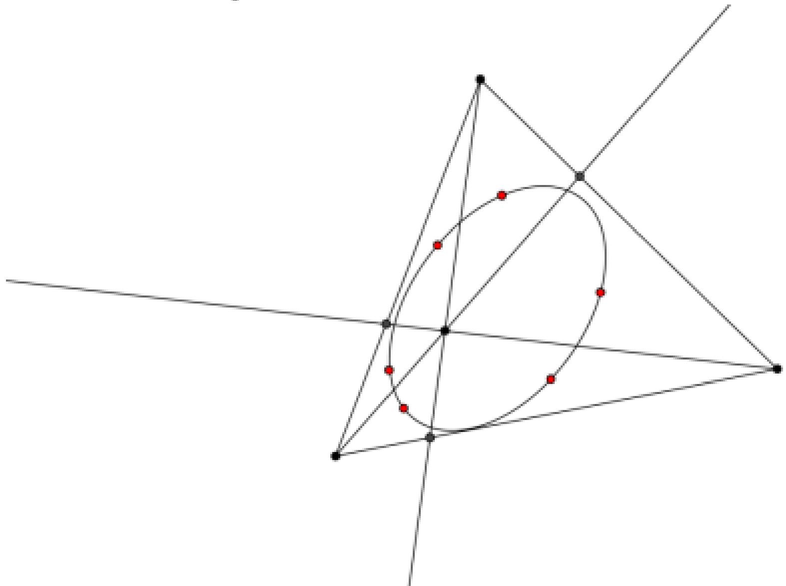


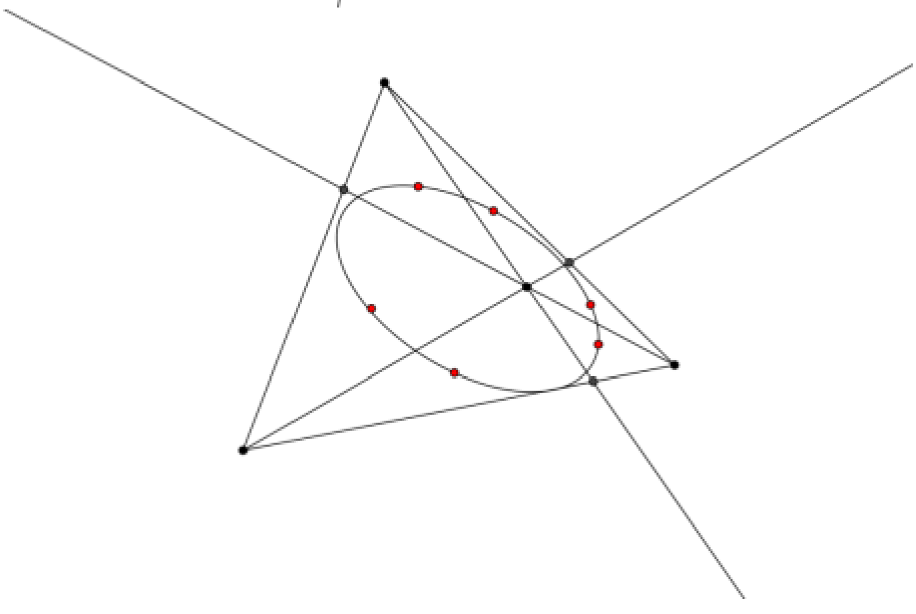
Zaczęłam się zastanawiać czy te sześć punktów jest jakoś powiązanych w przypadku, gdy K nie jest środkiem ciężkości trójkąta. Okazało się, że tak. Wszystkie sześć punktów leżą na jednej krzywej stożkowej, a dokładnie na jednej elipsie.



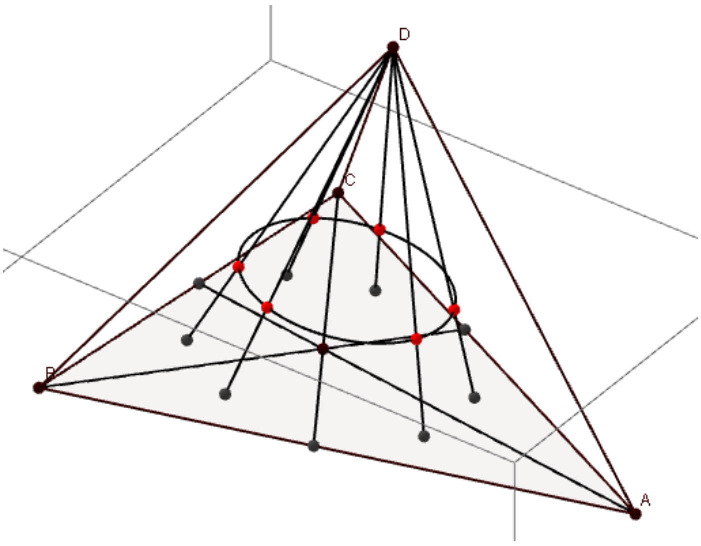
Następną rzeczą jaką chciałabym zauważyć to fakt, że dla środków ciężkości tych małych trójkątów mamy podobną własność. Otóż środki ciężkości małych trójkątów będą leżały na jednej elipsie (bez względu na to czy K jest przecięciem środkowych czy innych czewian), a w szczególnym wypadku (dla punktu przecięcia czewian) na okręgu. Jeszcze nie odkryłam co to za punkt.

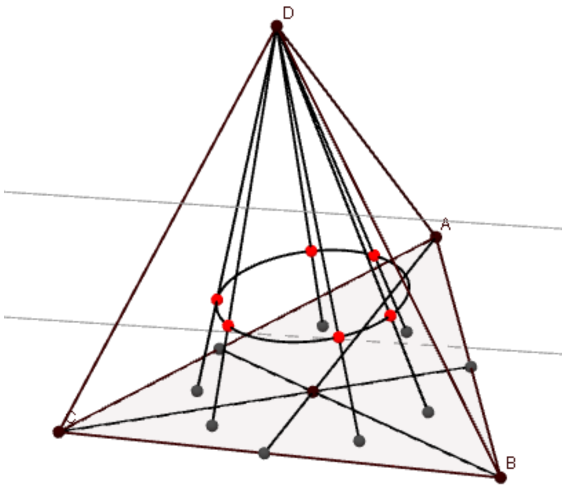






Dalej możemy przejść do stereometrii, czyli czworościanu. Podstawę dzielimy tak jak powyżej. Otrzymujemy wówczas sześć czworościanów, ich środki ciężkości również będą leżały na krzywej stożkowej. Ten fakt można już łatwo udowodnić z twierdzenia poprzedniego, które dopiero próbuję udowodnić.





Obecnie staram się udowodnić dwa powyższe fakty o współelipsowości.

Bibliografia:

- Forum Geometricorum. Volume 3. 2003 r.
- Hartcourt’s Theorem via Salmon’s Lemma – Luis Gonzales and Cosmin Pohoata
- Wikipedia