

SZKOŁA PODSTAWOWA NR 109
IM. KORNELA MAKUSZYŃSKIEGO
W KRAKOWIE
UL. MACKIEWICZA 15; 31-214 KRAKÓW; TEL.12 415 27 59
sp109krakow.w.w.interia.pl ; e-mail: sp109krakow@wp.pl

Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Nauk i Sztuk
Centrum Młodzieży im. dr Henryka Jordana;

KONKURS PRAC MATEMATYCZNYCH

Temat:

„JAK MATEMATYKA SŁUŻY ELEKTRONICE – BRAMKI LOGICZNE”

Autorzy:

Mateusz Rajs – klasa 5 b

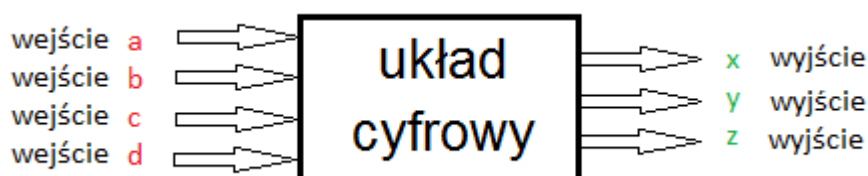
Bartłomiej Szlubowski – klasa 5 b

Opiekun: Ewa Malicka

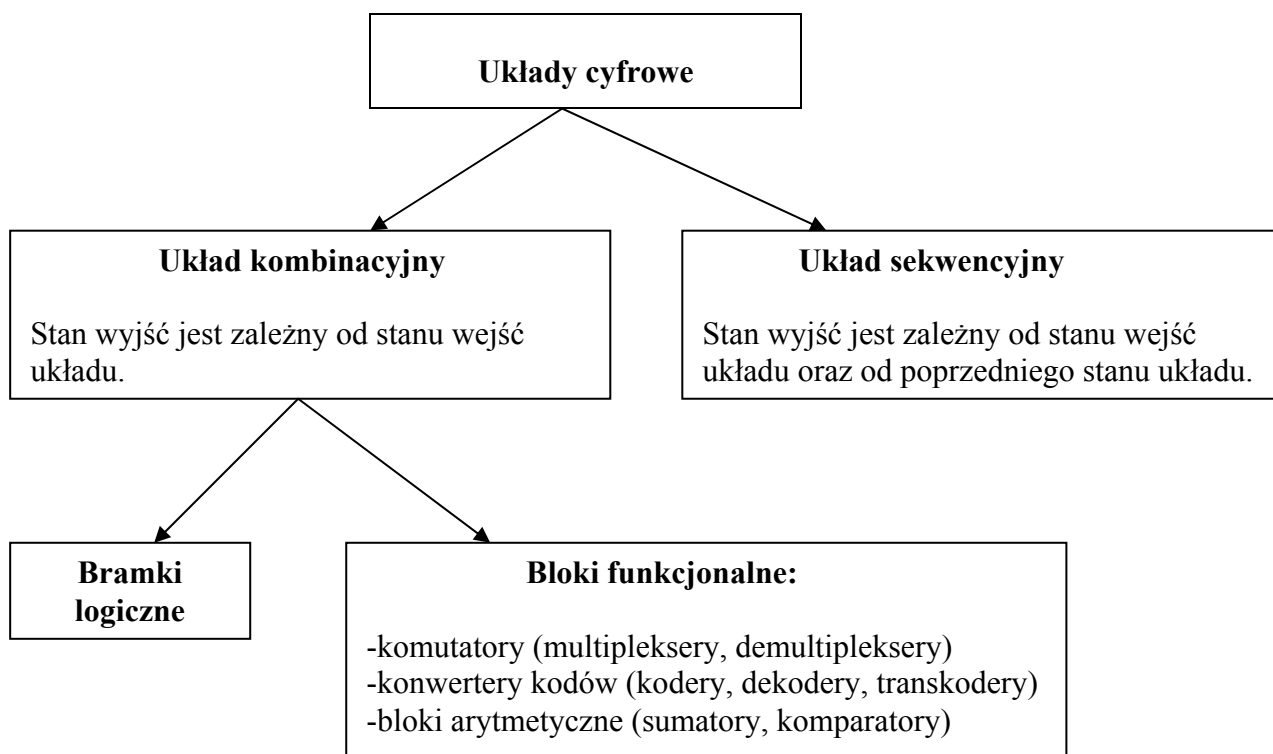
Kraków 2015

Wprowadzenie

We współczesnym świecie wszystkie urządzenia cyfrowe typu telefonia komórkowa, Telewizja cyfrowa, urządzenia multimedialne itp. składają się z cyfrowych układów logicznych. Układy logiczne to układy powiązanych ze sobą elementów tworzonych w celu przetwarzania informacji, obliczania i sterowania różnymi urządzeniami; choćby tak powszechnymi jak budzik cyfrowy, zegarki elektroniczne, pilot do telewizora itp. Układy takie operują na dwóch stanach (wartościach) oznaczonych jako 1 - prawda i 0 – fałsz, a zasady ich działania są oparte na narzędziach logiki matematycznej. xSystemy takie nazywamy dwójkowymi lub binarnymi. Systemy liczbowe prezentowaliśmy w zeszłym roku w referacie „Zamiana systemów liczbowych”



Układy cyfrowe dzielimy na układy kombinacyjne i układy sekwencyjne.



Bramki logiczne

Bramki logiczne są najprostszym elementem stosowanym w technice cyfrowej realizującymi podstawowe funkcje logiczne. Służą one do budowy układów logicznych o większej złożoności. Bramka logiczna posiada co najmniej jedno wejście i jedno wyjście. Na wejście bramki logicznej podawane są sygnały dwustanowe, a na wyjściu generowany jest wynik funkcji realizowanej przez bramkę. Stan „0” lub „1” jest jednostką informacji zwaną bitem.

Każde słowo logiczne może być interpretowane jako pewna liczba zapisana w kodzie binarnym. Na przykład czterobitowe słowo 1001 w kodzie dziesiętnym jest liczbą:

$$1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 1 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 4 + 1 \times 8 = 9$$

Rodzaje bramek:

- bramka AND („i”)
- bramka NAND („nie i”)
- bramka OR („lub”)
- bramka NOR („nie lub”)
- bramka XOR („wykluczające lub”)
- bramka XNOR
- bramka NOT („nie”)

Tabela prawdy to tabela określająca działanie bramek, zawierająca wszystkie możliwe kombinacje stanów na wejściach oraz odpowiednie wartości na wyjściach będące wynikiem danej funkcji.

Bramka AND realizuje funkcję logicznego iloczynu tzn. wartość funkcji równa się 1 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie sygnały wejściowe są w stanie 1. Bramka ta posiada co najmniej dwa wejścia ale może posiadać ich więcej - teoretycznie nieskończenie wiele. W praktyce spotyka się bramki posiadające do 8 wejść.

Symbol graficzny



Tabela prawdy

AND	1	0
1	1	0
0	0	0

Bramka NAND realizuje funkcję zaprzeczenia logicznego iloczynu – wartość funkcji równa się 0 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie sygnały wejściowe są w stanie 1.

Symbol graficzny



Tabela prawdy

NAND	1	0
1	0	1
0	1	1

Bramka OR realizuje funkcję logicznej sumy – wartość funkcji równa się 0 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie sygnały wejściowe są w stanie 0.

Symbol graficzny



Tabela prawdy

OR	1	0
1	1	1
0	1	0

Bramka NOR realizuje funkcję zaprzeczenia logicznej sumy – wartość funkcji równa się 1 wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie sygnały wejściowe są w stanie 0.

Symbol graficzny



Tabela prawdy

NOR	1	0
1	0	0
0	0	1

Bramka XOR - na jej wyjściu pojawi się wartość funkcji równa 1 wtedy i tylko wtedy, gdy suma arytmetyczna zmiennych wejściowych będzie równa 1.

Symbol graficzny



Tabela prawdy

XOR	1	0
1	0	1
0	1	0

Bramka XNOR jest negacją bramki XOR, zatem na jej wyjściu pojawi się funkcja logiczna 0 wtedy i tylko wtedy, gdy suma arytmetyczna zmiennych wejściowych będzie równa 1.

Symbol graficzny



Tabela prawdy

XNOR	1	0
1	1	0
0	0	1

Bramka NOT odwraca (neguje) sygnał wejściowy– jest to funkcja jednoargumentowa (inaczej nazywana unarną).

Symbol graficzny

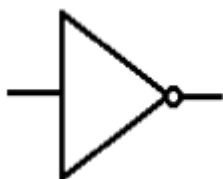


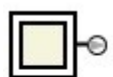
Tabela prawdy

NOT	
1	0
0	1

Najbardziej uniwersalnymi bramkami są bramki NAND i NOR, gdyż używając tylko bramek NAND i NOR możemy zbudować układ realizujący dowolną funkcję logiczną, co nazywamy *pełnością funkcjonalną*. Równie ciekawym jest fakt, iż przy użyciu jedynie bramek NOT i AND lub NOT i OR otrzymamy podobny rezultat.

Przykłady:

W przykładach oprócz symboli bramek użyto poniższych symboli:



0 na wejściu



0 na wyjściu



1 na wejściu

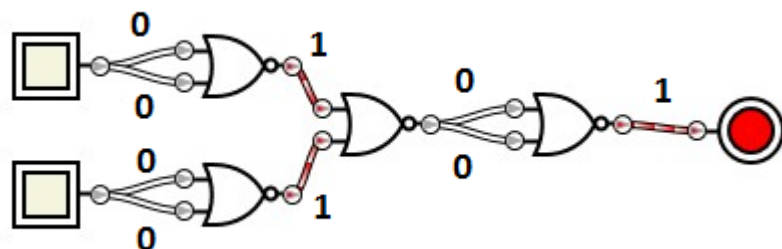


1 na wyjściu

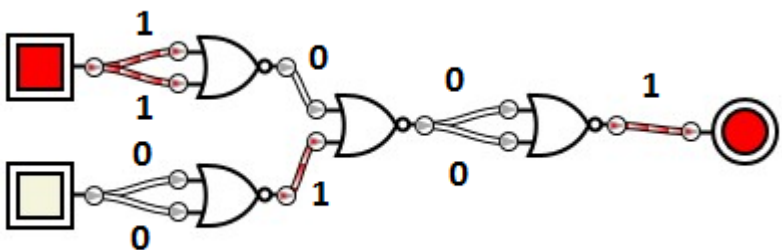
Przykład 1. Bramka NAND zbudowana tylko z bramek NOR.

Rozważymy wszystkie możliwe przypadki w zależności od wartości sygnałów wejściowych.

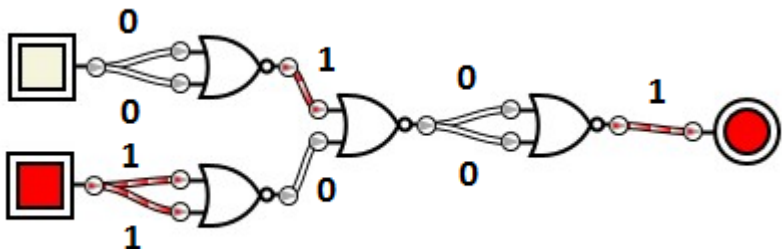
1a. Sygnały wejściowe: 00



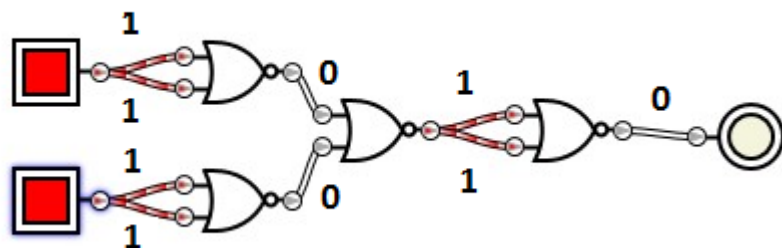
1b. Sygnały wejściowe: 10



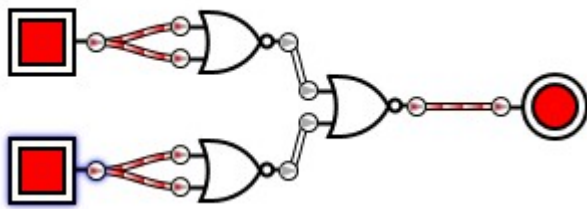
1c. Sygnały wejściowe 01



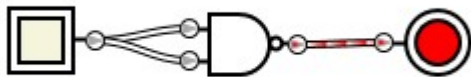
1d. Sygnały wejściowe 11



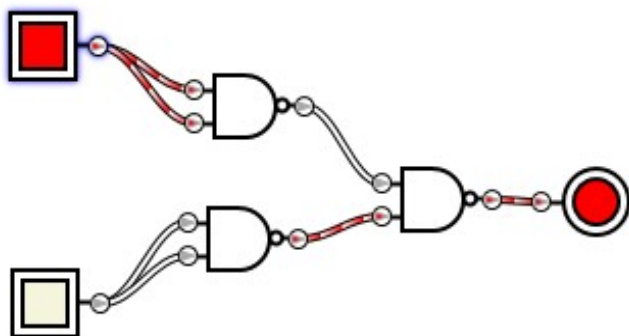
Przykład 2. Bramka AND z bramek NOR



Przykład 3. Bramka NOT z bramki NAND



Przykład 4. Bramka OR z bramek NAND



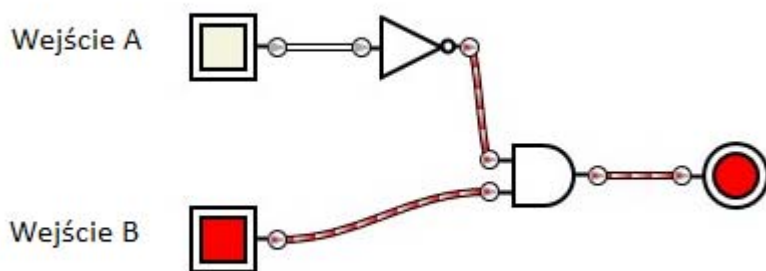
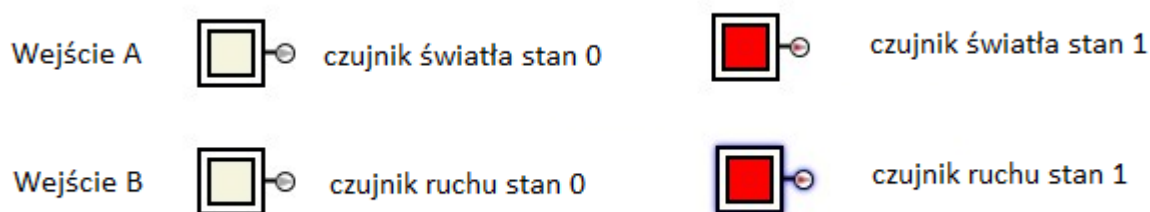
Przykładowe zastosowania

Bramki można stosować w różnych urządzeniach wykonujących czynności dwustanowe np.: „zapal-zgaś”, zamknij-otwórz”, „włącz-wyłącz” na podstawie kombinacji sygnałów wejściowych dwustanowych.

1. Czujnik ruchu

Każdy z nas spotkał się z automatycznie włączającymi się światłami reagującymi na ruch. Układy takie zbudowane są między innymi z czujnika ruchu i czujnika światła połączonymi w układ, który prezentujemy poniżej.

Legenda:



Układ logiczny zawiera bramkę NOT i AND.

Tabela prawdy układu

wejście AB	00	01	10	11
wyjście	0	1	0	0

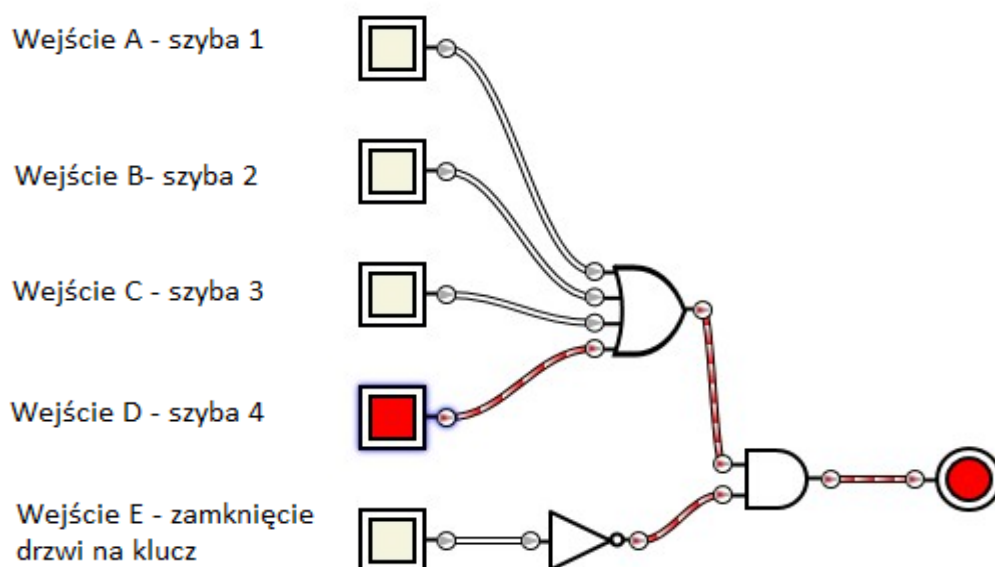
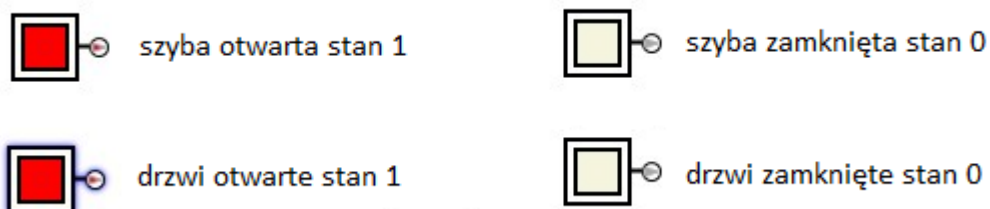
Zgodnie z tabelą prawdy aby układ włączył światło muszą być spełnione łącznie następujące warunki:

- musi być ciemno (wejście A stan „0” – użyto bramki NOT – „nie światło”)
- czujnik ruchu musi wykryć poruszenie (wejście B stan „1”)

2. Automatyczne zamykanie szyb w samochodzie

Problemem wielu kierowców jest to, że zapominają zamykać szyby przed opuszczeniem i zamknięciem pojazdu. Rozwiązaniem ich problemu może być wyposażenie pojazdu w układ automatycznego podnoszenia szyb po zamknięciu samochodu na klucz.

Legenda:



Układ logiczny zbudowany jest z bramek OR, NOT i AND.

Tabela prawdy układu

00000 – wszystkie okna i drzwi zamknięte

10001 – pierwsze okno i drzwi otwarte

ABCDE								
wejścia	00000	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111
wyjście	0	0	1	0	1	0	1	0
wejścia	01000	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111
wyjście	1	0	1	0	1	0	1	0
wejścia	10000	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111
wyjście	1	0	1	0	1	0	1	0
wejścia	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
wyjście	1	0	1	0	1	0	1	0

Zgodnie z tabelą prawdy aby układ włączył automatyczne zamykanie szyb muszą być spełnione łącznie warunki:

- przynajmniej jedna szyba jest otwarta tzn. że spośród wszystkich wejść A, B, C, D przynajmniej jedno ma wartość logiczną 1
- drzwi zamknięte są kluczykiem; tzn., że wartość logiczna wejścia E jest 0.

Takich kombinacji jest 15 spośród 32 możliwych.

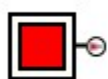
W tabeli kolorem zielonym zaznaczono przypadki, kiedy układ włączy się automatycznie i zasunie szybę lub szyby. Kolorem czerwonym w tabeli prawdy zaznaczono zilustrowany przypadek.

3. Układ akceptujący prace konkursowe

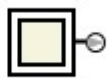
Możemy stworzyć urządzenie do liczenia głosów członków jury decydujących czy dana praca przesłana-na konkurs matematyczny kwalifikuje się do kolejnego etapu.

Członków jury jest pięciu, a praca kwalifikuje się dalej, jeżeli przynajmniej trzech członków jury wysoko oceni pracę – na wyjściu pojawi się wtedy stan 1, czyli praca została wybrana do kolejnego etapu.

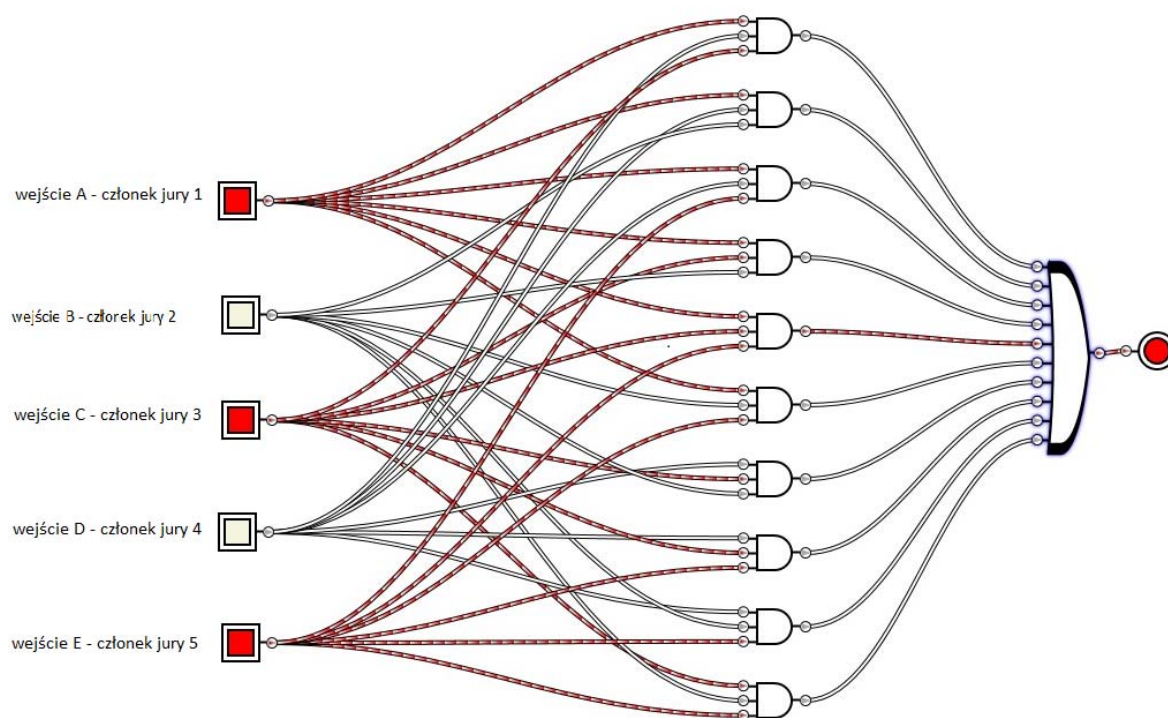
Legenda:



praca wysoko oceniona
przez jurora stan 1



praca odrzucona stan 0



Układ logiczny składa się z bramek AND i OR.

Tabela prawdy układu

ABCDE								
	00000	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111
wejścia	0	0	0	0	0	0	0	1
wejścia	01000	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111
wyjście	0	0	0	1	0	1	1	1
wejścia	10000	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111
wyjście	0	0	0	1	0	1	1	1
wejścia	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
wyjście	0	1	1	1	1	1	1	1

Zgodnie z tabelą prawdy, aby układ wyświetlił na wyjściu 1 (czyli praca zostaje dopuszczona do kolejnego etapu) musi być spełniony warunek, że co najmniej 3 członków jury wciśnie przycisk.

Na zielono przedstawiono wszystkie 16 takich możliwości z pośród 32 kombinacji oceny pracy. Kolorem czerwonym w tabeli prawdy zaznaczono zilustrowany przypadek.

4.Układ losujący

Załóżmy, że dwaj koledzy Mateusz i Bartek mieszkają daleko od siebie i chcą razem spędzić sobotę u jednego z nich. Nie mogą jednak dojść do porozumienia u kogo się spotkają. Wymyślili więc pewien sposób, aby uczciwie wylosować kto do kogo ma przyjechać.

Zbudowali skomplikowany układ logiczny składający się z bramek AND i OR, z którego stanów wyjściowych nie można odczytać stanów wejściowych bez użycia tabeli prawdy.

Uzgodnili, że jedna osoba wymyśli stany wejściowe i zachowa je w tajemnicy, a drugiej osobie poda stany wyjściowe. Na tej podstawie druga osoba musi odgadnąć czy wśród stanów wejściowych jest parzysta liczba jedynek (ma 50% szans na odgadnięcie). Jeśli odgadnie poprawnie to Mateusz przyjeżdża do Bartka, a jeśli nie, to Bartek przyjeżdża do Mateusza.

Jeżeli układ jest skomplikowany, to Bartek nie będzie w stanie szybko wyliczyć stanów wejściowych - musi więc je odgadnąć. Po podaniu swojej odpowiedzi otrzymuje od Mateusza cyfry wejściowe i może sprawdzić czy Mateusz go nie okłamał.

Przykładowy układ dla stanów wejściowych 00110 (parzysta liczba „1”) dający na wyjściu 10011.

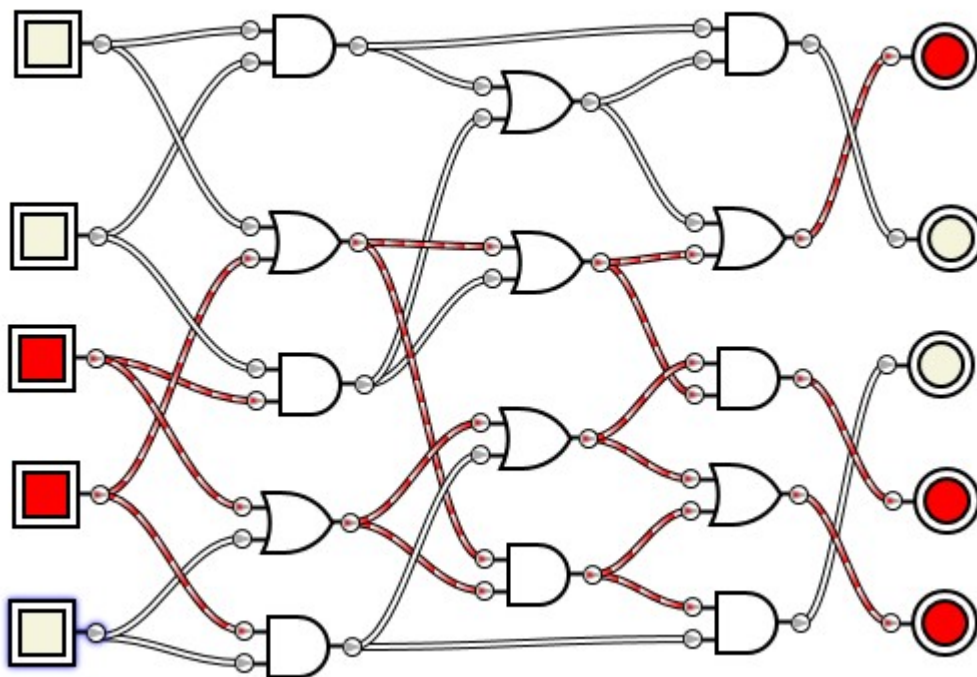


Tabela prawdy układu

wejście	00000	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111
wyjście	00000	00001	10000	10111	00001	00001	10011	10111
wejście	01000	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111
wyjście	00000	00001	10000	10111	10011	10011	10011	10111
wejście	10000	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111
wyjście	10000	10011	10000	10111	10011	10011	10011	10111
wejście	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
wyjście	11000	11011	11000	11111	11011	11011	11011	11111

Prawdopodobieństwo „oszukiwania”.

Jak widać z powyższej tabeli prawdy, układ zbudowany przez chłopców nie jest układem doskonałym i dla różnych wejść podaje takie same wyjścia. Gdyby któryś z chłopców dysponował tabelą prawdy dla tego układu mógłby „oszukiwać” - w powyższej tabeli zaznaczono przypadki danych wyjściowych dla różnych danych wejściowych. Ciąg wartości 10011 odpowiada kilku różnym danym wejściowym: 00110, 01100, 01101, 01110, 10100, 10101, 10110. Mateusz mógłby znaleźć dane wejściowe o różnej parzystości, które dają ten sam ciąg wartości na wyjściu. np. 01100 i 01101.

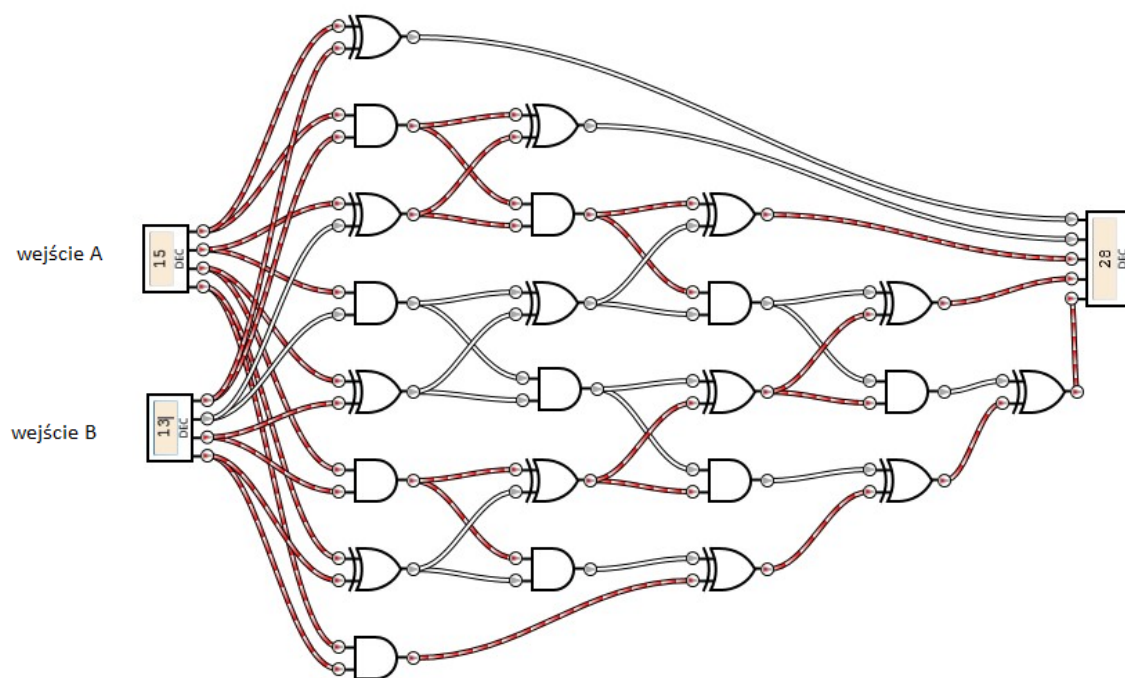
Każdy kolejny bit podwaja liczbę możliwych ciągów. Przy użyciu 5 bitów na wejściu i 5 na wyjściu otrzymujemy $2^5 = 32$ ciągów liczbowych, ale przy użyciu 6 bitów na wejściu i 6 na wyjściu otrzymujemy już $2^6 = 64$ ciągi liczbowe.

Przedstawiony układ to najprostszy protokół kryptograficzny. Protokoły kryptograficzne są ważne w przypadku transakcji elektronicznych, przesyłania danych osobowych, w korespondencjach zastrzeżonych. W praktyce układy posiadają o wiele większe rozmiary i są bardziej złożone.

5. Kalkulator

Układ arytmetyczny z bramek logicznych realizujący działanie dodawania nazywany jest sumatorem.

Poniższy układ logiczny zbudowany z bramek XOR i AND jest prostym kalkulatorem dodającym w zakresie 30. Na wejściach A i B wpisujemy liczby, które chcemy dodać, a na wyjściu otrzymujemy ich sumę.



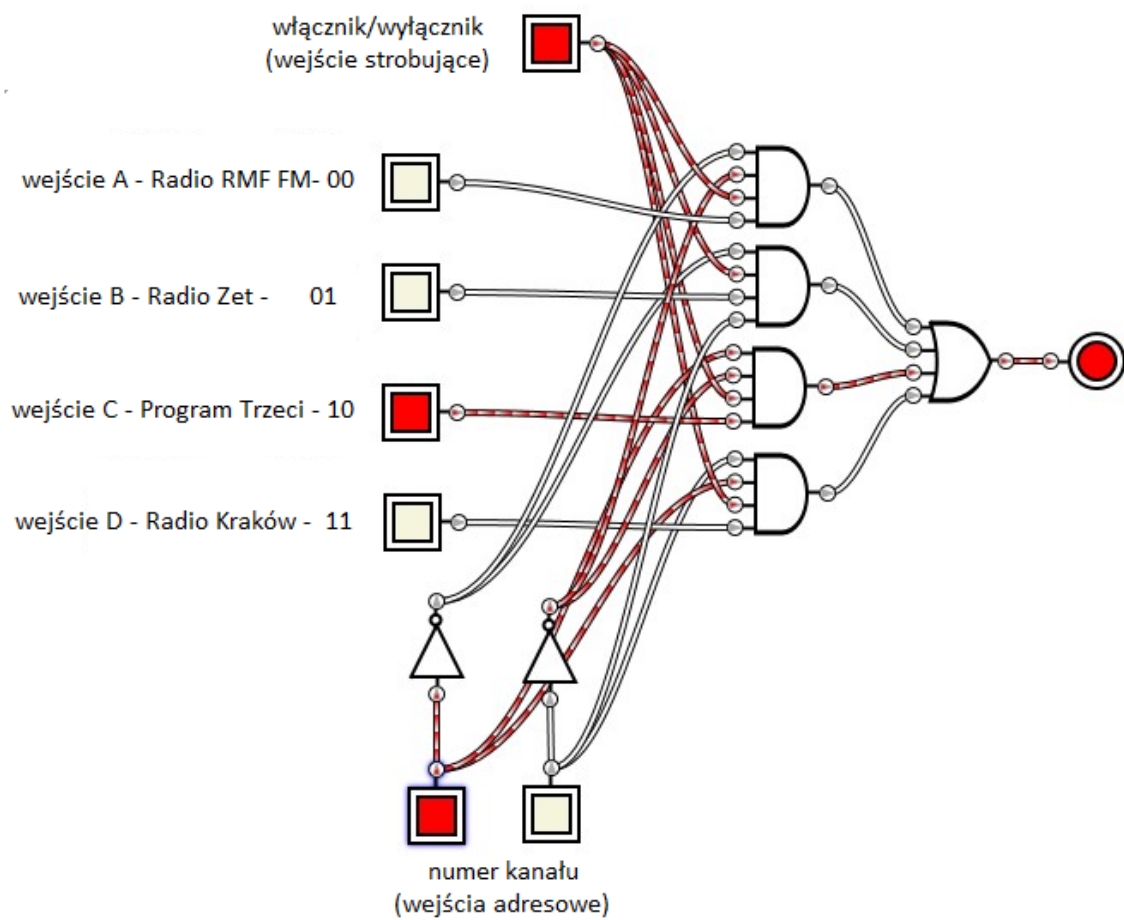
Ze względu na ograniczone miejsce na stronie referatu zamieszczamy przykład układu realizujący sumowanie w zakresie 1-30.

6. Przełącznik pamięci stacji radiowych w radioodbiorniku.

W poniższym przykładzie zastosujemy układ logiczny zwany multiplekserem.

Multiplekser jest układem logicznym realizującym przepływ informacji z jednego wejścia. Wybór wejścia jest określony przez podanie jego numeru na wejścia adresowe. Przepływ informacji z wejścia na wyjście jest możliwy dopiero wówczas, gdy wejście strobowe (zezwalające/blokujące) znajduje się w stanie logicznym „1”.

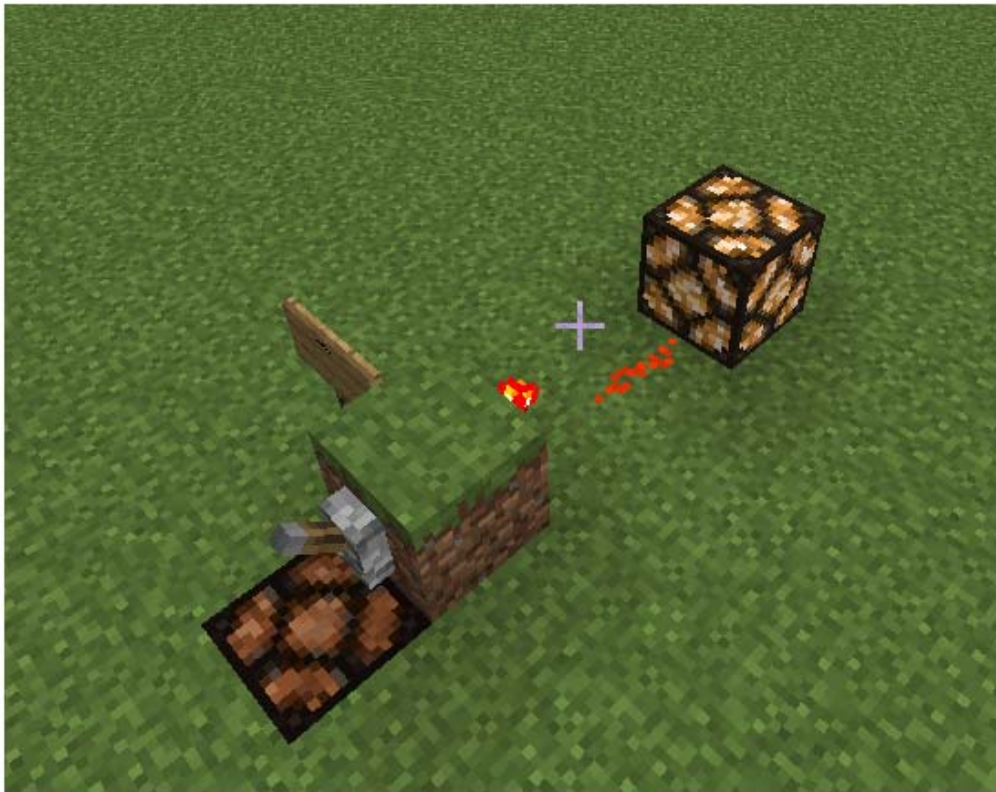
Nasz multiplekser ma cztery wejścia, pod którymi zapisane (zaprogramowane) są częstotliwości stacji radiowych: wejście A - RMF FM, wejście B - Radio ZET, wejście C - Program Trzeci Polskiego Radia, wejście D – Radio Kraków. Wejściem strobowym jest główny włącznik radia, a wejściami adresowymi definiujemy, której stacji chcemy słuchać.



Jeżeli chcemy posłuchać radiowej Trójki włączamy radio i wybieramy nr kanału – w naszym przypadku wpisujemy adres wejściowy „10” .

Podsumowanie

Teorię opisaną w tej pracy wykorzystujemy w grze Minecraft. Logika matematyczna i jej zastosowanie w świecie tej gry, dającej niemal nieograniczone możliwości, pobudzają naszą kreatywność i wyobraźnię. Znajomość zagadnienia bramek logicznych pozwala na budowę konstrukcji przeniesionych ze świata rzeczywistego w wirtualny świat Minecraft-a, których bez tej wiedzy nie udało by się stworzyć.



Lampka zbudowana z bramki NOT.

W pracy do wykonania układów użyto programu Logic Gate Simulator. Program oraz wszystkie przedstawione w pracy układy załączamy na płytce.

Źródła:

”Wstęp do elektroniki. Część VII. układy Cyfrowe” Janusz Brzychczyk IF UJ
”Elektronika dla Bystrzaków” wydanie II, Cathleen Shamieh, Gordon McComb
<http://www.ujk.edu.pl/informatyka/pardyka/wtc/s02/content/tc02/siframes.html>
http://csunplugged.org/sites/default/files/activity_pdfs_other/activity17_Polish.pdf
http://edu.i-lo.tarnow.pl/inf/alg/002_struct/0012.php
http://www.jeybi.republika.pl/cyfra11_pierwsze_uklady.html