"Zmysły radują się na widok rzeczy o właściwych proporcjach"

św. Tomasz z Akwinu

Złoty podział

Lidia Anna Janicka, Zuzanna Pałosz

Klasa Ic

Gimnazjum nr 3 w Zespole

Szkół Publicznych Nr 2

34-100 Wadowice

os. Kopernika 11

tel.338232480

zsp2wadowice@poczta.onet.pl

Wstęp

Pierwszy raz z pojęciem **złotego podziału** spotkałyśmy się na lekcji plastyki. Mówiliśmy wtedy o renesansie. Architekci tej epoki posługiwali się nim przy projektowaniu wielu budowli. Zaciekawiło nas to zagadnienie, więc zaczęłyśmy szukać informacji na ten temat. Okazało się, że przed Fidiaszem i Leonardo da Vinci **stosunek φ** odkryła także natura.

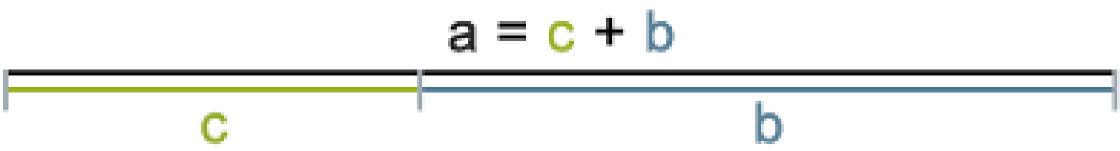
Stosunek φ

Zacznijmy od początku...

Pewnie wielu z Was słyszało o liczbie π. My jednak zajmiemy się jej "kuzynką", liczbą φ (fi).

Jej wartość wynosi w przybliżeniu 1,618033988... Nazywamy ją złotą lub boską liczbą. Badał ją Luca Pacioli, który poświecił jej cały traktat w swoim dziele pt. **Divina Proportione.**

Odkrywamy ją, gdy w odpowiedni sposób podzielimy dowolny odcinek, tak jak na poniższym rysunku:



$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Stosunek całego odcinka a do jego dłuższej części b jest identyczny , jak stosunek odcinka b do odcinka c i wynosi 1,618...

Wartość liczby φ można prosto obliczyć za pomocą wzoru:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+2,236...}{2} \approx 1,618...$$

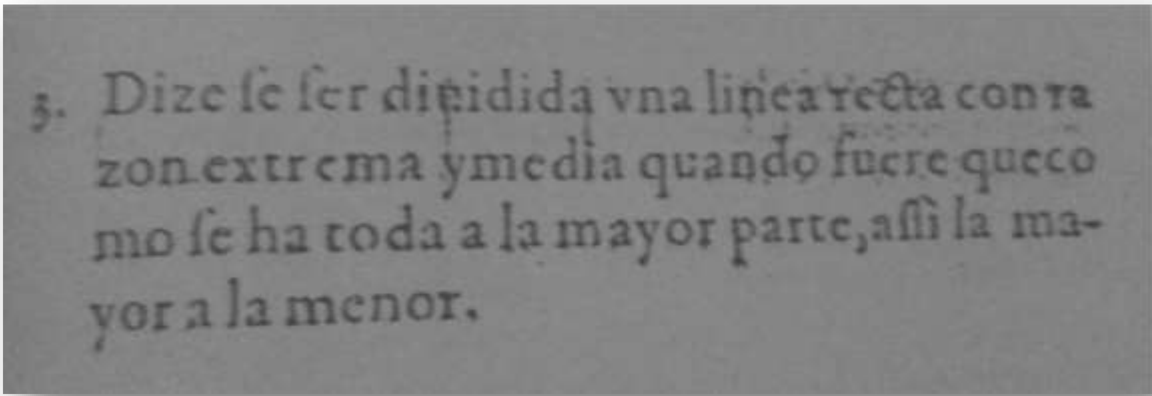
Ciekawa rzecz to odwrotność liczby φ :

$$\frac{1}{\varphi} = 0,618...$$

Zauważamy, że $\frac{1}{\varphi}$ otrzymamy, gdy od liczby φ odejmiemy 1. Jest to jedyna liczba dodatnia, która posiada taką własność.

Historia odkrycia

Liczbę φ odkryli starożytni Grecy. Pierwszy wspomniał o niej **Euklides z Aleksadrii** w swoim słynnym dziele pt. "Elementy geometrii" napisanym ok.300 r. p.n.e. Składa się ono z 13 ksiąg. Księga VI zawiera tekst, od którego wszystko się zaczęło:


3. Dize ſe ſer dividida vna linea recta con razon extrema y media quando fuere que como ſe ha toda a la mayor parte, aſſi la mayor a la menor.

Tłumaczenie:

"Powiemy, że linia prosta została podzielona harmonicznie, gdy większy odcinek ma się tak do mniejszego, jak całość do większego."

W XX w. Amerykanin **Mark Barr** wpadł na pomysł, aby tę liczbę nazwać liczbą φ od imienia antycznego rzeźbiarza – **Fidiasza**, który zawarł ja w wielu swoich dziełach.

Michael Maestlin z Uniwersytetu w Tybindze jako pierwszy podał przybliżenie odwrotności liczby φ**.** Wynosiło ono: 0,6180340

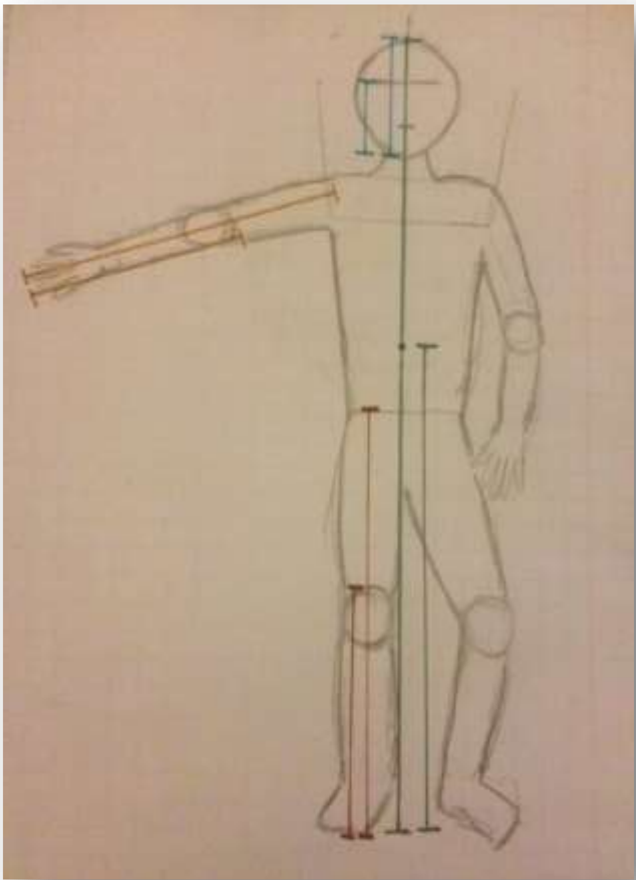

Mark Barr

Liczba φ w życiu codziennym

Liczba φ jest wszędzie wokół nas, ale często nie zdajemy sobie z tego sprawy.

Możemy spotkać ją w:

- piśmie odręcznym
- skrzydłach owadów
- EKG serca
- **PROPORCJACH LUDZKIEGO CIAŁA**



Odcinki **niebieskie** oznaczają złotą proporcję między całą głową, a odległością od brody do oczu.

Odcinki **pomarańczowe** oznaczają złoty podział między długością ręki i odległością od dłoni do łokcia.

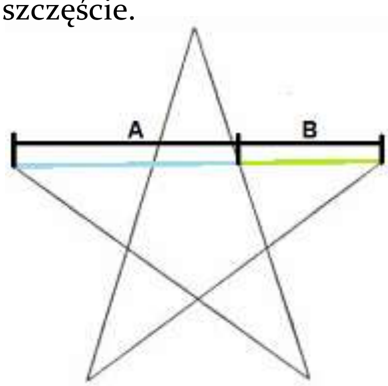
Odcinki **zielone** oznaczają złoty stosunek między wysokością człowieka, a odległością od pępka do stóp.

Odcinki **brązowe** oznaczają proporcję φ między długością nogi, a odległością od kolana do stóp.

Odcinek **szary** jest w złotym stosunku do odcinka **czerwonego**.

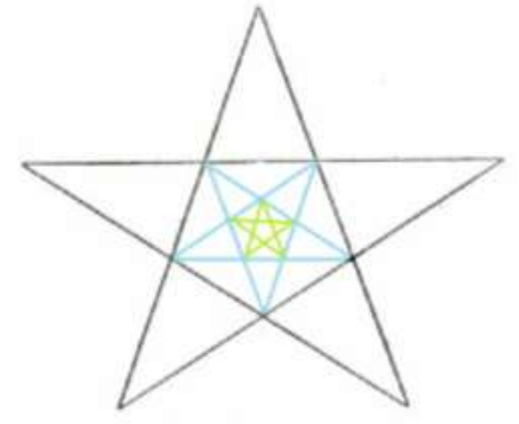
- **pentagramie**

Złoty stosunek jest także obecny w **pentagramie**. Jest to figura o kształcie pięcioramiennej gwiazdy, w środku niej zawarto pięciokąt foremny. Często spotykamy go w Święta Bożego Narodzenia, gdy przyozdabiamy choinkę. Pentagram znajdziemy też w jabłku czy rysunkach Leonarda da Vinci. W wielu kulturach uznawany jest za magiczny symbol przynoszący szczęście.



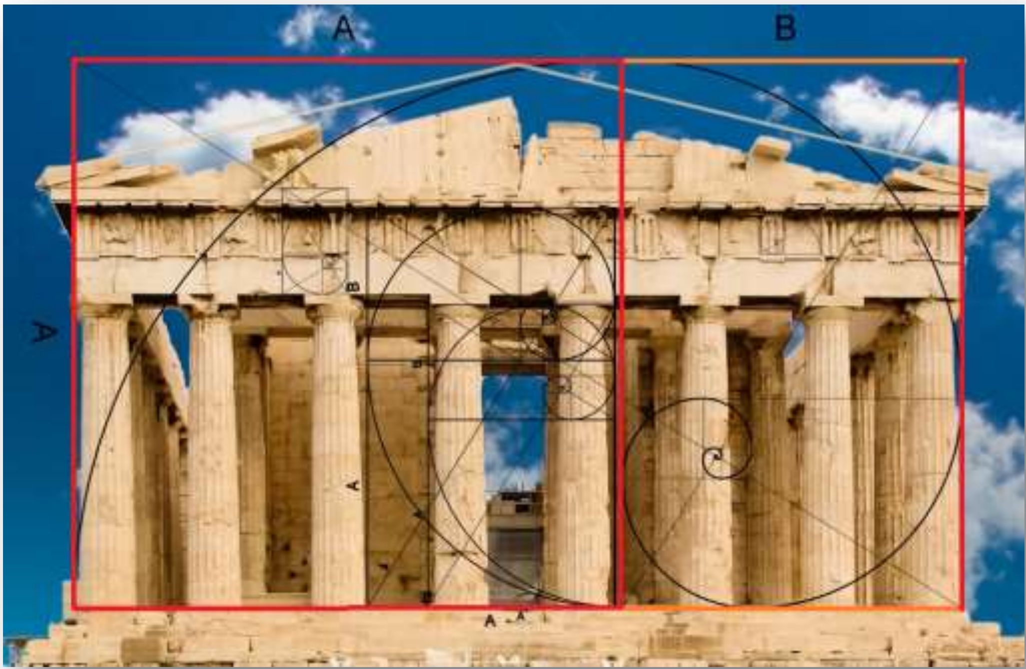
W pentagramie odcinek A (niebieski) jest w stosunku **φ** do odcinka B (zielony), jak i do całego odcinka A+B.

Co ciekawe łącząc wierzchołki pięciokąta foremnego znajdującego się wewnątrz pentagramu (rysując jego przekątne) otrzymamy kolejny mniejszy pentagram itd.



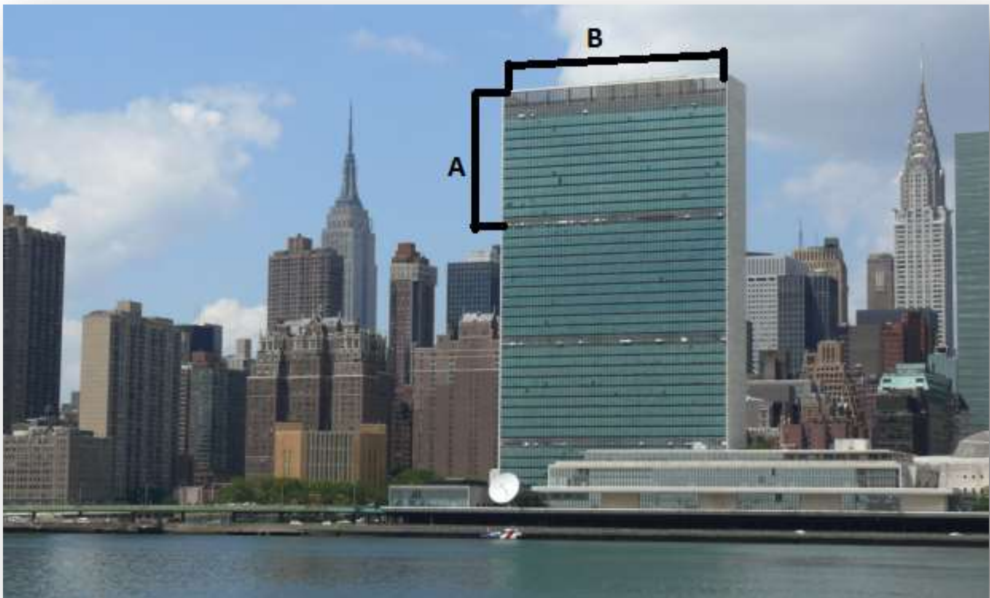
Kształt pięciokąta foremnego (każdy z jego boków ma równą długość oraz każdy kąt wewnętrzny ma taką samą miarę), który jest wpisany we wnętrze pentagramu można spotkać w budynku **Pentagonu** w Arlington (Stany Zjednoczone). W języku angielskim "**pentagon**" oznacza **pięciokąt**.

- w architekturze starożytnej:



Fidiasz zaprojektował PARTENON, w którym zastosował złoty podział.

- w architekturze współczesnej:



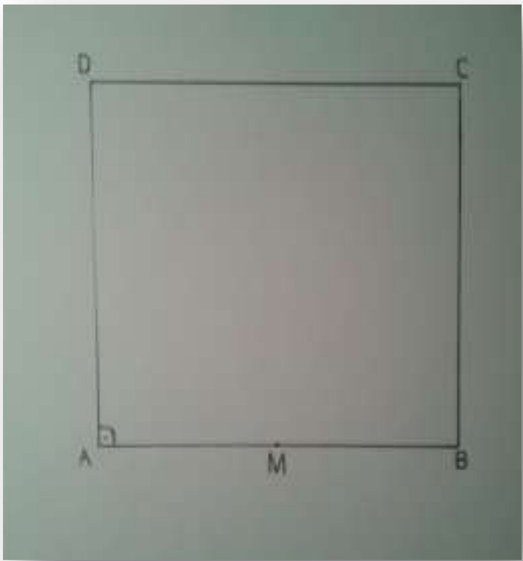
Budynek ONZ w Nowym Jorku jest podzielony na trzy złote prostokąty, których stosunek boku **B** do **A** jest równy liczbie φ.

Konstrukcje geometryczne

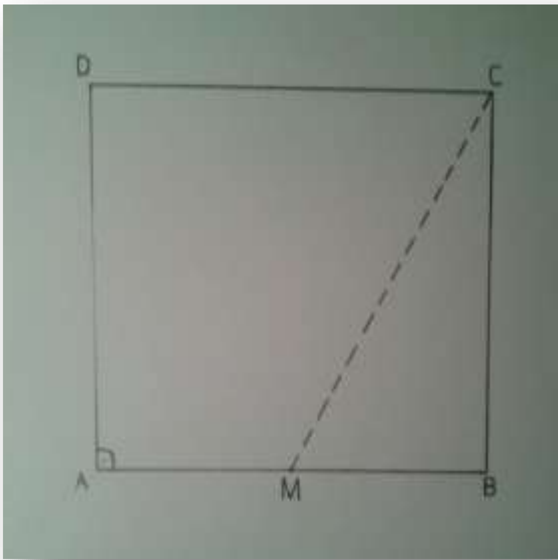
- **Złoty prostokąt**

Złoty podział odcinka ma też zastosowania w geometrii. Postanowiłyśmy skonstruować złoty prostokąt, w którym proporcja dłuższego boku do krótszego jest równa liczbie φ. Poniżej przedstawiamy kolejne etapy tej konstrukcji:

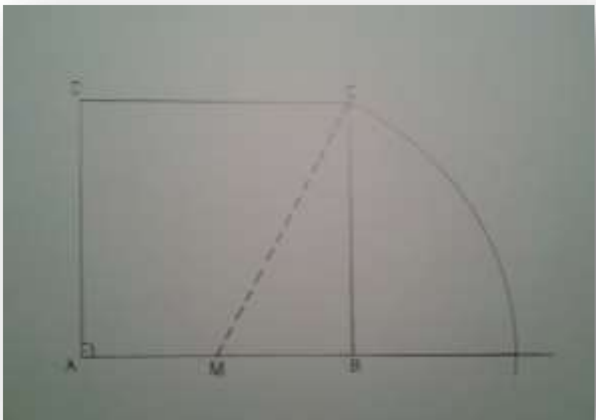
1. Narysuj kwadrat ABCD o boku dowolnej długości. Na środku odcinka AB wyznacz punkt M.



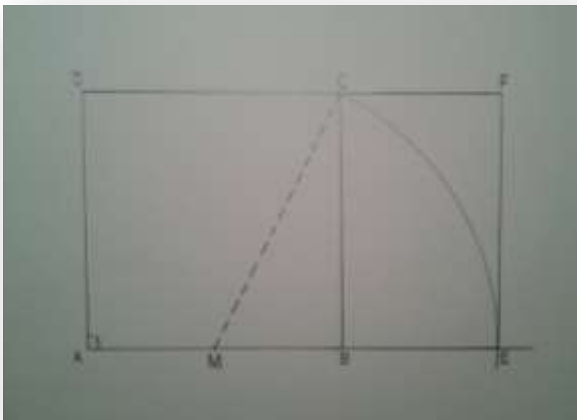
2. Z punktu M do punktu C poprowadź przerywana linię pomocniczą.



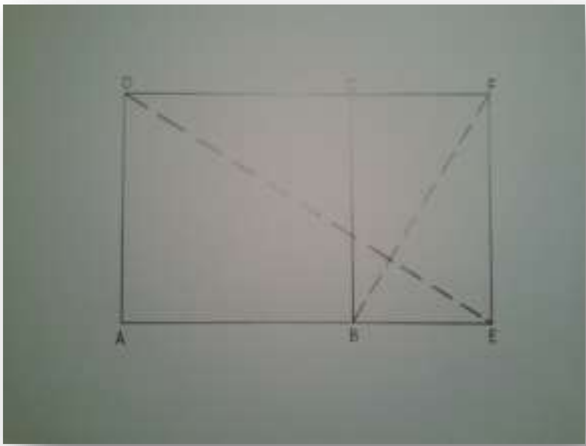
3. Przedłuż bok AB. Z punktu M zakreśl okrąg o promieniu MC.



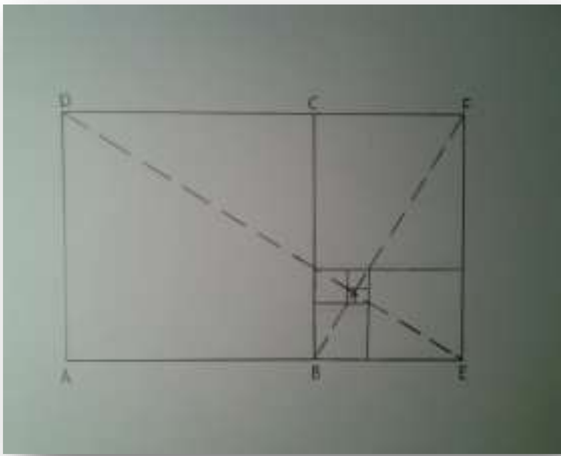
4. Punkt przecięcia przedłużenia boku AB z okręgiem oznacz literą E. Znajdź czwarty wierzchołek prostokąta - F i narysuj prostokąt AEFC.



5. W efekcie powstają dwa prostokąty : mniejszy BEFC i większy AEFD. Rysujemy po jednej przekątnej w każdym prostokącie.

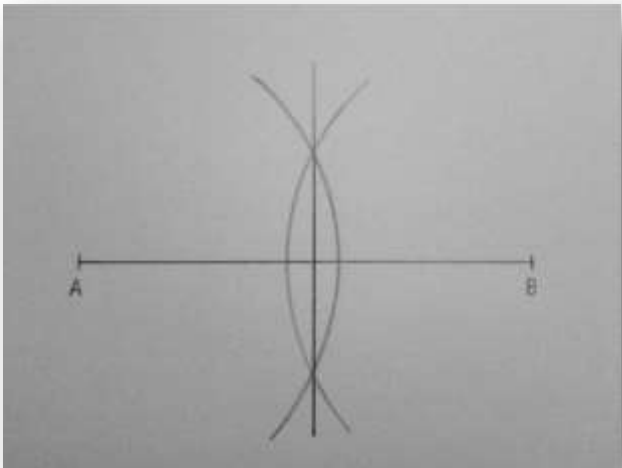


6. Dzielimy dalej każdy prostokąt na kwadrat i mniejszy prostokąt. Po chwili można zauważyć, że narysowane przekątne przecinają trzy wierzchołki prostokątów.

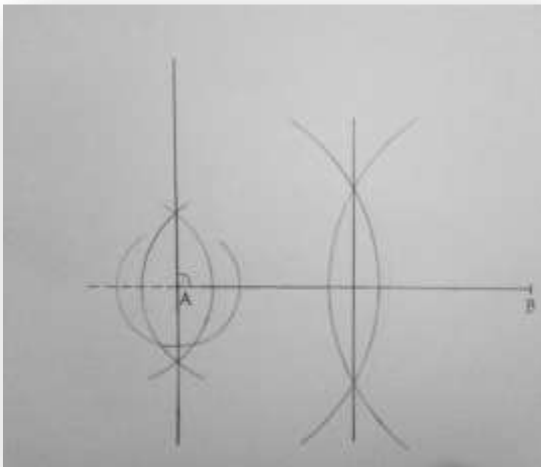


- **Złoty podział odcinka**

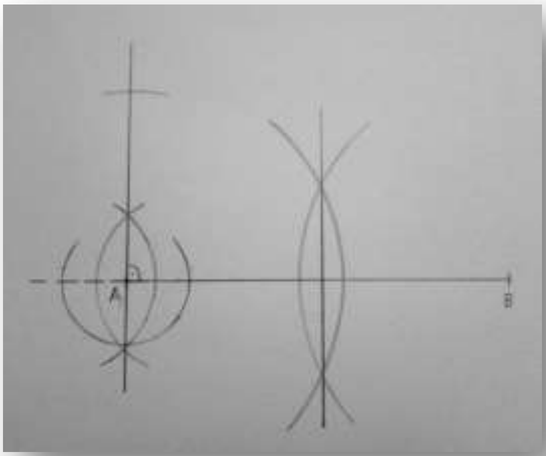
1. Rysujemy odcinek AB o dowolnej długości i konstrukcyjnie wyznaczamy środek tego odcinka.



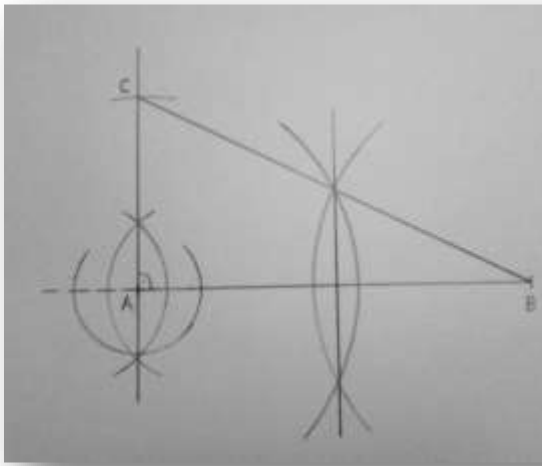
2. Przedłużamy odcinek AB (linia przerywana) i konstruujemy prostą prostopadłą do tego odcinka i przechodzącą przez punkt A.



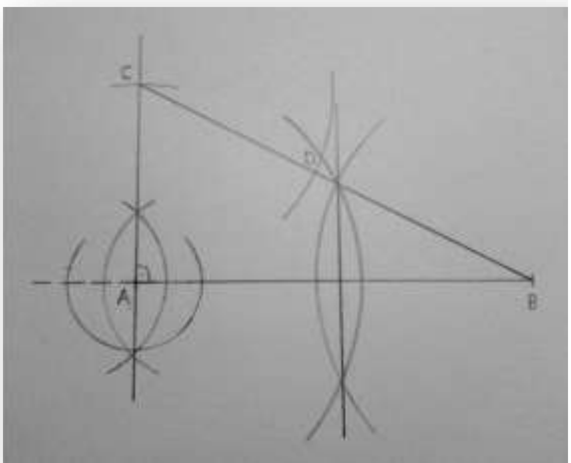
3. Z punktu A kreślimy okrąg o promieniu połowy odcinka AB.



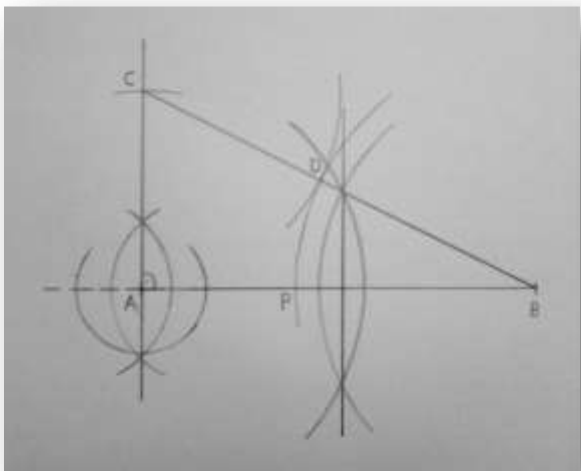
4. Punkt przecięcia prostej z okręgiem oznaczamy literą C. Łączymy ze sobą punkty B i C. Otrzymaliśmy trójkąt prostokątny ABC.



5. Z punktu C kreślimy okrąg o promieniu AC. Punkt przecięcia odcinka BC z okręgiem oznaczamy literą D.



6. Z punktu B kreślimy okrąg o promieniu BD. Punkt przecięcia odcinka AB z kręgiem oznaczamy literą P.



Punkt P podzielił odcinek AB w złotej proporcji.

Uzasadnienie konstrukcji oparte o twierdzenie Pitagorasa:

△ ABC jest prostokątny

AB=1

AC=$\frac{1}{2}$

PB=x

AP=1-x

BC=$\frac{1}{2}$+x

$1^2+(\frac{1}{2})^2=(x+\frac{1}{2})^2$

Stosujemy wzór skróconego mnożenia $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$:

$1+\frac{1}{4}=x^2+x+\frac{1}{4} \; \Big| -\frac{1}{4}$

$1=x^2+x$

$x^2+x-1=0$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$\Delta=b^2-4ac$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta=1+4=5$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$ $\qquad$ $\sqrt{5}\approx 2{,}24$

$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \ll 0$

Liczba x_1 nie spełnia warunków zadania (powstanie wartość ujemna)

$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}>0$

Liczba x_2 spełnia warunki zadania.

BP$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

AP$=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{2-\sqrt{5}+1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Sprawdzenie:

$\frac{BP}{AP}$, **bo BP > AP**

$$\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{9-5}=\frac{2\sqrt{5}+2}{4}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\varphi$$

Usuwamy niewymierność z mianownika stosując wzór skróconego mnożenia $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

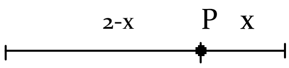
Zastosowania w matematyce

Złoty podział często pojawia się także w zadaniach matematycznych. Poniżej prezentujemy rozwiązania trzech z nich:

<u>zad.1</u>

Dokonano złotego podziału odcinka o długości 2. Oblicz długości odcinków na jaki podzielono dany odcinek i uzasadnij, że stosunek części dłuższej do krótszej jest równy liczbie φ.

1. Rysujemy dowolny odcinek i dzielimy go ,,na oko,, w złotym podziale:



2. Wyznaczamy równanie w postaci proporcji:

$$\frac{2}{2-x} = \frac{2-x}{x} \longrightarrow \frac{2}{2-x} = \frac{2-x}{x}$$

Po przekształceniu równanie będzie wyglądać tak:

$$2\text{x} = (2-x)^2$$

3.Rozwiązujemy równanie z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia (WSM):

$(a\text{-}b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$2x = 4 - 4x + x^2$$

$$2x - 4 + 4x - x^2 = 0$$

$$-x^2 + 6x - 4 = 0$$

4. Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$-x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$a = -1$$

$$b = 6$$

$$c = -4$$

Obliczamy deltę:

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=36-4\cdot 4$$

$$\Delta=20$$

Obliczamy pierwiastek z delty:

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$$

Wyznaczamy dwa pierwastki równania:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

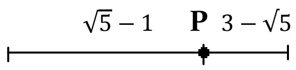
$$x_1=\frac{-6-2\sqrt{5}}{-2}=\frac{-6}{-2}-\frac{2\sqrt{5}}{-2}=3-\left(-\sqrt{5}\right)=3+\sqrt{5}>2$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-6+2\sqrt{5}}{-2}=\frac{-6}{-2}+\frac{2\sqrt{5}}{-2}=3-\sqrt{5}<2$$

x_2 to prawidłowy pierwiastek równania, ponieważ jego wartość jest mniejsza niż 2, czyli mniejsza niż całkowita długość odcinka.

5. Powracamy do początkowego odcinka i oznaczamy na nim wyliczone wartości:



$$x=3-\sqrt{5}$$

$$2-x=2-\left(3-\sqrt{5}\right)=2-3+\sqrt{5}=-1+\sqrt{5}=\sqrt{5}-1$$

$$\text{spr. } 3-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1=2$$

6. Uzasadniamy, że stosunek części dłuższej do krótszej jest równy liczbie φ.

$$\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$$

Posługujemy się WSM, aby usunąć niewymierność z mianownika:

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{(3-\sqrt{5})} \cdot \frac{(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{5}+5-3-1\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4} =$$

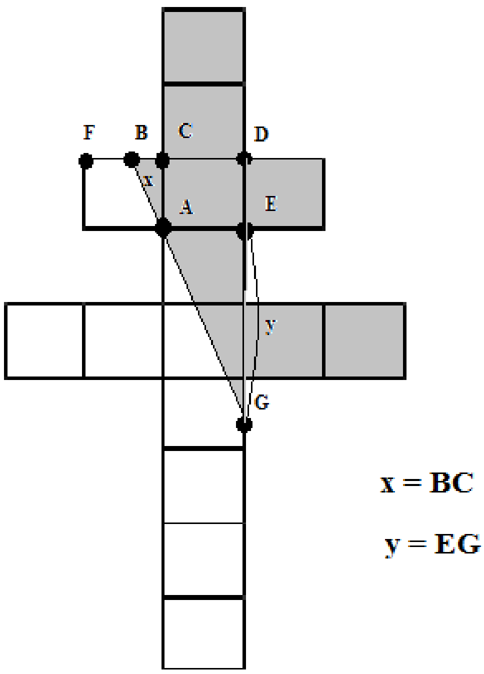
$$\frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{2}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

7. Piszemy odpowiedź:

Odp: Dany odcinek podzielono na odcinki o długości $\sqrt{5}-1$ oraz $3-\sqrt{5}$. Stosunek części dłuższej do krótszej jest równy liczbie φ.

<u>zad. 2</u>

Krzyż Lotaryngii przedstawiony na rysunku poniżej składa się z 15 jednostkowych kwadracików. Przez punkt A przeprowadzono prostą BG, która dzieli pole powierzchni krzyża na połowy. W jakim stosunku punkt B dzieli odcinek FC?



1. Obliczmy pole trójkąta BDG:

$$15 \div 2 = 7.5$$

$$7.5 - 5 = 2.5[j^2]$$

lub

$$\frac{(x+1)(y+1)}{2} = \frac{xy+y+x+1}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

2. Obliczamy pole trójkąta BCA i trójkąta AEG:

$$\frac{1 \cdot x}{2} + \frac{1 \cdot y}{2} = \frac{x+y}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

3. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} xy + y + x + 1 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ (3 - x) \cdot x + 3 - x + x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ 3x - x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

4. Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$-x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{-2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$$

$$x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{-2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$$

Pierwiastek x_2 jest prawidłowy, ponieważ pierwiastek x_1 jest liczbą większą niż 1, czyli większą niż długość odcinka FC.

5. Obliczmy długość odcinka FB:

$$1 - x = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi} \approx 0.618 \ldots$$

6. Stosunek odcinka BC do BF jest równy w przybliżeniu liczbie φ: 0.618/0.382≈1.618

7. Piszemy odpowiedź:

Odp: Punkt B dzieli odcinek FC w złotej proporcji.

zad.3

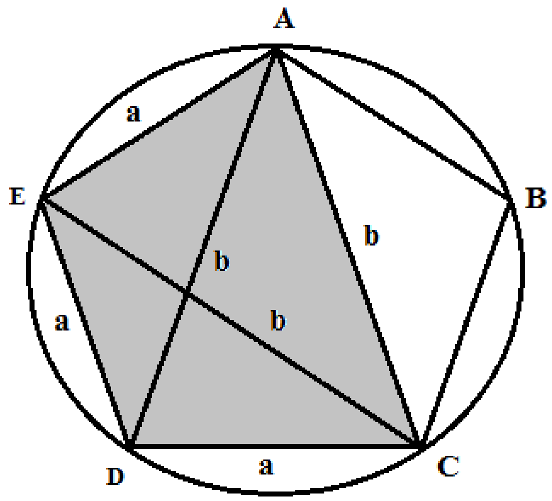
Uzasadnij, że stosunek długości przekątnej pięciokąta foremnego do długości boku tego pięciokąta wynosi φ= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie **Ptolemeusza**, starożytnego astronoma i matematyka.

Twierdzenie Ptolemeusza:

"Jeżeli czworokąt jest wpisany w okrąg, to iloczyn długości jego przekątnych jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków" .

Pięciokąt foremny ABCDE wpisujemy w okrąg. Długości przekątnych oznaczamy literą b, a długości boków pięciokąta foremnego oznaczamy literą a.



Stosujemy twierdzenie Ptolemeusza dla czworokąta AEDC.

$$a\cdot a + a\cdot b = b\cdot b$$

$$a^2 + ab - b^2 = 0$$

Wyznaczamy odcinek b ze względu na długość odcinka a.

$$-b^2 + ab + a^2 = 0$$

(b - niewiadoma)

$$\Delta = a^2 - 4\cdot(-1)\cdot a^2 = 5a^2$$

$$\sqrt{\Delta} = \boldsymbol{a}\sqrt{\mathbf{5}}$$

$$b_1 = \frac{-a - a\sqrt{5}}{-2} = \frac{a + a\sqrt{5}}{2} > 0$$

$$b_2 = \frac{-a + a\sqrt{5}}{-2} = \frac{a - a\sqrt{5}}{2} < 0$$

Sprawdzamy:

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{a + a\sqrt{5}}{2}}{a} = \frac{a + a\sqrt{5}}{2a} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \boldsymbol{\varphi}$$

Złoty cyrkiel

Postanowiłyśmy zbudować złoty cyrkiel za pomocą, którego można sprawdzić czy dane przedmioty zachowują złotą proporcję.

Cyrkiel składa się z kilku drewnianych elementów o różnych wymiarach, każdy ma szerokość 1cm. Dwie najdłuższe listewki mają długość 34 cm. Średnia 21 cm, a najmniejsza 13 cm. Średnia i mała listewka przecinają najdłuższą na wysokości 21 cm, natomiast mała listewka krzyżuje się ze średnią na wysokości 8cm.

Używając cyrkla udało nam się znaleźć kilka przedmiotów, w których pojawia się stosunek φ:

Szkatułka na biżuterię

Elementy laptopa

Buty

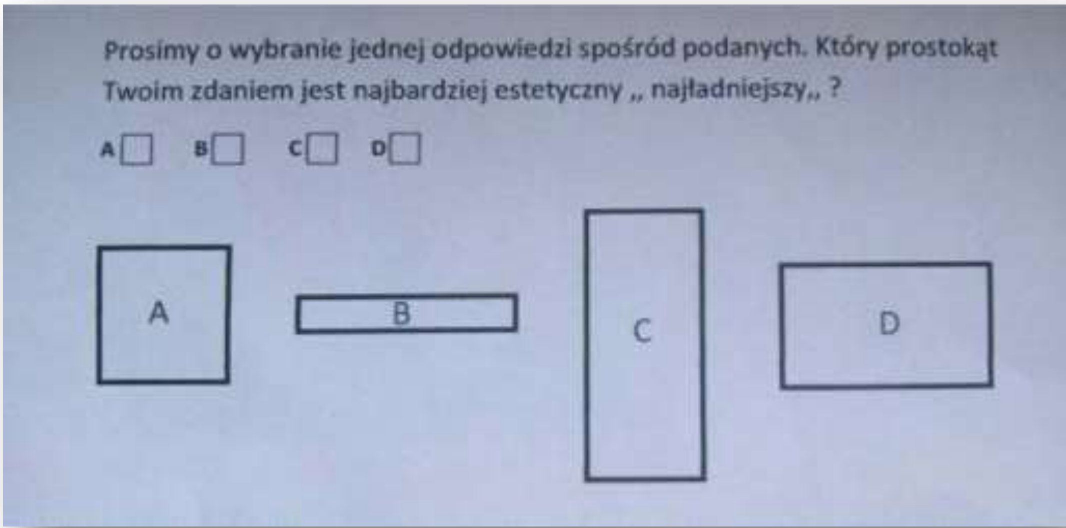
Okulary

Uchwyt w szufladzie

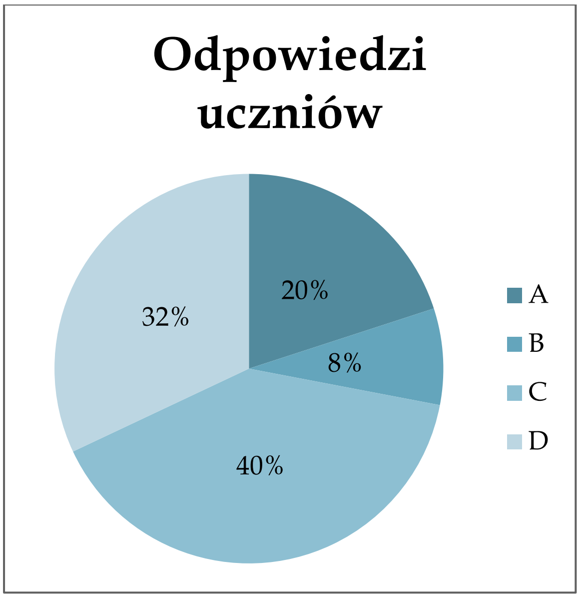
Klucze

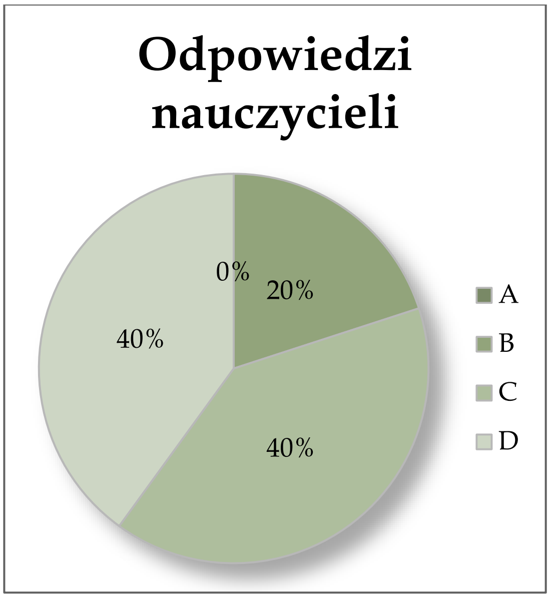
Ankieta

Przeprowadziłyśmy ankietę, która miało sprawdzić czy ludzkie oko potrafi zauważyć złotą proporcję. Wzięło w niej udział 30 osób (25 uczniów i 5 nauczycieli). Poniżej przedstawiamy jak wyglądała ankieta i jakie były jej wyniki:



Wyniki ankiety:





Złoty prostokąt był przedstawiony w odpowiedzi D. Najwięcej osób wybrało tą odpowiedź oraz prostokąt C, którego wymiary były przybliżone do wymiarów złotego prostokąta.

Podsumowanie

Przygotowanie tej pracy dało nam wiele satysfakcji i wiele nas nauczyło. Mamy nadzieję, że wybrany przez nas temat i sposób prezentacji jest interesujący. Złota proporcja dowodzi, iż świat jest matematyczny, chociaż nie zawsze zdajemy sobie z tego sprawę.

Literatura:

- **"Przez rozrywkę do wiedzy", Stanisław Kowal.**
- **"Złota proporcja", Fernando Corbalán.**
- **"Przygody Alexa w krainie liczb", Alex Bellos.**
- **pl.wikipedia.org**
- **analizy.investio.pl**

KONIEC