

Wzór Eulera z wykorzystaniem klocków Reko

Bartłomiej Zemlik

Klasa IVa
Szkoła Podstawowa
im. Bohaterów Monte Cassino w Kętach
ul. Wyspiańskiego 1 32-650 Kęty

Opiekun – dr Katarzyna Wadoń-Kasprzak

Spis Treści

Wstęp.....	3
1.Postać Leonharda Eulera.....	4
2.Twierdzenie Eulera.....	5
3.Sprawdzenie wzoru Eulera dla różnych przypadków wielościaków.....	6
3.1.Graniastosłupy.....	6
3.2.Ostrosłupy.....	7
3.3.Graniastosłupy połączone z ostrosłupami.....	9
3.4.Wielościaki niewypukłe.....	11
4.Charakterystyka graniastosłupa i ostrosłupa n-kątnego.....	13
Literatura.....	14

Wstęp

Moja praca jest o wzorze Eulera. Wybrałem ten temat ponieważ, mnie zainteresował. Opisałem kilka rzeczy na temat wzoru Eulera. Całą pracę napisałem sam pod kierunkiem pani nauczycielki, jak również z pomocą stron internetowych. Zajmowanie się tym tematem i napisanie o nim sprawiło mi wiele przyjemności. Mam nadzieję, że praca się wszystkim spodoba. Inspiracją do napisania pracy był udział mojej klasy w Nocy Naukowców w Krakowie w dniu 27 września 2013 roku. W trakcie warsztatów pt. „Magia wzoru Eulera” budowaliśmy wielościany z klocków Reko i sprawdzaliśmy prawdziwość wzoru Eulera. W mojej pracy również wykorzystałem klocki Reko.

1. Postać Leonharda Eulera



Leonhard Euler (ur. 15 kwietnia 1707 w Bazylei, zm. 18 września 1783 w Petersburgu) – szwajcarski matematyk i fizyk; był pionierem w wielu obszarach obu tych nauk. Większość czasu życia spędził w Rosji i Prusach. Jest uważany za jednego z najbardziej produktywnych matematyków w historii.

Dokonał licznych odkryć w tak różnych gałęziach matematyki jak rachunek różniczkowy i całkowy oraz teoria grafów. Wniósł duży wkład w rozwój terminologii i notacji matematycznej, szczególnie trwały w dziedzinie analizy matematycznej. Jako pierwszy w historii użył na przykład pojęcia i oznaczenia funkcji. Opublikował wiele ważnych prac z zakresu mechaniki, optyki i astronomii. Euler jest uważany za czołowego matematyka XVIII wieku i jednego z najwybitniejszych w całej historii.

2. Twierdzenie Eulera

Twierdzenie zostało udowodnione przez Eulera w 1752 r.

Niech dany będzie dowolny wielościan wypukły. Jeśli

1. **w** oznacza liczbę wierzchołków,
2. **k** oznacza liczbę krawędzi,
3. **s** oznacza liczbę ścian,

to zachodzi wzór :

$$w - k + s = 2$$

Równanie Eulera ma swoją wersję dla wielokątów, mianowicie

każdy wielokąt wypukły ma tyle wierzchołków, co krawędzi,

czyli

$$w = k \text{ lub } w = k = 0.$$

Poszukajmy jej w jeszcze niższym wymiarze:

każdy odcinek na prostej ma dwa wierzchołki końcowe,

tzn. $w = 2$.

3. Sprawdzenie wzoru Eulera dla różnych przypadków wielościanów

3.1 Graniastosłupy

- sześcián

$$w=8$$

$$k=12$$

$$s=6$$

$$w - k + s = 8 - 12 + 6 = 2$$

- prostopadłościan

$$w=8$$

$$k=12$$

$$s=6$$

$$w - k + s = 8 - 12 + 6 = 2$$

- graniastosłup trójkątny

$$w=6$$

$$k=9$$

$$s=5$$

$$w - k + s = 6 - 9 + 5 = 2$$

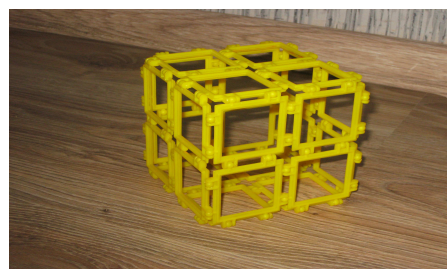
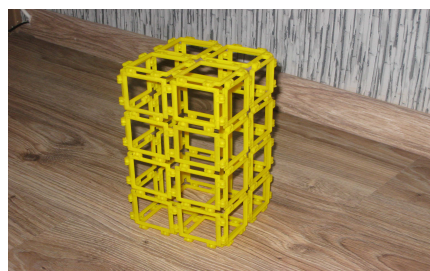
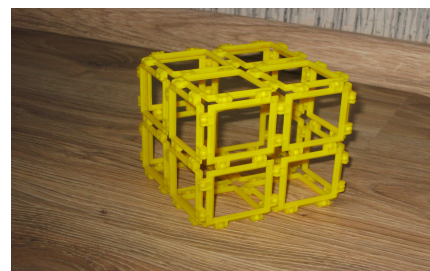
- graniastosłup czworokątny

$$w=8$$

$$k=12$$

$$s=6$$

$$w - k + s = 8 - 12 + 6 = 2$$



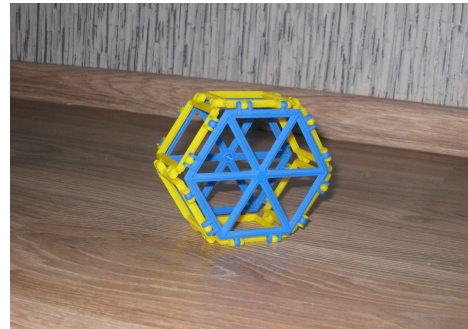
-graniastosłup sześciokątny

$$w=12$$

$$k=18$$

$$s=8$$

$$w - k + s = 12 - 18 + 8 = 2$$



-graniastosłup ośmiokątny

$$w=12$$

$$k=18$$

$$s=8$$

$$w - k + s = 12 - 18 + 8 = 2$$



3.2 Ostrosłupy

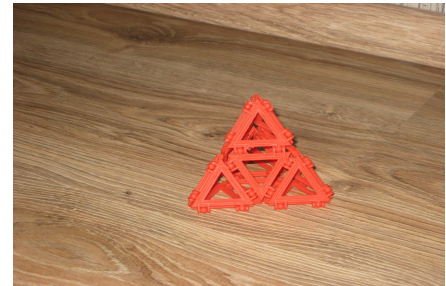
- ostrosłup trójkątny

$$w=4$$

$$k=6$$

$$s=4$$

$$w - k + s = 4 - 6 + 4 = 2$$



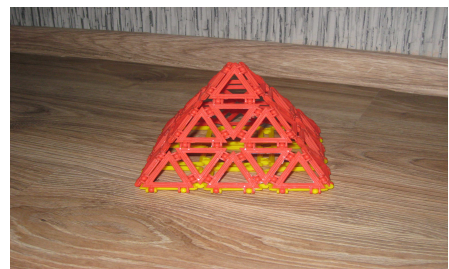
- ostrosłup czworokątny

$$w=5$$

$$k=8$$

$$s=5$$

$$w - k + s = 5 - 8 + 5 = 2$$



3.3 Graniastosłupy połączone z ostrosłupami

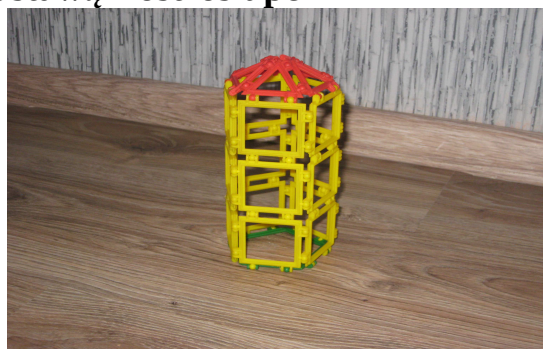
- graniastosłup pięciokątny połączony podstawą z ostrosłupem

$$w=11$$

$$k=20$$

$$s=11$$

$$w - k + s = 11 - 20 + 11 = 2$$



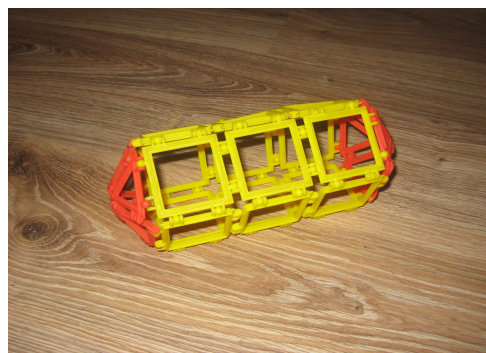
- graniastosłup pięciokątny połączony podstawami z ostrosłupami

$$w=12$$

$$k=25$$

$$s=15$$

$$w - k + s = 12 - 25 + 15 = 2$$



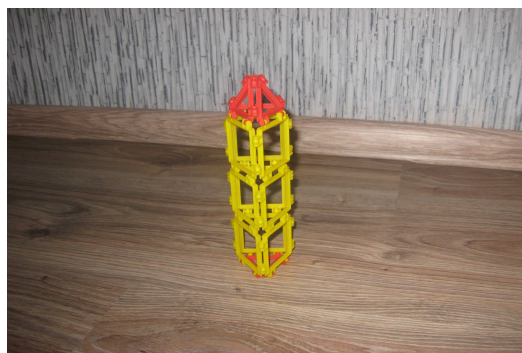
-graniastosłup trójkątny połączony podstawą z ostrosłupem

$$w=7$$

$$k=12$$

$$s=7$$

$$w - k + s = 7 - 12 + 7 = 2$$



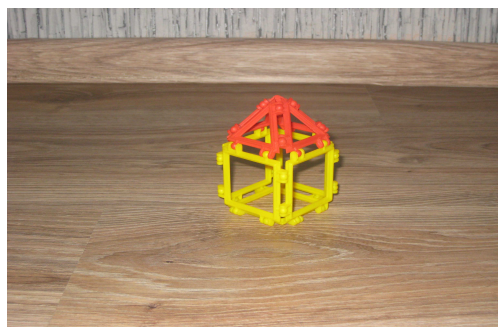
- graniastosłup czworokątny połączony podstawą z ostrosłupem

$$w=9$$

$$k=16$$

$$s=9$$

$$w - k + s = 9 - 16 + 9 = 2$$



3.4 Wielościany niewypukłe

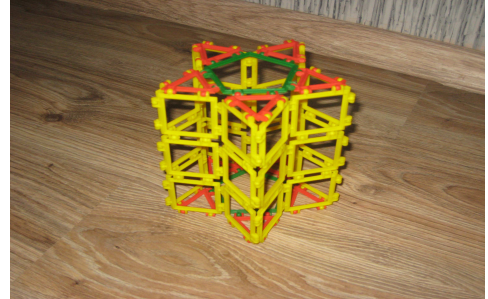
- graniastosłup pięciokątny gwiaździsty

$$w=20$$

$$k=30$$

$$s=12$$

$$w - k + s = 20 - 30 + 12 = 2$$



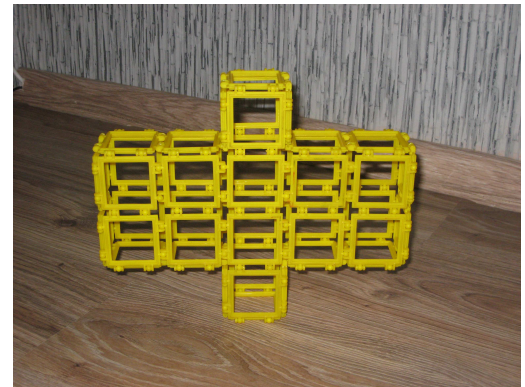
-Krzyż

$$w=24$$

$$k=30$$

$$s=18$$

$$w - k + s = 24 - 30 + 18 = 2$$



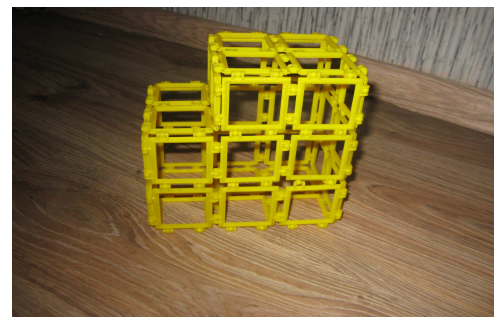
- Schodek

$$w=12$$

$$k=18$$

$$s=6$$

$$w - k + s = 12 - 18 + 6 = 0$$



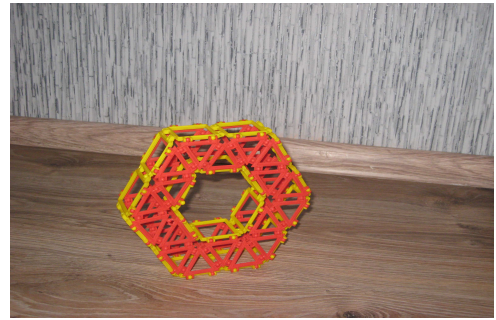
- graniastosłup niewypukły „z dziurką”

$$w=24$$

$$k=48$$

$$s=24$$

$$w - k + s = 24 - 48 + 24 = 0$$



W 1813 roku Simon Antoine Jean Lhuillier udowodnił, że dla wielościanów „dziurami” wzór Eulera przyjmuje postać $W - K + S = 2 - 2g$ gdzie g jest liczba „dziur”.

4. Charakterystyka graniastosłupa i ostrosłupa n-kątnego i sprawdzenie wzoru Eulera w przypadku tych brył

4.1 Graniastosłup n-kątny

$s=n+2$ ilość ścian (n ścian bocznych i 2 podstawowych)

$k=3n$ ilość krawędzi (n krawędzi bocznych i 2n krawędzi podstawowych)

$w=2n$ ilość wierzchołków

Wtedy: $S + W - K = (n+2) + 2n - 3n = 2$

4.2 Ostrosłup n-kątny

$s=n+1$ ilość ścian (n ścian bocznych i 1 podstawa)

$k=2n$ ilość krawędzi (n krawędzi bocznych i n krawędzi podstawowych)

$w=n+1$ ilość wierzchołków

wtedy: $s+w-k=(n+1)+(n+1)-2n=2$

