„Matematyka jest
miarą wszystkiego”

Arystoteles

„Ptolemeusz – matematyk i astronom”

Bartłomiej Zajda

Zespół Szkół Publicznych Nr 2

w Wadowicach

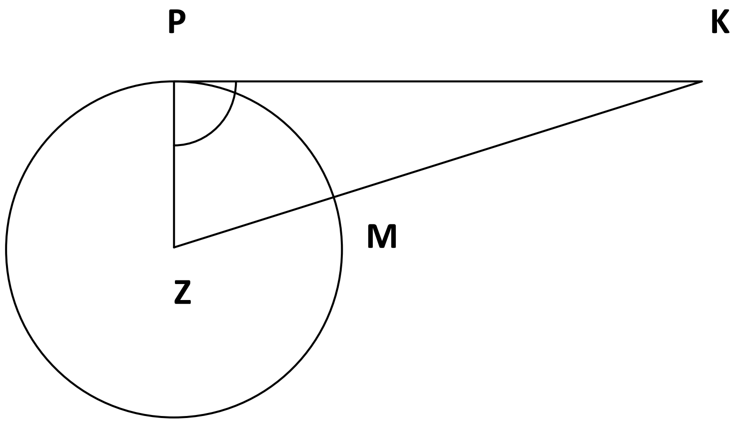
tel. 33 82 324 80

zsp2wadowice@poczta.onet.pl

Pochodzę z Wadowic, tutaj ukończyłem Szkołę Podstawową Nr 5 im. Mikołaja Kopernika , a obecnie uczę się w Gimnazjum Nr 3. Tradycją mojej szkoły jest poznawanie sylwetki Patrona, dlatego wiele informacji związanych z astronomią do mnie dociera .

Zaciekawiła mnie teoria geocentryczna . Jednak czytając biografię jej twórcy zobaczyłem , że był on nie tylko astronomem, ale także matematykiem i geografem. Nazywał się Ptolemeusz , a właściwie Klaudiusz Ptolemeusz. Pochodził z Grecji. Lata jego życia przypadają od 100 roku do 160 r. ne. Urzędował i edukował się w Imperium Rzymskim , a szczegółowiej to w Aleksandrii należącej wówczas do tego cesarstwa . Jego najsłynniejszym odkryciem była teoria geocentryczna , która została obalona przez samego Mikołaja Kopernika . To , że teoria ta była błędna to nie znaczy , że Ptolemeusz nie był wykształconą osobą . Najlepszym dowodem na to jest fakt iż grecki astronom obliczył między innymi odległość Ziemi od Księżyca . Zobaczmy jak tego dokonał.

Załóżmy , że punkt K , będzie symbolizował Księżyc , Z to będzie środek koła (czyli kuli ziemskiej) , a P niech będzie punktem na powierzchni Ziemi , z którego obserwujemy wschód księżyca, w chwili gdy jest on ponad punktem M .Doskonale ilustruje to poniższy rysunek :



Jeżeli P jest punktem, z którego obserwujemy wschód Księżyca to prosta KP jest styczna do okręgu , więc trójkąt KZP jest prostokątny . Odległość , którą szukamy , czyli odległość z Ziemi do Księżyca to odcinek |ZK| , uważając Księżyc za punkt w przestrzeni . Dla uproszczenia obliczeń możemy uznać , że punkty P i M znajdują się na równiku . Odcinek |ZP| Ptolemeusz musiał znać z wyliczeń innego znakomitego matematyka Eratostenesa (6000 km) . Wartość kąta środkowego Z wyliczymy z długości łuku PM , który jest równy różnicy długości geograficznych punktów P oraz M . Pierwsze wzmianki o wyliczaniu długości oraz szerokości geograficznych pochodzą z II w p.n.e , a obliczenia te wykonywał Hipparchos . Z tego wynika , ze Klaudiusz Ptolemeusz musiał umieć wyliczać wyżej wspomniane odcinki . Wartość kąta Z wynosi 89°4’12’’ . Z tablic Hipparcha wynika , że cos Z = 0,0163 . Należy wiec zanotować :

PZ:ZK = cos 89°4’12’’=0,0163

Po przekształceniu można napisać , ze :

PZ = ZK · 0,0163

A po jeszcze jednym przekształceniu otrzymujemy , że ZK = PZ:0,0163

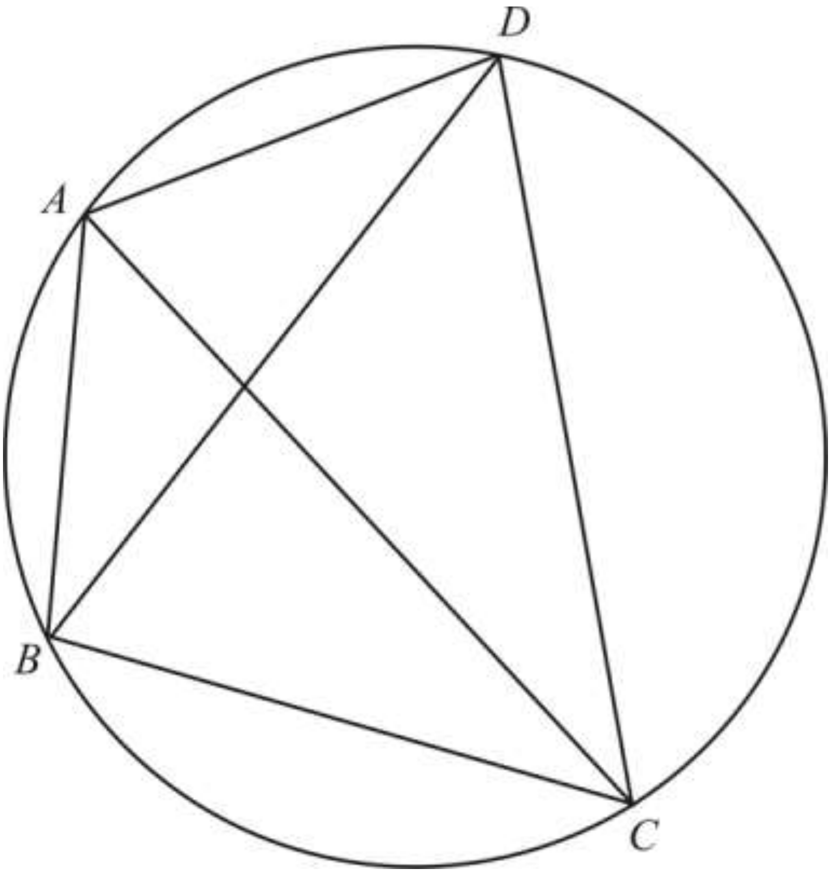
Długość promienia Ziemi , czyli PZ była mu jak pisałem znana i wynosiła 6000 km , dlatego podstawimy ją do równania .

ZK= 6000 km :0,0163 = (w przybliżeniu) 367 500 km

Obecnie przyjmuje się , że długość ta wynosi 384 400 km , więc wynik jak na tamte czasy można powiedzieć , że prawie idealny , a jeszcze trzeba pamiętać , że promień ziemski wynosi nie 6000 km , a 6371 km , a wartość cosinusa też jest przybliżona .

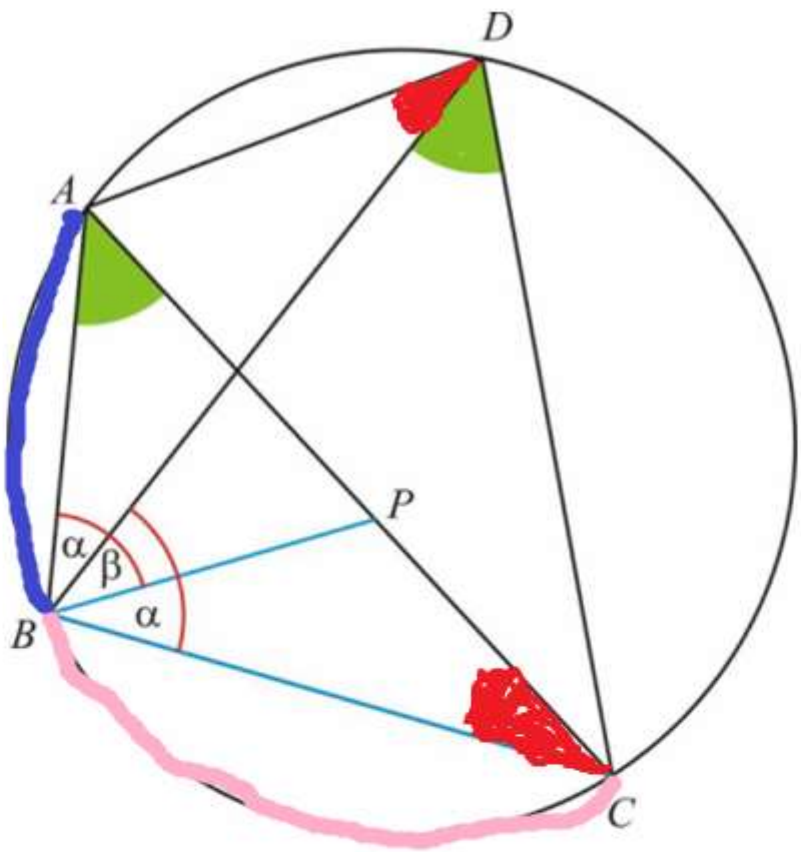
Ważnym elementem dokonań naukowych Ptolemeusza , a obecnie dosyć zapomnianym było sformułowanie twierdzenia o iloczynach długości przekątnych w czworokącie wpisanym w okrąg . I tutaj pojawia się ważna kwestia . Kiedy na czworokącie można opisać okrąg ? Odpowiedź jest banalna . Gdy suma miar przeciwległych kątów tego wielokąta jest równa 180° . Twierdzenie to nazwane na część odkrywcy twierdzeniem Ptolemeusza brzmi następująco: **iloczyn długości przekątnych w czworokącie wpisanym w okrąg jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków** .

Lepiej to wyjaśnia ten rysunek:



|AC| · |BD| = |AD| · |BC| + |AB| · |DC|

Jednak jak udowodnić , że jest to prawda ? Wystarczy na przekątnej AC narysować dowolny punkt , ja nazwę go P , ale nie może on być byle jakim punktem . Musi leżeć w takim miejscu , żeby kąt PBC był równy kątowi ABD , co ilustruje poniższy rysunek . Kąty , które są zaznaczone na zielono na obrazku mianowicie kąt BAC oraz kąt BDC mają takie same miary , gdyż są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku . Łuk ten ma zaznaczyłem kolorem różowym . To samo można powiedzieć o kątach , które są pomalowane na czerwono , czyli o kątach ADB oraz ACB . Również są wpisane i oparte na tym samym łuku , który zaznaczyłem kolorem niebieskim.



Kolejnym punktem w udowadnianiu tego twierdzenia musi być znalezienie 2 par trójkątów podobnych . Na pierwszy rzut oka wysuwa się trójkąt ABP oraz trójkąt DBC . O tych trójkątach można powiedzieć , że są podobne , gdyż mają 3 kąty o takiej samej mierze. Pierwszy identyczny kąt w obu trójkątach jest zaznaczony na zielono , drugi to suma $\alpha + \beta$, a trzeci mają taki sam , bo suma kątów w trójkącie zawsze jest równa 180 stopni . Mając trójkąty podobne układamy proporcję :

$|DB| : |AB| = |DC| : |AP|$

Drugą parą trójkątów podobnych jest trójkąt BPC oraz trójkąt BAD . Tutaj również wykorzystamy zasadę , że jeżeli 2 trójkąty mają 3 kąty o takiej samej mierze to są podobne . Jak widać na rysunku są to kąty zamalowane na czerwono , są również kąty α i jest ostatni kąt , który tak jak poprzednim razem musi być taki sam , gdyż suma kątów w trójkącie zawsze wynosi 180 stopni . Posiadając drugą parę trójkątów podobnych układamy również proporcję :

$|AD| : |PC| = |DB| : |BC|$

Teraz należy przekształcić te proporcję na iloczyny :

$$|DB| : |AB| = |DC| : |AP| \longrightarrow |DB| \cdot |AP| = |AB| \cdot |DC|$$

$$|AD| : |PC| = |DB| : |BC| \longrightarrow |PC| \cdot |DB| = |AD| \cdot |BC|$$

Po dodaniu tych dwóch iloczynów stronami wychodzi nam :

$|DB| \cdot |AP| + |PC| \cdot |DB| = |AB| \cdot |DC| + |AD| \cdot |BC|$

Po lewej stronie równania możemy przed nawias wyciągnąć wspólny czynnik $|DB|$ i tak właśnie zrobimy :

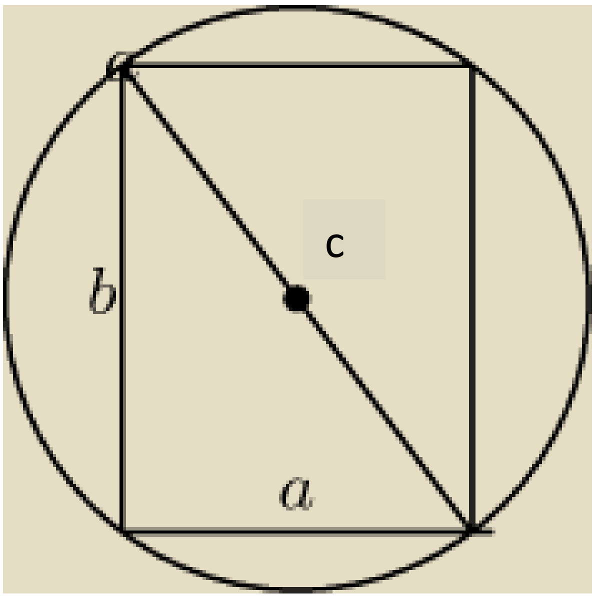
$|DB| \cdot (|AP| + |PC|) = |AB| \cdot |DC| + |AD| \cdot |BC|$

Jak należy zauważyć na rysunku drugim , $|AP| + |PC| = |AC|$. Zamieniamy sumę odcinków $|AP| + |PC|$ na $|AC|$. Wychodzi nam równanie , które jest zapisaną symbolicznie tezą twierdzenia Ptolemeusza .

$|DB| \cdot |AC| = |AB| \cdot |DC| + |AD| \cdot |BC|$

Iloczyn długości przekątnych = sumie iloczynów przeciwległych boków w czworokącie wpisanym w okrąg.

Na podstawie tego wzoru można udowodnić również jakżeż popularne twierdzenie Pitagorasa , i to w banalny sposób. Spójrzmy na rysunek załączony poniżej :



Na rysunku są dwa przystające trójkąty prostokątne ,dlatego widzimy prostokąt. Znając już twierdzenie może od razu przejdźmy do obliczeń . Suma iloczynów długości przeciwległych boków w tym wypadku będzie wynosić :

$a \cdot a + b \cdot b$

Natomiast iloczyn przekątnych będzie równy

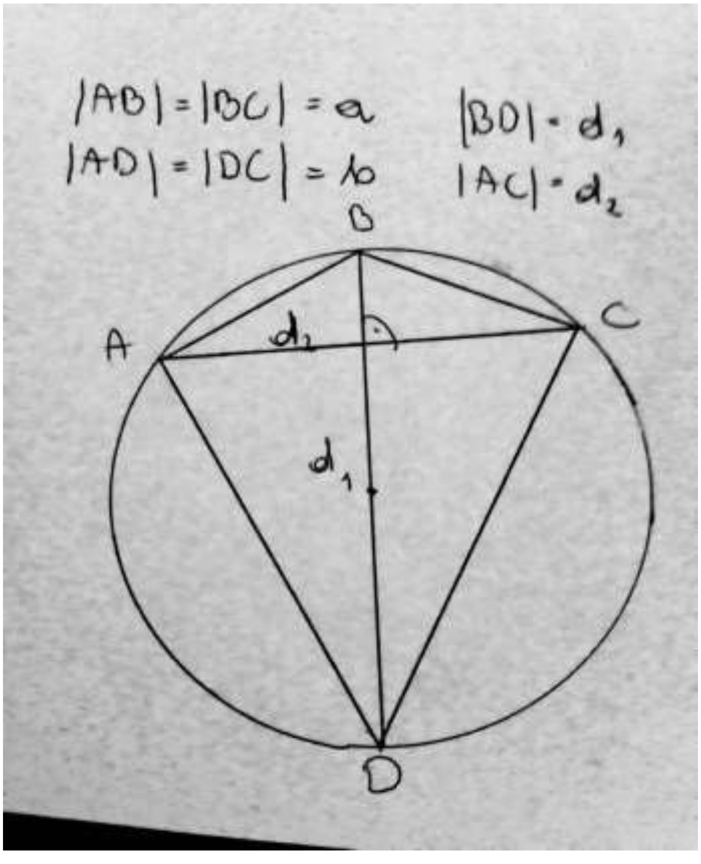
$c \cdot \mathbf{c}$

Po zapisaniu iloczynów w postaci potęg wychodzi nam równanie :

$a^2 + b^2 = c^2$, a tak wygląda twierdzenie Pitagorasa oraz droga wyprowadzania go z twierdzenia Ptolemeusza .

Teza Ptolemeusza jest bardzo , ale to bardzo uniwersalna . Można z niej wyprowadzić wiele wzorów , ale myślę , że ten , który zaraz pokażę jest bardzo przydatny . Mianowicie jest to twierdzenie mówiące , że pole deltoidu wpisanego w koło jest równe iloczynowi długości dwóch jego przeciwległych boków . Twierdzenie Ptolemeusza brzmi trochę inaczej , gdyż jest tam wspominany iloczyn długości przekątnych , a nie pole deltoidu . W takim razie pole deltoidu oraz iloczyn długości przekątnych w takiej figurze wpisanej w okrąg musi być równy. Korzystając ze wzoru , że pole deltoidu jest równe połowie iloczynu długości przekątnych piszemy równanie :

$\frac{1}{2} d_2 \cdot d_1 = P$ (polu deltoidu)



Natomiast stosując twierdzenie Ptolemeusza otrzymujemy na następującą równość :

$d_2 \cdot d_1 = a\cdot b + a\cdot b$

Redukując wyrazy podobne po lewej stronie będziemy mieli :

$d_2 \cdot d_1 = 2ab$

Podstawiając do pierwszego równania za iloczyn przekątnych 2ab wyliczamy , że

$a\cdot b = P$

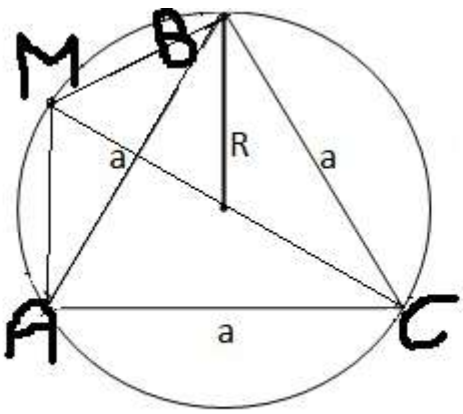
Znając taki wzór , bez najmniejszego problemu rozwiązujemy zadania z polem deltoidu wpisanego w koło , bo znając tylko długości dwóch różnych boków , obliczamy jego pole .

Teraz chciałbym przedstawić dwa możliwe zastosowania twierdzenia Ptolemeusza w zadaniach .

Zadanie 1

W okrąg wpisano trójkąt równoboczny ABC . Jeżeli M jest dowolnym punktem tego okręgu to udowodnij , że jedna z odległości |AM| , |BM| lub |CM| jest równa sumie dwóch pozostałych .

Myślę , że lepiej uzmysłowić sobie tą sytuację patrząc na poniższy rysunek .



Z warunków zadania wynika iż $|AB| = |BC| = |AC| = a$

Teraz napiszemy równość wynikającą z twierdzenia Ptolemeusza , ponieważ mamy czworokąt wpisany w okrąg .

$|AB| \cdot |MC| = |MB| \cdot |AC| + |AM| \cdot |BC|$

Teraz zamieniamy |AB| , |BC| i |AC| na a .

$|MC| \cdot a = |MB| \cdot a + |MA| \cdot a$ /:a

|MC| = |MB| + |MA|

$\downarrow$

|CM| = |BM| + |AM|

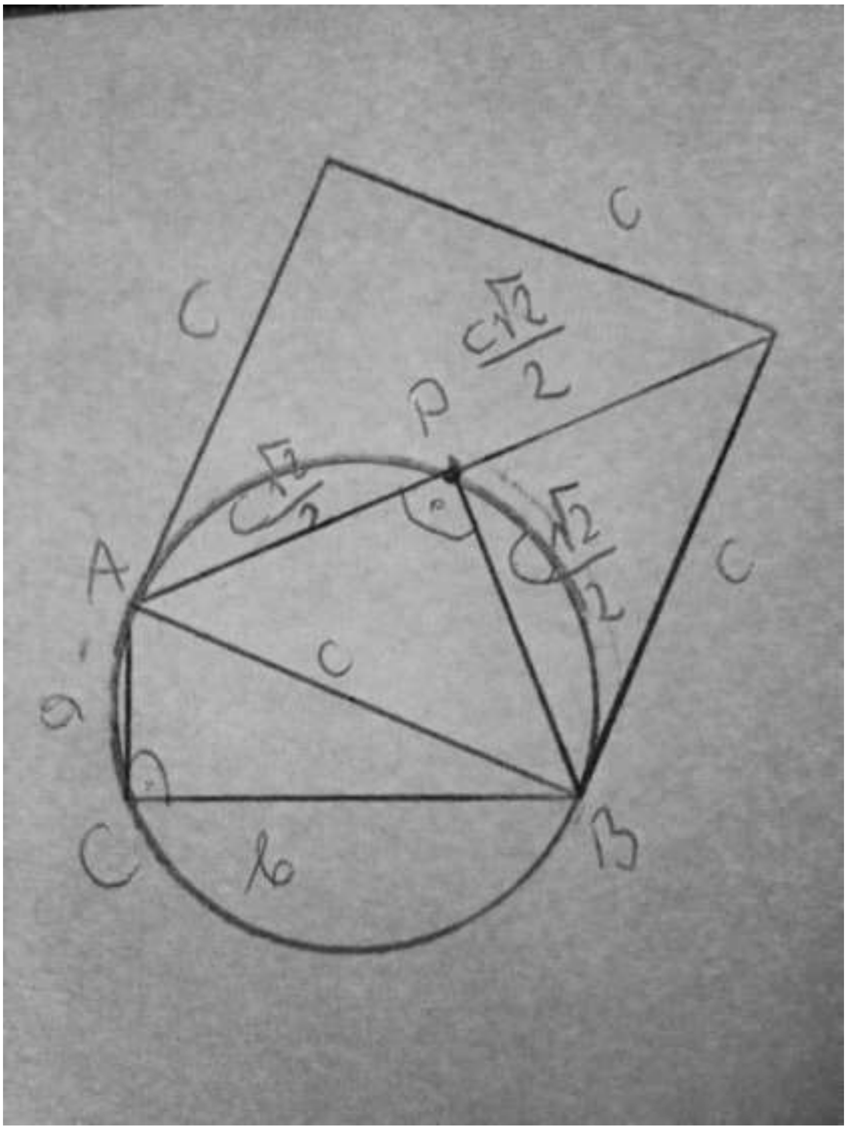
$\swarrow$

Cnd

Zadanie 2

Na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ABC (gdzie kąt C = 90°) zbudowano na zewnątrz kwadrat . Oblicz odległość punktu przecięcia przekątnych kwadratu P od punktu C jeśli wiesz , że a + b = m (a, b – długości przyprostokątnych) .

Sytuację tą doskonale ilustruje ten rysunek :



Na czworokącie APBC da się opisać okrąg , bo miara kąta C = 90° , miara kąta P = 90° z czego wynika , że miara kąta A + miara kąta B = 180°

2 boki w tym czworokącie będą miały długość ½ $C\sqrt{2}$, a dwa pozostałe A oraz B . Teraz należy wykorzystać twierdzenie Ptolemeusza :

$\frac{1}{2} C\sqrt{2} \cdot b + \frac{1}{2} C\sqrt{2} \cdot a = c \cdot x$ (gdzie x = długości drugiej przekątnej) / :1/2

$C\sqrt{2} \cdot b + C\sqrt{2} \cdot a = 2\, c \cdot x$

$bc\sqrt{2} + ac\sqrt{2} = 2\, c \cdot x$ / :2c

$(bc\sqrt{2} + ac\sqrt{2}) : 2c = x$

$\frac{1}{2} b\sqrt{2} + \frac{1}{2} a\sqrt{2} = x$

Teraz wyciągniemy wspólny czynnik przed nawias . W warunkach zadania było , że a + b = m

$\frac{1}{2} \sqrt{2}\,(a + b) = x$

$x = \frac{1}{2} m\sqrt{2}$

Odp . Odległość punktu przecięcia przekątnych kwadratu P od punktu C wynosi ½ $m\sqrt{2}$.

Myślę , że tą pracą rozjaśniłem jaką wybitną postacią był Ptolemeusz oraz wyjaśniłem jego najważniejsze osiągnięcia . Pokazałem , że twierdzenie Ptolemeusza jest bardzo uniwersalne i można z niego wyprowadzić bardzo wiele wzorów . W wielu zadaniach to twierdzenie może nam ułatwić życie .

Literatura :

1. „Przez rozrywkę do wiedzy" Rozmaitości matematyczne , Stanisław Kowal , Wydawnictwo Naukowo Techniczne .
2. Matematyka – czasopismo dla nauczycieli nr 4 / 2003
3. pl.wikipedia.org
4. Bazy ciekawych zadaniach w Internecie .