Inwersja na płaszczyźnie, własności, konstrukcje, zastosowania

Autor: Rafał Kłoda
Opiekun pracy: Bożena Witecka

XI Liceum Ogólnokształcące im. Marii Dąbrowskiej

os. Teatralne 33

31-948 Kraków

tel./fax: 12 644-07-26

Streszczenie pracy

W tej pracy zajmę się przybliżeniem czytelnikowi tematu inwersji. Jest to temat bardzo ciekawy, choć większości nieznany.

Pracę zamieszczoną w dalszej części dokumentu podzieliłem na kilka pomniejszych sekcji. Każda z nich opisuje inną część zagadnień związanych z inwersją poszczególne sekcje to:

1. Czym jest inwersja? - znajduje się tam krótki opis inwersji.
2. Definicja inwersji - tytuł działu mówi o wszystkim, co się tam znajduje.
3. Własności inwersji - opisanych oraz udowodnionych jest tam kilka własności inwersji (część z nich będzie pomocna w dalszej części pracy).
4. Konstrukcje - ten dział pokazuje, jak odnaleźć obraz punktu, który chcemy przekształcić.
5. Obrazy prostych i okręgów w inwersji - w tym dziale pokazane są najciekawsze rzeczy dotyczące inwersji. Znajduje sie tam opis wyglądu obrazów prostych i okręgów w zależności od ich położenia względem okręgu inwersyjnego.
6. Zastosowanie inwersji w rozwiązywaniu problemów matematycznych - jest tam pokazane, jak za pomocą inwersji można rozwiązać problem łańcucha Steinera, czy udowodnić wzór Eulera.
7. Zakończenie - kilka słów którymi opisuję moje zdanie na temat inwersji.
8. Źródła - zbiór źródeł które zostały wykorzystane przy tworzeniu pracy.

1. Czym jest Inwersja?

Inwersję można w znaczącym uproszczeniu określić jako przekształcenie płaszczyzny, które przekształca punkty z wnętrza okręgu na punkty znajdujące się na zewnątrz okręgu, a punkty na zewnątrz okręgu w punkty znajdujące się wewnątrz okręgu.

2. Definicja Inwersji.

Inwersja względem okręgu g(O,r) to takie przekształcenie płaszczyzny, które każdemu punktowi płaszczyzny X różnemu od O przyporządkowuje punkt X' tak, że spełnione są warunki:

- obraz punktu X znajduje się na półprostej o początku w O przechodzącej przez X ;

- spełnione jest równanie $|OX|*|OX'|=r^2$

Definicję poszerza się również dodając do dziedziny przekształcenia punkt O oraz tzw. punkt w nieskończoności. Oba te punkty przekształcają się w siebie nawzajem.

3. Własności Inwersji (w ujęciu rozszerzonym):

I. Dziedziną oraz zbiorem wartości inwersji jest płaszczyzna.

II. Inwersja posiada punkty stałe - okrąg inwersyjny.

Uzasadnienie II:

Jeżeli X należy do okręgu inwersyjnego to $|OX|=r$.

Z powyższego i z definicji inwersji wynika równość $|OX'|*r=r^2$, co po podzieleniu przez r daje nam równość $|OX'|=r$
Jednak z definicji wiemy, że punkt X' należy do półprostej OX więc X'=X.

III. Inwersja nie jest izometrią.

Uzasadnienie III:

Aby dowieść tego, że inwersja nie jest izometrią wystarczy wybrać dowolne dwa punkty, dla których odległość ich obrazów będzie inna niż ich odległość względem siebie. Najłatwiej będzie wybrać środek inwersji oraz punkt położony na okręgu. Odległość punktów to r, zaś odległości ich obrazów nie możemy zdefiniować.

IV. Inwersja jest inwolucją.

Wynika to bezpośrednio z równania |OX|*|OX'|=r^2. Jeżeli X' jest obrazem punktu X, to jeżeli przekształcimy punkt X' w inwersji względem tego samego okręgu otrzymamy punkt X.

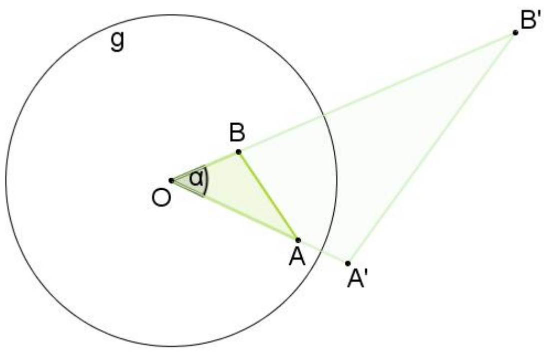
V. Inwersja przekształca dowolną półprostą o początku w punkcie O w samą siebie.

Uzasadnienie V:

Jak wiemy inwersja przekształca wszystkie punkty leżące wewnątrz okręgu na punkty leżące na zewnątrz okręgu i odwrotnie oraz punkty leżące na okręgu przechodzą same w siebie. Wynika z tego, że punkty, które leżą na zewnątrz okręgu oraz należą do półprostej zostaną przekształcone na punkty leżące wewnątrz okręgu, zaś punkty leżące na zewnątrz okręgu zostaną przekształcone na punkty leżące wewnątrz okręgu.

VI. Jeżeli obrazami punktów A, B są punkty A', B', to trójkąt OAB jest podobny do trójkąta OB'A'.

Uzasadnienie VI:



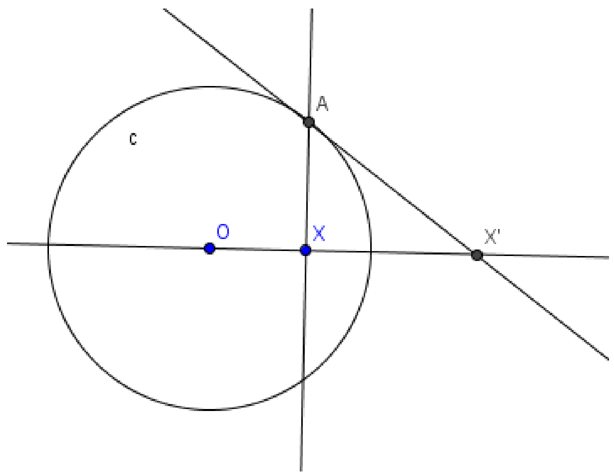
Wiemy że trójkąty OAB i OB'A' mają kąt wspólny przy wierzchołku O.

Wiemy też że prawdziwe są równości |OA|*|OA'|=r^2 oraz |OB|*|OB'|=r^2. Prawdziwa jest więc również równość |OA|*|OA'|=|OB|*|OB'|, którą można przekształcić do postaci $\frac{|OA'|}{|OB'|}=\frac{|OB|}{|OA|}$.

Na podstawie cechy bkb podobieństwa trójkątów, mamy więc tezę.

4. Konstrukcje obrazów figur w inwersji.

I. Konstrukcja obrazu punktu znajdującego się wewnątrz okręgu różnego od O.



1.Rysujemy prostą przechodzącą przez punkty O i X.

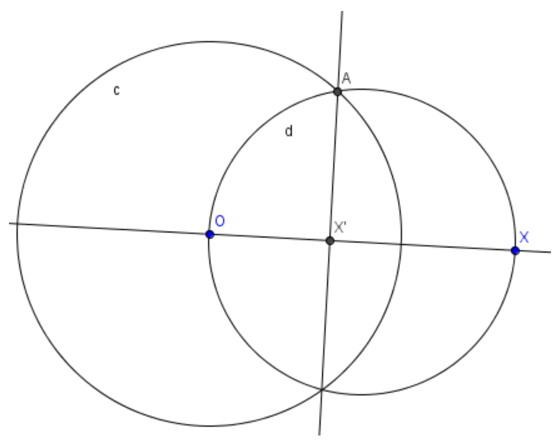
2.Rysujemy prostą prostopadłą do powyższej prostej przechodzącą przez punkt X.

3.Zaznaczamy punkt A przecięcia się prostej prostopadłej do pr.OX z okręgiem.

4.Rysujemy styczną do okręgu w pkt. A.

5.Punkt przecięcia stycznej z pr. OX to obraz punktu X.

II. Konstrukcja obrazu punktu znajdującego się na zewnątrz okręgu.



1.Rysujemy prostą przechodzącą przez punkty O i X.

2.Rysujemy okrąg, którego średnica jest równa |OX|.

3.Zaznaczamy pkt. A przecięcia się okręgów.

4. Rysujemy prostą prostopadłą do prostej OX przechodzącą przez pkt. A.

5. Punkt przecięcia się prostych to obraz inwersyjny pkt. X.

5. Obrazy prostych i okręgów w inwersji.

I. Obrazy prostych.

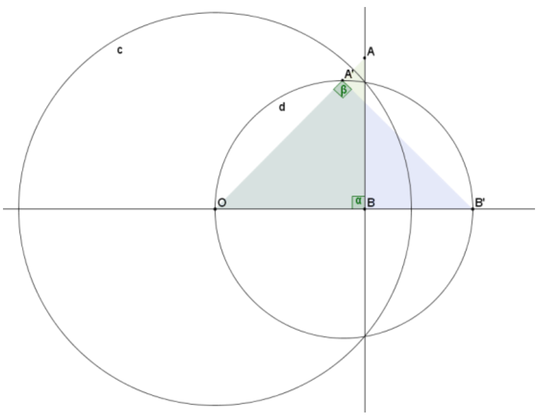
a) Obrazem prostej l przechodzącej przez środek inwersji jest ta sama prosta l.

Dowód:

Prostą l możemy taktować jako sumę dwóch półprostych o początku w punkcie O. Z własności V wiemy, że takie półproste przechodzą same w siebie, co sprawi, iż jako obraz prostej l, otrzymujemy sumę tych dwóch półprostych, czyli prostą l.

b) Obrazem prostej l przecinającej okrąg inwersyjny w dwóch punktach jest okrąg przechodzący przez O.

Dowód:



Aby udowodnić to twierdzenie, zaznaczamy punkt B, który jest rzutem prostopadłym punktu O na prostą l. Zaznaczamy też punkt A, który jest dowolnym punktem na prostej różnym od B. Wiemy, że kąt OBA jest prosty. Przekształćmy teraz punkty A i B na punkty A' oraz B'. Z własności VIII wiemy, że trójkąty OAB i OB'A' są podobne, więc kąt przy A' jest kątem prostym, co oznacza, że jest on oparty na półokręgu o średnicy OB'. Punkt A’ będący obrazem dowolnego punktu prostej l, zawsze więc należy do okręgu o średnicy OB’. Jeżeli zaś przekształcimy punkty A' oraz B' okręgu, to otrzymamy punkty A oraz B. Przekształćmy jeszcze jeden dowolny punkt C różny od A’,B’,O należący do wyznaczonego okręgu. Wtedy punkty A, B oraz obraz inwersyjny C będą współliniowe. Zawsze więc wybierając punkt okręgu znajdziemy taki punkt prostej, którego on jest obrazem.

c) Obrazem prostej l stycznej do okręgu inwersyjnego jest okrąg przechodzący przez O styczny do okręgu inwersyjnego.

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia z punktu b). Jedyną różnicą jest fakt, że punkt A w tym wypadku przejdzie sam w siebie, przez co średnicą będzie odcinek OA.

d) Obrazem prostej l rozłącznej z okręgiem inwersyjnym jest okrąg przechodzący przez O.

Dowód tego twierdzenia jest taki sam jak dowód twierdzenia z podpunktu b).

II. Obrazy okręgów.

a) Jeżeli okrąg przechodzi przez środek okręgu inwersyjnego, to jego obrazem jest prosta.

Dzięki własności IV (Inwersja jest inwolucją), po udowodnieniu wszystkich podpunktów z części I, możemy uznać dowód tego twierdzenia za niepotrzebny.

b) Jeżeli okrąg leży wewnątrz okręgu inwersyjnego i nie przechodzi przez punkt O, to jego obrazem jest okrąg leżący na zewnątrz okręgu inwersyjnego.

Założenie:

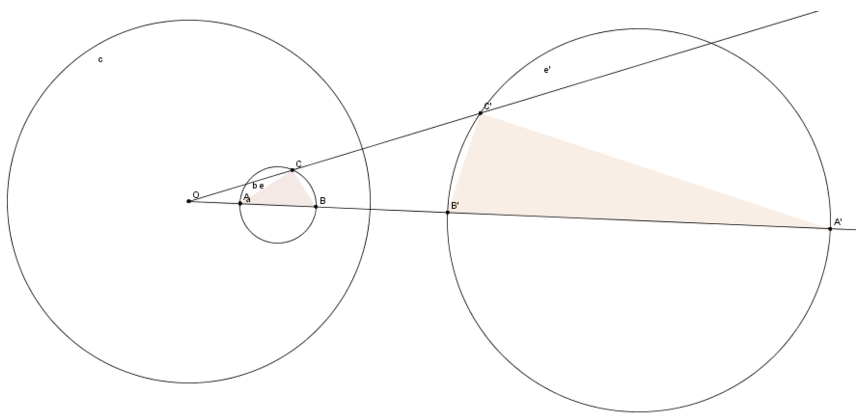
Okrąg e o średnicy AB leży wewnątrz koła ograniczonego okręgiem inwersyjnym c(O,r).

O nie należy do e

Teza:

Obrazem inwersyjnym okręgu e jest okrąg e' leżący na zewnątrz koła okręgu c(O,r) o średnicy A'B'.

Dowód:



Wybierzmy dowolny punkt C należący do e różny od A oraz B. Wiemy że kąt ACB jest kątem prostym, ponieważ jest oparty na średnicy. Znajdźmy teraz obrazy inwersyjne punktów A,B,C. Wiemy, że trójkąty OA'C' oraz OAC są podobne. Kąt OAC jest równy kątowi A'C'O'. Również trójkąty OBC oraz OC'B' są podobne, więc kąty przy wierzchołku C oraz przy wierzchołku B' w tych trójkątach mają taką samą miarę.
Wiemy również, że ponieważ kąt ACB jest kątem prostym, to w trójkącie ACB suma miar kątów CAB i CBA jest miarą kąta prostego.
Kąty C'B'A' oraz C'A'B' dają więc również w sumie kąt prosty. Punkt C' będący obrazem dowolnego punktu okręgu e należy więc do okręgu e' o średnicy A'B'. Wiemy też, że wszystkie punkty leżące

wewnątrz okręgu inwersyjnego zostają przekształcone w punkty na zewnątrz okręgu inwersyjnego więc okręg e' będzie położony na zewnątrz okręgu inwersyjnego. Przekształćmy teraz punkty A' oraz B' w oraz dowolny punkt D który należy do okręgu e' w inwersji względem okręgu c. Otrzymujemy wtedy trzy punkty na okręgu e a ponieważ dwa z nich wyznaczają średnicę a trzeci należy do okręgu mamy pewność że e' jest obrazem e oraz e jest obrazem e'.

c) Jeżeli okrąg leży poza kołem ograniczonym okręgiem inwersyjnym, to jego obrazem jest okrąg leżący wewnątrz koła ograniczonego okręgiem inwersyjnym.

Dowód wynika z własności IV.

d) Jeżeli okrąg d jest współśrodkowy z okręgiem inwersyjnym, to jego obrazem jest inny okrąg o środku O.

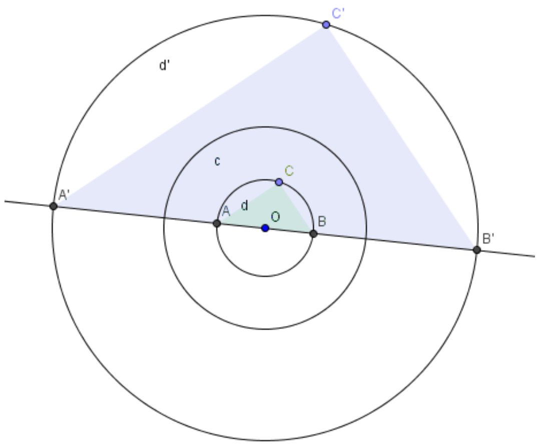
Zał:

Okrąg d(O,r_1) jest współśrodkowy z okręgiem inwersyjnym c(O,r).

Teza:

Obrazem okręgu d jest okrąg d'(O, r_2).

Dowód:

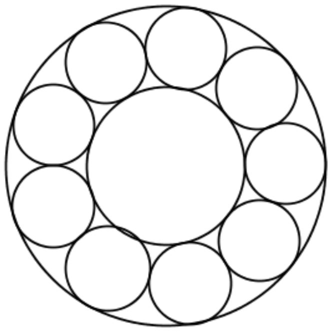


Wybierzmy dowolny punkt A należący do okręgu d oraz przekształćmy go w inwersji względem c. Ponieważ z definicji inwersji wynika, że zawsze |OA'|*|OA|=r^2, więc |OA'| = $\frac{r^2}{|OA|}$ = $\frac{r^2}{r_1}$, czyli odległość punktu A' od punktu O jest stała, zawsze więc obraz A' punktu A leży na okręgu o środku O i promieniu $\mathrm{r}_2 = \frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{r}_1}$.

e) Istnieje możliwość stworzenia okręgu, który przejdzie sam w siebie, ale tylko pod warunkiem, że przetnie okrąg inwersyjny pod kątem prostym.

6.Zastosowanie inwersji w rozwiązywaniu problemów matematycznych.

I. Łańcuch Steinera.



Jest to twierdzenie mówiące o tym że jeżeli na płaszczyźnie znajdują się dwa okręgi położone tak, że pierwszy znajduje się wewnątrz koła opisanego przez drugi, to jeżeli będziemy wpisywać okręgi styczne zewnętrznie do jednego z nich i styczne wewnętrznie do drugiego z nich to po skończonej liczbie okręgów ostatni będzie styczny do pierwszego niezależnie od położenia pierwszego.

Można to twierdzenie bardzo łatwo udowodnić dla okręgów współśrodkowych, ponieważ w takim wypadku kolejne wpisywane okręgi będą miały takie same promienie. Możemy jednak znaleźć taką inwersję która przekształci dowolne dwa okręgi w okręgi współśrodkowe.

Aby znaleźć taką inwersję dla danych dwóch okręgów zaznaczamy prostą przechodzącą przez środki tych dwóch okręgów. Na tej prostej znajdujemy taki punkt A, z którego poprowadzone do danych okręgów styczne będą miały równą długość. Rysujemy trzeci okrąg o środku w wyznaczonym przez nas punkcie i o promieniu równym długości stycznej poprowadzonej do danych wcześniej okręgów. Teraz wybieramy jeden z dwóch punktów przecięcia się okręgu o środku w A z prostą przechodzącą przez środki danych okręgów. Jest to środek naszej inwersji. Przekształci ona prostą, która przechodzi przez środki danych okręgów w tę samą prostą. Dodatkowo przekształci ona okrąg o środku w A na prostą prostopadłą od prostej łączącej środki okręgów oraz będącą prostopadłą do tych okręgów, co wskazuje, że środki tych okręgów będą leżały na tej prostej. W konkluzji wiemy, że środki obrazów obu okręgów leżą na przecięciu się dwóch prostych tj. w jednym punkcie, co trzeba było wykonać.

II. Dowód twierdzenia Eulera.

Istnieje twierdzenie stworzone przez Leonharda Eulera mówiące, że jeżeli na trójkącie opiszemy okrąg o promieniu r_2 oraz wpiszemy w niego okrąg o promieniu r_1, to odległość między środkami okręgów d będzie spełniać równanie $d^2 = r_2(r_2 - 2r_1)$.

Na potrzeby dowodu tego twierdzenia udowadnianą równość przekształćmy do postaci

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2 - d} + \frac{1}{r_2 + d}$$

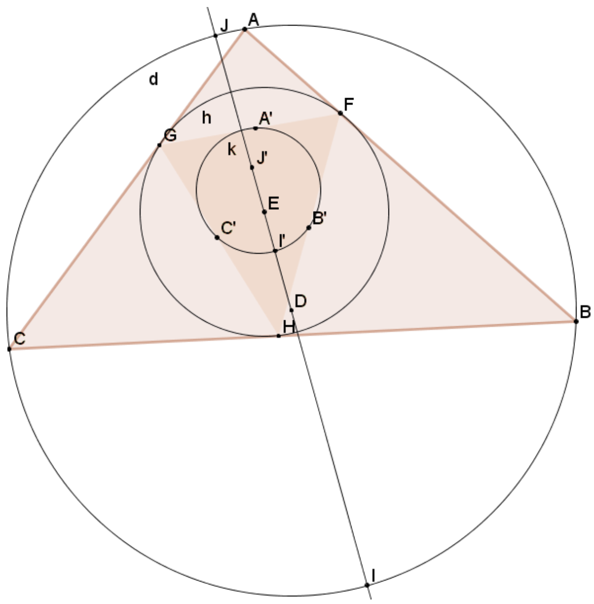
Założenie:

Okrąg $c_1(O_1,r_1)$ jest wpisany w trójkąt ABC, okrąg $c_2(O_2,r_2)$ jest opisany na trójkącie ABC.

Teza:

$d(O_1,O_2)$: $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2-d} + \frac{1}{r_2+d}$

Dowód:



Przez D,E,F oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt z tym właśnie trójkątem. Teraz przekształcimy okrąg c_2 w inwersji względem okręgu c_1. Aby to zrobić przekształcimy punkty A,B,C. Wiemy, że odcinek AO_1 jest prostopadły do EF (są to przekątne deltoidu AEO_1F), więc po przekształceniu punktu A otrzymamy punkt A' leżący na środku odcinka EF. Analogicznie postępujemy z punktami B oraz C. Jak wiemy okręgi nie przechodzące przez środek inwersji są przekształcane przez tę inwersję w inne okręgi więc otrzymujemy okrąg $c_3(O_3,r_3)$ będący obrazem okręgu c_2 w inwersji względem o_1. Wiemy, że trójkąt A'B'C' jest podobny do trójkąta DEF w skali

$k = \frac{1}{2}$, więc promień okręgu c_3 jest równy połowie promienie okręgu c_1. Prowadzimy prostą przechodzącą przez punkty O_1 i O_2 oraz zaznaczamy punkty przecięcia się tej prostej z okręgiem c_2. Niech te punkty nazywają się G i H. Ich obrazami inwersyjnymi są G' i H'. Wiemy, że prawdziwa jest zależność $r_1^2 = |GO_1| * |G'O_1|$ oraz $r_1^2 = |HO_1| * |H'O_1|$. Wiemy również, że $|G'H'|=r_1$. To zaś daje równość $r_1=|G'O_1|+|H'O_1|$ a dalej $r_1 = \frac{r_1^2}{|GS_1|} + \frac{r_1^2}{|HS_1|}$. To daje nam (korzystając z założenia $d=|S_1S_2|$)

$r_1 = \frac{r_1^2}{r_2-d} + \frac{r_1^2}{r_2+d}$, a po podzieleniu przez r_1^2 otrzymujemy równość $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2-d} + \frac{1}{r_2+d}$.

7. Zakończenie

Jako temat tej pracy wybrałem inwersję, ponieważ uważam, że jest to przekształcenie, które nie jest znane znaczącej części ludzi. Początkowo uważałem je za nieprzydatne oraz niepraktyczne. Był to wielki błąd, ponieważ to przekształcenie daje nam możliwość udowodnienia wielu twierdzeń matematycznych, czy też rozwiązania wielu zadań. Pozwala nam ono także rozwiązywać problemy matematyczne. Po zapoznaniu się z inwersją uważam ją za bardzo praktyczne narzędzie, które z pewnością przyda się na lekcjach matematyki. Wiedza na temat inwersji może również pozwolić mi na włączenie się do ciekawej dyskusji na temat tego przekształcenia. Uważam, iż powinno mu być poświęcone chociaż kilka lekcji na poziomie podstawowym matematyki, tak, aby każdy był chociaż świadomy istnienia tego przekształcenia oraz potrafił choć w niewielkim stopniu używać go w praktyce.

8. Źródła:

- "Inwersja i jej zastosowania" Michał Ślęzak, Michał Tkacz
  http://www.mtkacz.republika.pl/inwersja.html
- Wikipedia- artykuły o inwersji oraz o twierdzeniu Euler'a
  http://pl.wikipedia.org/wiki/Inwersja_(geometria)
  http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Eulera_(geometria)
- wykład prof. Andrzeja Fryszkowskiego "Inwersja na płaszczyźnie"
  http://www.youtube.com/watch?v=svv-lxhHCZQ Część I
  http://www.youtube.com/watch?v=p6lxJQiOnmc Część II