SZKOŁA PODSTAWOWA NR 109
IM. KORNELA MAKUSZYŃSKIEGO
W KRAKOWIE
UL. MACKIEWICZA 15; 31-214 KRAKÓW; TEL. 0 12 415 27 59
sp109krakow.w.w.interia.pl ; e-mail: sp109krakow@wp.pl;

Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Nauk i Sztuk

Centrum Młodzieży im. dr Henryka Jordana;

KONKURS PRAC MATEMATYCZNYCH

Temat:

„ZAMIANA SYSTEMÓW LICZBOWYCH”

Autorzy:

Konrad Kaczówka – klasa 4a

Maciej Makowski– klasa 4a

Mateusz Rajs– klasa 4b

Bartłomiej Szlubowski– klasa 4b

Opiekun: Ewa Malicka

Kraków 2014

"Jeśli matematyka jest królową nauk, to królową matematyki jest teoria liczb." /I. Kant/

Dziesiątkowy system liczenia

W systemie liczbowym pozycyjnym w zapisie liczby znaczenie ma nie tylko cyfra,

ale też jej pozycja.

Np. w liczbie 6196 cyfra 6 występuje jako sześć i jako sześć tysięcy

6 1 9 6

Najmniej znacząca

Najbardziej znacząca

Stosowany przez nas system pozycyjny nazywamy dziesiątkowym, ponieważ

każde 10 jednostek niższego rzędu tworzy 1 jednostkę następnego, wyższego rzędu.

System dziesiątkowy pochodzi z Indii, z których przedostał się do Europy za pośrednictwem Arabów.

Obecnie jest on na świecie podstawowym systemem stosowanym w nauce, technice, księgowości, bankowości i w życiu codziennym.

Do zapisu liczb potrzebne jest 10 cyfr, którymi są 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Co on ma wspólnego z liczbą 10?

Każda liczba zapisana w systemie dziesiętnym da sie zapisać jako suma, której składnikami są kolejne potęgi liczby 10, wzięte odpowiednią ilość razy.

$$6\ 1\ 9\ 6 = 6000 + 100 + 90 + 6 = 6 * 1000 + 1 * 100 + 9 * 10 + 6$$

$$= 6 * 10^3 + 1 * 10^2 + 9 * 10^1 + 6 * 10^0$$

10^0 10^1 10^2 10^3

.

Poznajmy kilka innych przykładów budowy systemów liczenia

Opis systemów

System dziesiątkowy:

- do zapisania każdej liczby wystarczy 10 cyfr (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9),
- jednostka każdego następnego rzędu, licząc od strony lewej do prawej, jest dziesięć razy większa od jednostki rzędu poprzedniego (kolejną potęgą liczby 10).

System dwójkowy:

- do zapisania każdej liczby wystarczy 2 cyfry (0, 1),
- jednostka każdego następnego rzędu, licząc od końca, jest dwa razy większa od jednostki rzędu poprzedniego. (kolejną potęgą liczby 2).

System ósemkowy:

- do zapisania każdej liczby wystarczy 8 cyfr (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),
- jednostka każdego następnego rzędu, licząc od końca, jest osiem razy większa od jednostki rzędu poprzedniego (kolejną potęgą liczby 8).

System szesnastkowy:

- do zapisania każdej liczby wystarczy 16 cyfr (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, D),
- jednostka każdego następnego rzędu, licząc od strony lewej do prawej, jest szesnaście razy większa od jednostki rzędu poprzedniego (kolejną potęgą liczby 16).

System trójkowy:

- do zapisania każdej liczby wystarczy 3 cyfry (0, 1,2),
- jednostka każdego następnego rzędu, licząc od końca, jest trzy razy większa od jednostki rzędu poprzedniego (kolejną potęgą liczby 3).

System piątkowy:

- do zapisania każdej liczby wystarczy 5 cyfr (0, 1, 2, 3, 4),
- jednostka każdego następnego rzędu, licząc od końca, jest pięć razy większa od jednostki rzędu poprzedniego (kolejną potęgą liczby 5).

Każdą liczbę można wyrazić w kilku systemach np.

- dwójkowym – binarnym (bin)
- ósemkowym –oktalnym (oct)
- dziesiątkowym – decymalnym (dec)
- szesnastkowym – heksadecymalnym (hex)

Nazwa systemu bierze się od ilości cyfr (cyfr i znaków)

DZIESIATKOWY	DWÓJKOWY	OSEMKOWY	SZESNASTKOWY	TROJKOWY	CZWORKOWY
10 cyfr	**2 cyfry**	**8 cyfr**	**10 cyfr i 6 znaków**	**3cyfry**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	10	2	2	2	2
3	11	3	3		3
4	100	4	4		
5	101	5	5		
6	110	6	6		
7	111	7	7		
8	1000	10	8		
9	1001	11	9		
10	1010	12	A		
11	1011	13	B		
12	1100	14	C		
13	1101	15	D		
14	1110	16	E		
15	1111	17	F		

Ta sama liczba może być zapisana w kilku systemach np.:

45 $_{(10)}$

45 $_{(dec)}$

101101 $_{(2)}$ **55** $_{(8)}$ **2D** $_{(16)}$ **1200** $_{(3)}$

101101 $_{(bin)}$ **55** $_{(oct)}$ **2D** $_{(hex)}$

Przykłady zamiany systemów:

1a. Zamiana liczby zapisanej w systemie <u>dziesiątkowym</u> na liczbę zapisaną w systemie <u>dwójkowym</u>.

Aby tego dokonać, należy zapisać tę liczbę w postaci sumy, której składnikami są potęgi liczby 2 wzięte odpowiednią ilość razy.

7	6	5	4	3	2	1	0	rząd /pozycja	
128	**64**	**32**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**	jednostka rzędu	**system dwójkowy**
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0		

Przykład 1. **(dec)** $\longrightarrow$ **(bin)**

$45_{(10)} = \dots_{(2)}$

Sposób I.

$45_{(10)} = 32 + 13 = 32 + 8 + 5 = 32 + 8 + 4 + 1 =$
$\mathbf{1} \cdot 2^5 + \mathbf{0} \cdot 2^4 + \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 = (101101)_2$

Możesz skorzystać z tabeli:

	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
45	128	64	32	16	8	4	2	1

45 = **32** + **0** + **8** + **4** + **0** + **1**

45 = 101101 $_{(2)}$

czytamy: jeden –zero -jeden- jeden –zero –jeden

Sposób II.

Aby przeliczyć liczbę z systemu dziesiątkowego na inny, należy wykonać dzielenie z resztą liczby przez podstawę systemu liczbowego, na który jest przeliczana.

Iloraz tych liczb ponownie dzielony jest przez podstawę systemu liczbowego, aż do wyniku równego zeru; liczba zapisana w innym systemie ma postać ciągu otrzymanych reszt z dzielenia zapisana od końca.

Wystarczy dokonać dzielenia z resztą podanej liczby przez 2.

Liczby parzyste maja resztę zero, a nieparzyste jeden.

Uwaga: **Liczbę odczytujemy od dołu do góry.**

45 :	2	lub	: 2
22	1	45	22 r 1
11	0	22	11 r 0
5	1	11	5 r 1
2	1	5	2 r 1
1	0	2	1 r 0
0	1	1	0 r 1

$(45)_{10} \longrightarrow (101101)_2$

Przykład 2. Sposób I.

$97_{(10)} = \ldots\ldots_{(2)}$

$97_{(10)} = 64 + 33 = 64 + 32 + 1 =$

	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	0	1	1	0	0	0	0	1
97	128	64	32	16	8	4	2	1

$$\mathbf{1} \cdot 2^6 + \mathbf{1} \cdot 2^5 + \mathbf{0} \cdot 2^4 + \mathbf{0} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 = 1100001_{(2)}$$

$97_{(10)} = 1100001_{(2)}$

Sposób II.

97 : 2 = 48 r 1
48 : 2 = 24 r 0
24 : 2 = 12 r 0
12 : 2 = 6 r 0
6 : 2 = 3 r 0
3 : 2 = 1 r 1
1: 2 = 0 r 1

1b. Zamiana liczby zapisanej w systemie <u>dwójkowym</u> na liczbę zapisaną w systemie <u>dziesiątkowym</u>.

Przykład 1. (bin) ⟶ (dec)

$11001110_{(2)}$ = ….. $_{10}$

Ponieważ w liczbie jest osiem cyfr, wiec najwyższą potęgą jest liczba 7.
Podpiszmy jakie wartości przyjmują kolejne pozycje tej liczby tutaj idąc od strony prawej do lewej

	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
	128	64	32	16	8	4	2	1

Teraz patrzymy gdzie mamy wartości i zliczamy je,

$(11001110)_2 = \mathbf{1} \cdot 2^7 + \mathbf{1} \cdot 2^6 + \mathbf{0} \cdot 2^5 + \mathbf{0} \cdot 2^4 + \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0$

$= 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 32 + 6 = 128+64+8+4+2 = 206$

$11001110_{(2)} = 206_{(10)}$

Przykład 2.

$1101110_{(2)} = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 =$

$=0+2+4+8+0+32+64 \ =0+10+90+10 =110$

Przykład 3.

$10101_{(2)} = \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{0} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0$
$= 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 21$

2a. Zamiana liczby zapisanej w systemie <u>dziesiątkowym</u> na liczbę zapisaną w systemie <u>trójkowym</u>.

Przykład 1. Sposób I.

$35_{(10)}$ = ….. $_{(3)}$
35:3 = 11 r 2
11:3 = 3 r 2
3:3 = 1 r 0
1:3 = 0 r 1
$35_{(10)} = 1022_{(3)}$

Sposób II.

Aby tego dokonać, należy zapisać tę liczbę w postaci sumy, której składnikami są potęgi liczby 3 wzięte odpowiednią ilość razy.

7	6	5	4	3	2	1	0	rząd /pozycja	
2187	**729**	**243**	**81**	**27**	**9**	**3**	**1**	jednostka rzędu	**system trójkowy**
3^7	3^6	3^5	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0		

$35 = 27 + 8 = 27 + 3 + 3 + 2 = 1\cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2\cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 1022_{(3)}$

Przykład 2.

$55 = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 = 2001_{(3)}$

Przykład 3.

$82 = 1\cdot 3^4 + 0\cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 = 10001_{(3)}$

2b. Zamiana liczby zapisanej w systemie <u>trójkowym</u> na liczbę zapisaną w systemie <u>dziesiątkowym</u>.

Przykład 1.

$1021_{(3)} = 1x3^3+0x3^2+2x3^1+1x3^0 = 27+0+6+1 = 34$

Przykład 2.

$21021_{(3)} = 2x3^4+1x3^3+0x3^2+2x3^1+1x3^0 = 162+27+0+6+1=196$

3a. Zamiana liczby zapisanej w systemie <u>dziesiątkowym</u> na liczbę zapisaną w systemie <u>szesnastkowym</u>.

Aby zapisać liczby w systemach pozycyjnych o podstawie większej niż dziesięć, należy użyć więcej cyfr.
W systemie szesnastkowym dziesięć pierwszych cyfr przyjmujemy zgodnie z systemem dziesiątkowym, natomiast : A oznacza10, B oznacza 11, C oznacza 12, D oznacza 13, E oznacza 14, F oznacza 15.

Przykład 1.

Rozważmy liczbę 212. Ponieważ $16^2 = 256$, więc w tej liczbie 16 mieści się tylko w potędze pierwszej. Dzieląc pisemnie 212 przez 16 otrzymujemy 13 i reszty 4, zatem $212_{(10)} = 13 \cdot 16 + 4 = D \cdot 16 + 1 + 1 + 1 + 1 = D \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^0 = \mathbf{D} \cdot 16^1 + \mathbf{4} \cdot 16^0 = (D4)_{(16)}$

4	3	2	1	0	rząd pozycja	
65536	**4096**	**256**	**16**	**1**	jednostka rzędu	
16^4	16^3	16^2	16^1	16^0		**system szesnastkowy**

Przykład 2.

Rozważmy liczbę 337. Ponieważ $16^2 = 256$, więc w tej liczbie 16 mieści się w potędze drugiej,
zatem:

$$337_{(10)} = 256 + 81 = 256 + 16 + 65 = 256 + 16 + 16 + 49 = 256 + 16 + 16 + 16 + 33 = 256 + 16 + 16 + 16 + 16 + 17 = 256 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 1 = \mathbf{1} \cdot 16^2 + \mathbf{5} \cdot 16^1 + \mathbf{1} \cdot 16^0 = (151)_{16}$$

Przykład 3.

Rozważmy liczbę 182. W tej liczbie 16 mieści się w potędze pierwszej, wiec podzielimy pisemnie 182 przez 16, aby dowiedzieć sie ile razy liczba 16 mieści się w liczbie 182. Otrzymujemy 11 i resztę 6,
zatem:

$$182_{(10)} = 11 \cdot 16 + 6 = B \cdot 16 + 6 \cdot 1 = \mathbf{B} \cdot 16^1 + \mathbf{6} \cdot 16^0 = (B6)_{16}$$

3b. Zamiana liczby zapisanej w systemie <u>szesnastkowym</u> na liczbę zapisaną w systemie <u>dziesiątkowym</u>.

Przykład 1.

$$(12ED)_{16} = \mathbf{1}\cdot 16^3 + \mathbf{2}\cdot 16^2 + \mathbf{14}\cdot 16^1 + \mathbf{13}\cdot 16^0$$
$$= 4096 + 2\cdot 256 + 14\cdot 16 + 13\cdot 1 = 4096 + 512 + 224 + 13 = 4845_{\ (10)}$$

Przykład 2.

$$(56AF)_{16} = \mathbf{5}\cdot 16^3 + \mathbf{6}\cdot 16^2 + \mathbf{10}\cdot 16^1 + \mathbf{15}\cdot 16^0$$
$$= 5\cdot 4096 + 6\cdot 256 + 10\cdot 16 + 15\cdot 1 = 20480 + 1536 + 160 + 15 = 22191_{\ (10)}$$

Przykład 3.

$$B3F_{\ (16)} = 15\cdot 16^0 + 3\cdot 16^1 + 11\cdot 16^2 =$$

$$= 15 + 48 + 2816 = 2879$$

4. Zamiana liczby zapisanej w systemie <u>dwójkowym</u> na liczbę zapisaną w systemie <u>szesnastkowym</u>

Przykład 1.

$101011001110001_{\ (2)} =$ ……..$_{(16)}$

Wiemy, że

- A =10 , B =11, C =12, D = 13, E =14, F =15.
- $2^4 = 16$ co oznacza. że liczby od 0 do 15 można zapisać dwójkowo używając czterech bitów (bo 1+2+4+8 = 15).

Czyli naszą liczbę mogę dzielić od strony prawej co 4 bity.

0 1 0 1 / 0 1 1 0 / 0 1 1 1 / 0 0 0 1

Jakie liczby mamy w tych czwórkach?

8 4 2 1 / 8 4 2 1 / 8 4 2 1 / 8 4 2 1

4 + 1 =5 4+2 = 6 4+2+1 =7 1

$101011001110001_{\ (2)} = 5671_{\ (16)}$

Dokonując zamiany możemy skorzystać z przygotowanej tabeli:

0 1 0 1 / 0 1 1 0 / 0 1 1 1 / 0 0 0 1

8 4 2 1 (hex)	8 4 2 1 (hex)	8 4 2 1 (hex)	8 4 2 1 (hex)
0000 = 0	**0100 = 4**	**1000 = 8**	**1100 = C**
0001 = 1	**0101 = 5**	**1001 = 9**	**1101 = D**
0010 = 2	**0110 = 6**	**1010 = A**	**1110 = E**
0011 = 3	**0111 = 7**	**1011 = B**	**1111 = F**

$101011001110001_{(2)} = 5671_{(16)}$

5. Zamiana liczby zapisanej w systemie dwójkowym na liczbę zapisaną w systemie ósemkowym

Wiemy, że

- $2^3 = 8$ co oznacza. że liczby od 0 do 7 można zapisać dwójkowo używając trzech bitów (bo 1+2+4= 7).

Czyli naszą liczbę możemy dzielić od strony prawej co 3 bity

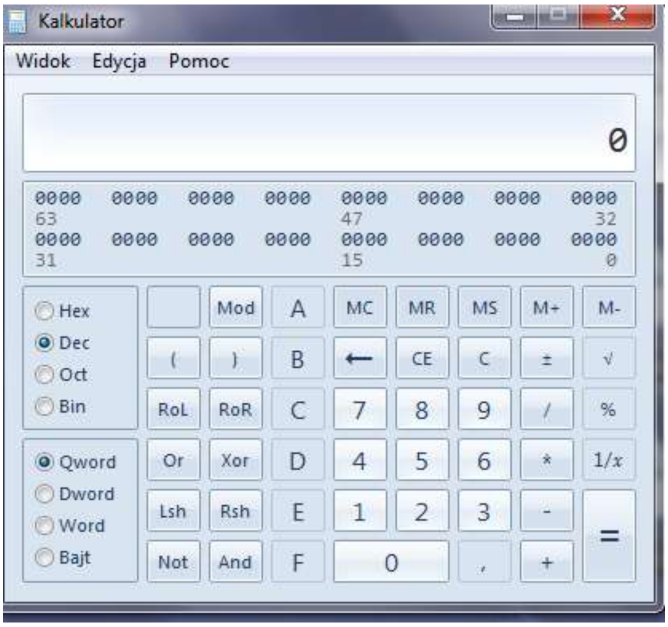
101 / 011 / 001 / 110 / 001

Jakie liczby mamy w tych trójkach?

4 21 / 421 / 421/ 421 / 421
  5   3   1   6   1

$101011001110001_{(2)} = 53161_{(8)}$

Wnioski :
1. Wszystkie poznane zamiany może wykonać za nas komputer, wykorzystując program Kalkulator wybierając Widok_ Programisty.



Następnie zaznaczamy opcję Dec i wpisujemy liczbę, później zaznaczamy Bin i automatycznie otrzymujemy liczbę zapisaną w systemie dwójkowym. Analogicznie postępujemy przy innych zamianach.

2. Podobnie jak w systemie dziesiątkowym, w systemach binarnych i trójkowych można dodawać i odejmować liczby.
Opanowaliśmy już sprawność dodawania w tych systemach.

3. W swojej historii ludzkość używała różnych systemów liczbowych. W obecnej chwili w życiu codziennym prawie wszyscy stosujemy wyłącznie system dziesiętny. Tym niemniej w pewnych zastosowaniach wciąż pojawiają się inne systemy liczbowe takie jak dwójkowy, ósemkowy czy szesnastkowe.

Urządzenia techniczne, a w szczególności komputery pracują w oparciu o **system dwójkowy.**
Wymiana informacji polega na odpowiednim przesyłaniem sygnałów. Podstawą elektroniki jest prąd elektryczny, który w układach elektronicznych albo płynie albo nie

- Prąd płynie (1) .
- Prąd nie płynie (0).

System binarny pomimo zalet ma jedną wielką wadę, mianowicie liczby w tym systemie są po prostu długie i do zapisania dużej liczby potrzeba wielu cyfr. Rozwiązaniem są dwa inne systemy liczbowe, które również mają duże znaczenie w informatyce. Są to: system **ósemkowy** oraz system **szesnastkowy**. Systemy te wprowadzono dla wygody informatyków, umożliwiają skracenie długości zapisu dużych liczb.

System ósemkowy obecnie ma małe zastosowanie
Jest wykorzystywany np do ustawiania praw dostępu do plików w sytemie LINUX

W informatyce **system szesnastkowy** wykorzystywany jest na przykład do:
- adresowania komórek pamięci przez urządzenia
- składu stron internetowych
- kodowania kolorów użytych na stronach internetowych np. #FFF to kolor biały, a #000 to czarny
- do obróbki zdjęć np. Photoshop, GIMP
- do kodowania klawiszy na klawiaturze
- w kalkulatorach naukowych.

W Babilonie już w 1750 r. p.n.e. używany był **system liczbowy sześćdziesiątkowy,**
- Obecnie układ sześćdziesiątkowy jest używany w związku z jednostkami czasu.
- Godzina dzieli się na 60 minut, minuta na 60 sekund
- Zad.
- Jest godzina:…
- Ile sekund upłynęło od północy?

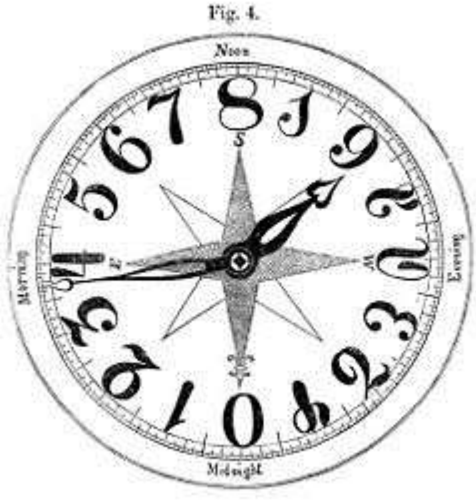
Ludzie nie zawsze liczyli w systemie dziesiątkowym:
System dwunastkowy był rozpowszechnionym systemem; w handlu do dziś używamy określeń: tuzin na 12 sztuk, kopa to 5 tuzinów czyli 60 sztuk i gros na oznaczenie 12 tuzinów czyli 144 sztuk,.

Majowie w Ameryce liczyli **w systemie dwudziestkowym**
- Kropka – 1
- Kreska – 5
- Muszelka - 0

Obecnie są dostępne zegary (także wirtualne) wskazówkowe lub LCD z liczbami w systemie pozycyjnym szesnastkowym[

Obecnie są dostępne zegary z liczbami w systemie szesnastkowo-sześćdziesiętnym.

Fig. 4.



Zakończenie:

Już zakończyliśmy referat o systemach liczbowych.

Myślimy , że warto je znać i umieć się nimi posługiwać.

Na ten referat musieliśmy poświęcić dużo zajęć koła matematycznego i dni pracy.

Z poznania nowych systemów mieliśmy dużo matematycznej zabawy.

Czasami byliśmy lepsi od swoich rodziców, którzy nie bardzo rozumieli czym się zajmujemy.

Szczególnie chcielibyśmy podziękować pani Ewie Malickiej, która nam pomagała i uczyła nas o systemach liczbowych.

Konrad Kaczówka – klasa 4a

Maciej Makowski– klasa 4a

Mateusz Rajs– klasa 4b

Bartłomiej Szlubowski– klasa 4b