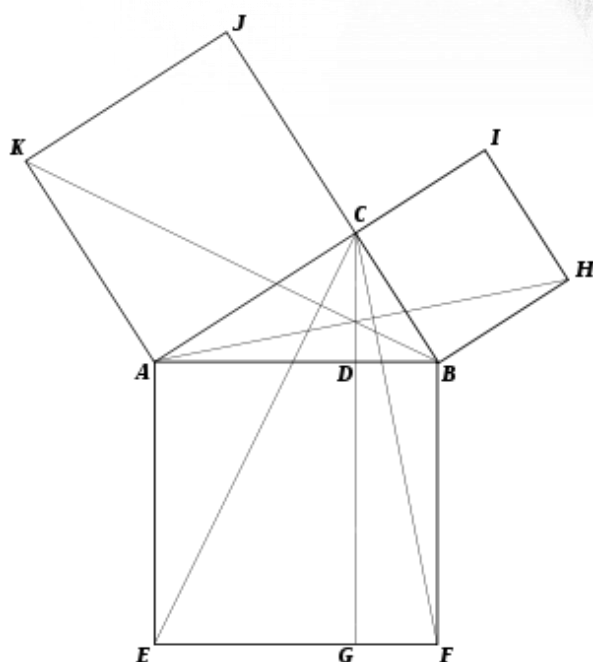


Czy twierdzenia Pitagorasa można nauczyć się w V klasie ?



Piotr Domagała kl. V

Nauczyciel prowadzący: mgr Beata Ostrówka

Prywatna Ogólnokształcąca Szkoła Muzyczna I Stopnia „INSPIRACJA”
ul. Śniadeckich 12b, 31-531 Kraków

Przedmowa

Owszem, można nauczyć się tego twierdzenia, nawet można je zrozumieć, choć w pierwszym momencie nie było to takie proste. Jak pierwszy raz przeczytałem to twierdzenie i zobaczyłem przykładowy dowód – niewiele z tego zrozumiałem. Trójkąty, pierwiastki, kwadraty wszystko w jednym. Pomyślałem: *trudne, a ja przecież nie jestem Pitagorasem!*

To było pierwsze spotkanie z tym twierdzeniem. Gdy jednak zacząłem się mu przyglądać, okazało się, że nie taki diabeł straszny jak go malują.

Później dowiedziałem się, że twierdzenie to ma bardzo dużo dowodów.

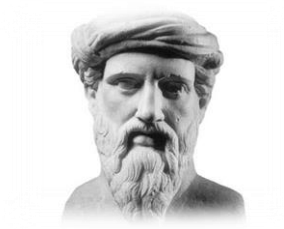
W tym opracowaniu postaram się przybliżyć twierdzenie w sposób jak najbardziej prosty. Tak, aby każdy mógł je zrozumieć. Wybrane, przykładowe dowody wykonam krok po kroku.

Piotrek

Spis treści

1. Życiorys Pitagorasa
2. Twierdzenie Pitagorasa
3. Dowód Twierdzenia Pitagorasa
4. Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia Pitagorasa
5. Trójki Pitagorejskie
6. Ślimak Teodorosa
7. Praktyczne zastosowanie Twierdzenia Pitagorasa
8. Przykładowe zadania
9. Literatura
10. Opinia nauczyciela

1. Życiorys Pitagorasa



Pitagoras (ok. 572-497 p.n.e) to filozof grecki, który pochodził z wyspy Samos, czyli wschodniej kolonii jońskiej. Gdy miał 40 lat opuścił Jonię, która walczyła z Persami, i odbył liczne podróże, również do Indii, gdzie zetknął się z tamtejszymi systemami filozoficzno-religijnymi.

Przebywał w Tracji, ostatecznie osiadł jednak w Wielkiej Grecji, gdzie w Krotonie założył szkołę filozoficzno-religijną i związek pitagorejski. Nie pozostawił po sobie żadnych dzieł, a te, które później rozpowszechniano w Grecji, były - jak podają historycy filozofii - apokryfami.

Stworzył system poglądów naukowych, nazwanych jego imieniem. Był to prawdopodobnie rezultat pracy wielu uczonych, określanych powszechnie mianem **pitagorejczyków**. Z literatury filozoficznej Greków wynika, że Pitagoras jako pierwszy użył określenia filozofia w rozumieniu "umiłowanie mądrości", dla zaznaczenia, że mądrość jest rzeczą boską, a jedynie umiłowanie jej dostępne jest dla ludzi.

Pitagoras wprowadził pojęcie podobieństwa figur oraz ideę przeprowadzania systematycznych dowodów w geometrii.

Przeprowadził dowód twierdzenia nazwanego Twierdzeniem Pitagorasa (znanego wcześniej jako reguła bez dowodu). Odkrył niewspółmierność boku i przekątnej kwadratu.

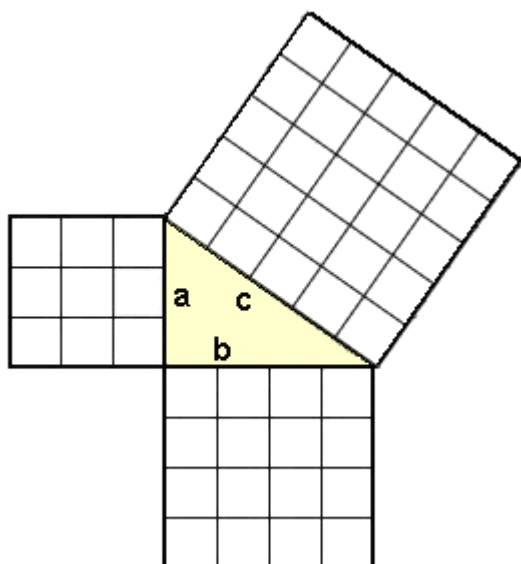
2. Twierdzenie Pitagorasa

W dowolnym **trójkącie prostokątnym** suma **kwadratów** długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Można to wyrazić wzorem:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

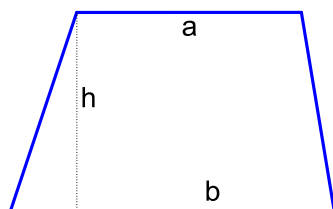
Geometrycznie oznacza to, że jeżeli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy kwadraty, to suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych tego trójkąta będzie równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.



3. Dowód Twierdzenia Pitagorasa

Dowodów Twierdzenia Pitagorasa jest bardzo dużo. Niektóre źródła podają, że jest ich ponad 200. Ja wybrałem dwa, które uważam za łatwe do zrozumienia.

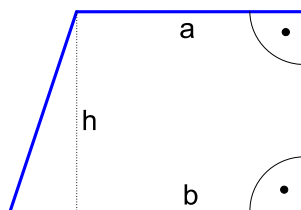
1. Dowód Garfielda z wykorzystaniem pola trapezu.



Pole trapezu można opisać wzorem:

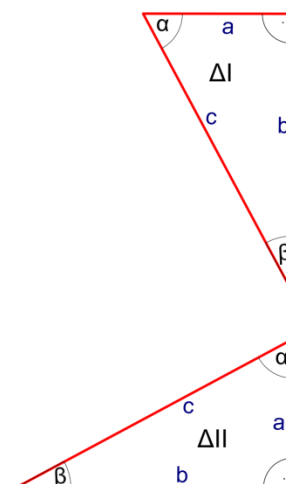
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

Szczególny przypadek to trapez prostokątny:



W celu udowodnienia Twierdzenia Pitagorasa zbuduję trapez prostokątny wykorzystując dwa takie same trójkąty prostokątne.

Wykreślam prostą i osadzam na niej dwa jednakowe trójkąty prostokątne i wolne wierzchołki łączę odcinkiem:



Dowód Twierdzenia Pitagorasa c.d.

W wyniku tego otrzymujemy figurę złożoną z trzech trójkątów:

- Dwóch identycznych trójkątów prostokątnych ΔI oraz ΔII
- ΔIII , który jest także trójkątem prostokątnym gdyż:

Skoro dla ΔI $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$90^\circ + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ$$

Pole takiej figury jest sumą pól ΔI , ΔII i ΔIII

$$P_{\Delta I} = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$P_{\Delta II} = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$P_{\Delta III} = \frac{c^2}{2}$$

Wzór 1)

$$P = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c^2}{2} = a \cdot b + \frac{c^2}{2}$$

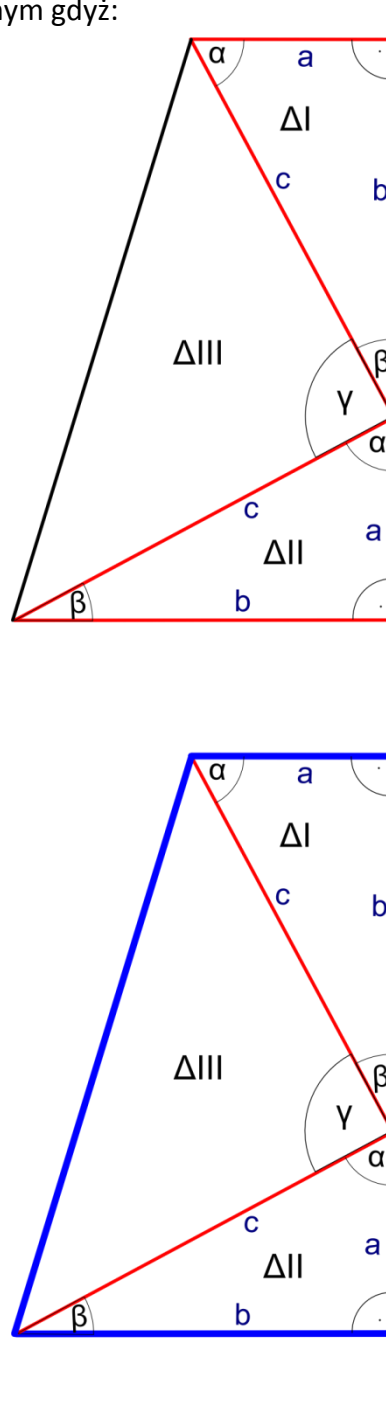
Z drugiej strony pole trapezu wyniesie:

$$P = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$$

gdzie $h = a+b$

Wzór 2)

$$P = \frac{(a+b)}{2} \cdot (a+b) = \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{2}$$



Dowód Twierdzenia Pitagorasa c.d.

Uwzględniając wzory 1) i 2)

$$a \cdot b + \frac{c^2}{2} = \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{2}$$

po pomnożeniu obustronnie przez 2

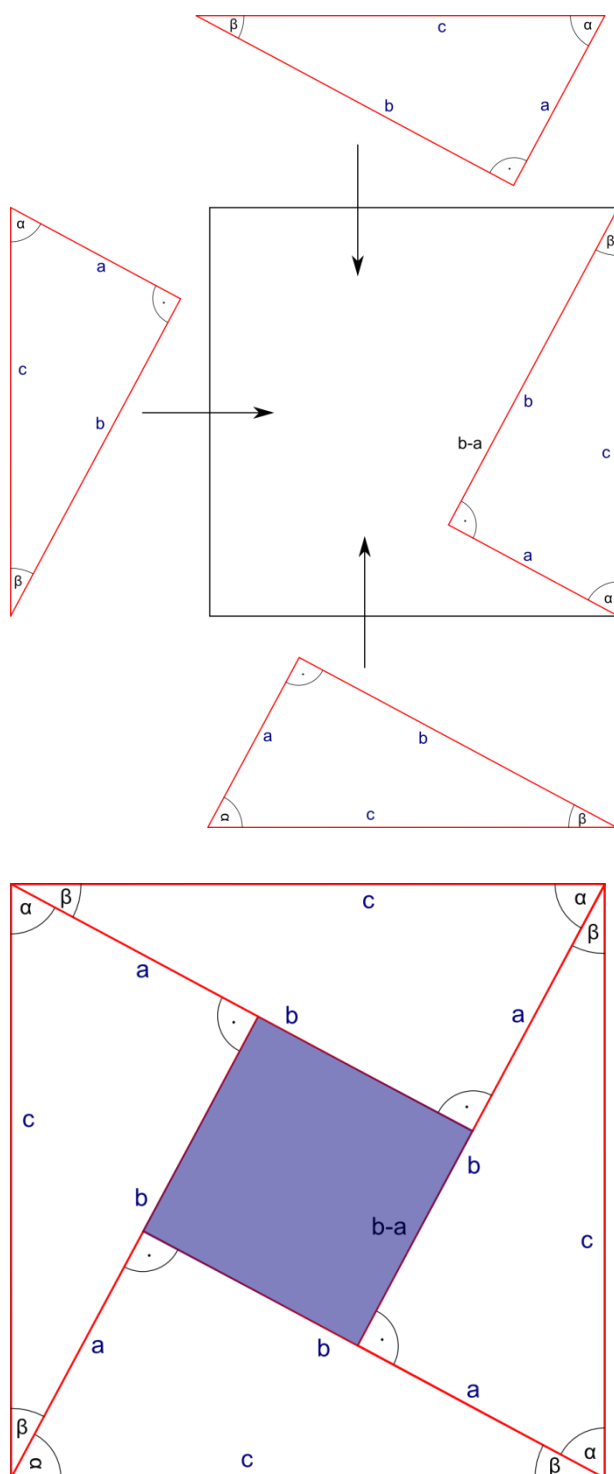
$$2 \cdot a \cdot b + c^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Dowód Twierdzenia Pitagorasa cd.

2. Dowód Bhaskary

Budujemy figurę złożoną z czterech jednakowych trójkątów prostokątnych



Dowód Twierdzenia Pitagorasa cd.

Ponieważ kąty $\alpha + \beta = 90^\circ$, otrzymana figura jest kwadratem o boku „c” i polu $P = c^2$
Pole tego kwadratu składa się z sumy pól czterech trójkątów prostokątnych.

wzór 1)

$$P1 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = 2 \cdot a \cdot b$$

oraz z pola środkowego, zacieniowanego kwadratu

wzór 2)

$$P2 = (b - a)^2 = b^2 - 2 \cdot a \cdot b + a^2$$

$$P = P1 + P2 = 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 2 \cdot a \cdot b + a^2 = b^2 + a^2$$

$$P = c^2$$

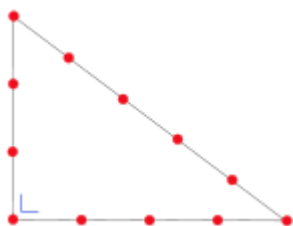
$$c^2 = a^2 + b^2$$

4. Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia Pitagorasa

Prawdziwe jest następujące twierdzenie odwrotne do Twierdzenia Pitagorasa:

Jeśli dane są trzy dodatnie liczby a , b i c takie, że $a^2 + b^2 = c^2$, to istnieje trójkąt o bokach długości a , b i c a kąt między bokami o długości a , b jest prosty.

Najprawdopodobniej twierdzenie to wykorzystywane było w wielu starożytnych kulturach Azji (Chinach, Indiach, Babilonii) i Egipcie do praktycznego wyznaczania kąta prostego. Wystarczy bowiem zbudować trójkąt o bokach długości 3, 4 i 5 jednostek, aby uzyskać kąt prosty między bokami o długościach 3 i 4.



Również obecnie rolnicy, geodeci, budowlańcy korzystają z tej zależności aby przy pomocy sznurka wyznaczyć kąt prosty w terenie. Do tego potrzebują sznurek o długości 12m, na którym mają odmierzone długości 3m, 4m, 5m.

5. Trójki Pitagorejskie

Trójka Pitagorejska - w teorii liczb to takie trzy liczby całkowite dodatnie a, b, c , które spełniają równanie Pitagorasa:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Znany jest *trójkąt egipski* o bokach wyrażonych liczbami 3, 4 i 5. W Egipcie wiadome było, że jest to trójkąt prostokątny i używano go do wyznaczania kątów prostych przy odnawianiu granic gruntowych zmywanych dorocznymi wylewami Nilu. Pitagoras przekazał nam związek między bokami *trójkąta egipskiego*, wyrażony wzorem $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Poszukując innych trójkątów, których boki a, b, c spełniałyby warunek $a^2 + b^2 = c^2$, Pitagoras znalazł wzory, które w dzisiejszej symbolice można napisać w postaci:

$$a = 2n + 1,$$

$$b = 2n(n + 1)$$

$$c = 2n^2 + 2n + 1$$

gdzie n oznacza dowolną liczbę naturalną.

Powyższe wzory nie wyczerpują jednak wszystkich kombinacji liczb będących trójkami pitagorejskimi. Przykładem jest trójka: 6, 8, 10 której nie otrzymamy z powyższych wzorów.

Wzory, które uwzględniają wszystkie trójki zostały określone w późniejszym czasie.

Jeśli $m > n$ są liczbami naturalnymi, to:

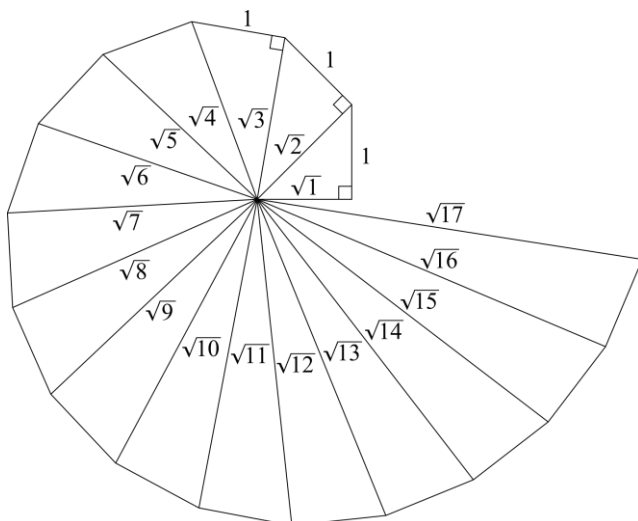
$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2 \cdot m \cdot n$$

$$c = m^2 + n^2$$

6. Ślimak Teodorosa

Ślimak Teodorosa — w matematyce, konstrukcja geometryczna, pozwalająca stworzyć odcinek o długości równej pierwiastkowi z liczby naturalnej. Pomysł konstrukcji opiera się na twierdzeniu Pitagorasa. Nazwa konstrukcji pochodzi od imienia greckiego matematyka i filozofa, Teodorosa z Cyreny.



Poniżej przedstawię sposób na otrzymanie takiej konstrukcji poprzez kolejne wyznaczanie odcinków o długościach **$\sqrt{2}$** , **$\sqrt{3}$** ...

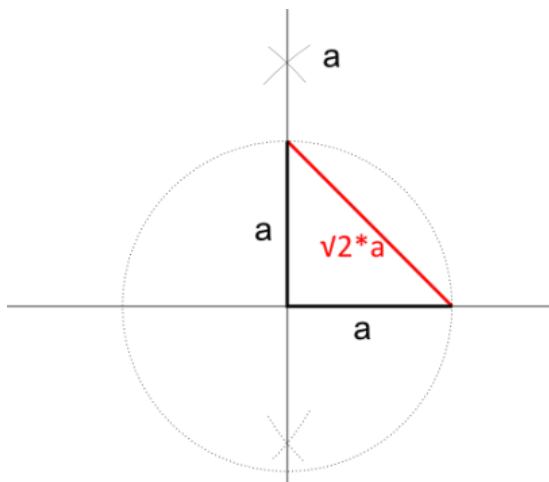
Wykreślenie pierwiastka $\sqrt{2}$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Jeśli $a = b$

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2 \cdot a^2$$

$$c = \sqrt{2 \cdot a^2} = \sqrt{2} \cdot a$$



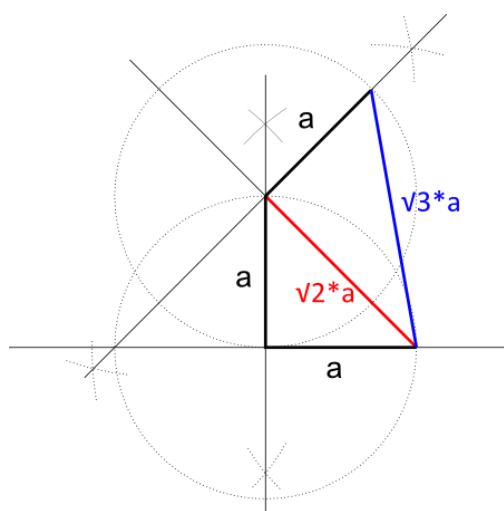
Jeżeli przyjmiemy, że **a** jest odcinkiem jednostkowym, przeciwprostokątna **c** będzie odcinkiem o długości **$\sqrt{2}$**

Wykreślenie pierwiastka $\sqrt{3}$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{jeśli} \quad b = \sqrt{2} \cdot a$$

$$c^2 = a^2 + (\sqrt{2} \cdot a)^2 = a^2 + 2 \cdot a^2 = 3 \cdot a^2$$

$$c = \sqrt{3 \cdot a^2} = \sqrt{3} \cdot a$$



7. Praktyczne zastosowanie Twierdzenia Pitagorasa

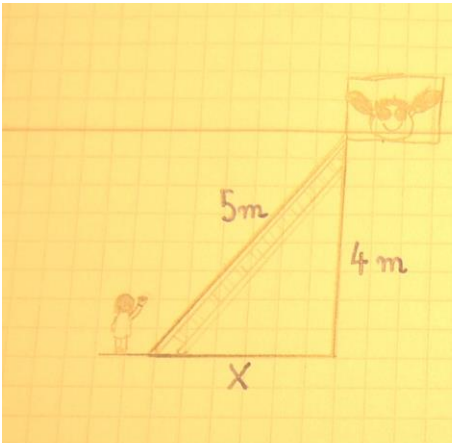
Twierdzenie Pitagorasa znalazło zastosowanie w wielu dziedzinach.

- powszechne zastosowanie w budownictwie np. obliczanie długości linki mocującej maszt
- obliczenie drogi "na skróty"
- obliczanie przekątnej telewizora
- obliczanie wysokości np. budynku, góry
- określenie precyzyjnej wielkości rampy (przy rozładunkach i sportach ekstremalnych)
- w elektrotechnice

8. Zadania

Drabina

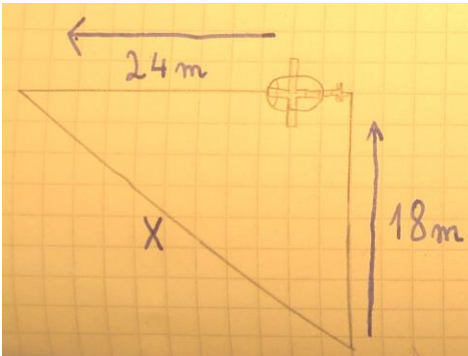
Okno Julii znajduje się na wysokości 4m nad ziemią. Jak daleko od ściany powinien Romeo przystawić dolny koniec drabiny o długości 5m, aby górny jej koniec dokładnie dosięgnął okna Julii?


$$\begin{aligned}4^2 + x^2 &= 5^2 \\x^2 &= 5^2 - 4^2 \\x^2 &= 25 - 16 \\x^2 &= 9 \\x &= \sqrt{9\text{m}} \\x &= 3\text{m}\end{aligned}$$

Odpowiedź: Romeo musi ustawić drabinę w odległości 3m od ściany.

Wyznaczanie odległości

Helikopter leci 18km na północ, a potem 24km na zachód, po czym ląduje na lotnisku. Jak daleko od miejsca startu jest lotnisko?


$$\begin{aligned}x^2 &= 18^2 + 24^2 \\x^2 &= 324 + 576 \\x^2 &= 900 \\x &= \sqrt{900\text{m}} \\x &= 30\text{m}\end{aligned}$$

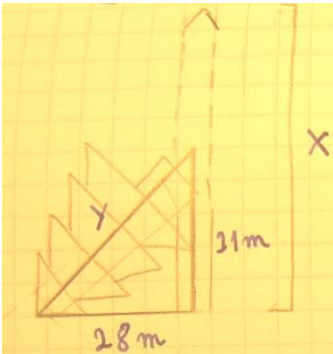
Odpowiedź: Lotnisko jest 30m od miejsca startu.

Zadania

Wysokość drzewa

Huragan przełamał drzewo na wysokości 21m tak, że wierzchołek drzewa sięgnął ziemi w odległości 28m od podstawy drzewa.

Jaką wysokość miało drzewo przed złamaniem?

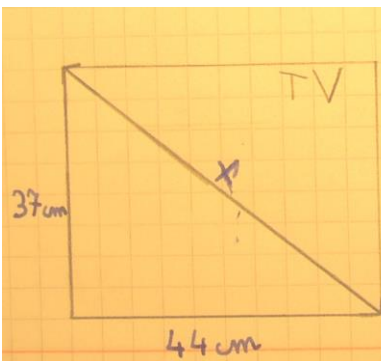

$$\begin{aligned}x &= 21 + y \\x &= 21 + \sqrt{21^2 + 28^2} \\x &= 21 + \sqrt{441 + 784} \\x &= 21 + \sqrt{1225} \\x &= 21 + 35 \text{ m} \\x &= 56 \text{ m}\end{aligned}$$

Odpowiedź: Drzewo miało 56 m wysokości.

Przekątna telewizora

Ekran telewizora jest prostokątem. Jego wielkość podaje się w calach, wzdłuż przekątnej. Oblicz wielkość ekranu telewizora „Rekord”, którego ekran ma wymiary 44cm x 37cm.

(1cal = 2,539cm)


$$\begin{aligned}x^2 &= 44^2 + 37^2 \\x^2 &= 1936 + 1369 \\x^2 &= 3305 \\x &= \sqrt{3305} \text{ cm} \\x &\approx 57,4 \text{ cm} \\x &\approx 22,6 \text{ cali}\end{aligned}$$

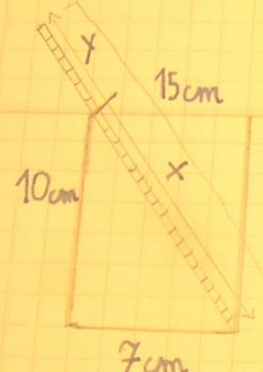
Odpowiedź: Ekran telewizora ma 22,6 cali.

Zadania

Rurka w szklance

Rurkę o długości 15cm włożono do szklanki o średnicy 7cm i wysokości 10cm.

Ile centymetrów rurki wystaje ze szklanki?

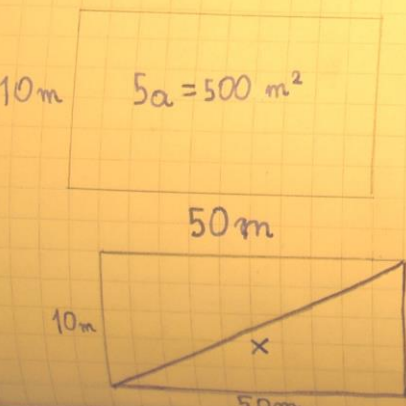

$$\begin{aligned}x^2 &= 10^2 + 7^2 \text{ cm} \\x &= \sqrt{(10^2 + 7^2)} \text{ cm} \\x &= \sqrt{(100 + 49)} \text{ cm} \\x &= \sqrt{149} \\x &\approx 12,2\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}y &= 15 \text{ cm} - x \\y &= 2,8\end{aligned}$$

Odpowiedź: Ze szklanki wystaje 2,8 cm rurki

Długość ścieżki

Rodzina Nowaków posiada działkę w kształcie prostokąta o powierzchni 5aarów i jednym z boków długości 50m. Przez tę działkę poprowadzono ścieżkę między przeciwległymi jej wierzchołkami.

Ile wynosi długość ścieżki?


$$\begin{aligned}5a &= 500 \text{ m}^2 \\x^2 &= 10^2 + 50^2 \\x^2 &= 100 + 2500 \\x^2 &= 2600 \\x &= \sqrt{2600} \text{ m} \\x &\approx 50,9 \text{ m}\end{aligned}$$

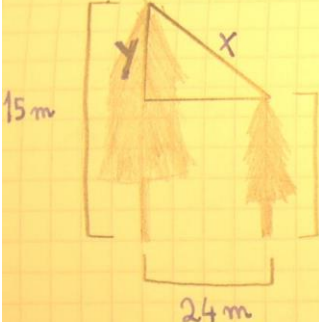
Odpowiedź: Ścieżka ma długość 50,9 m

Zadania

Odległość między wierzchołkami drzew

Dwie sosny o wysokości 8m i 15m rosną w odległości 24m.

Jaka jest odległość między ich wierzchołkami.



$y = 15 - 8 = 7 \text{ m}$

$x^2 = 7^2 + 24^2$

$x^2 = 49 + 576$

$x^2 = 625$

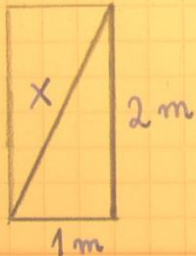
$x = \sqrt{625} \text{ m}$

$x = 25 \text{ m}$

Odpowiedź: Odległość między wierzchołkami drzew wynosi 25 m

Lustro

Czy lustro o wymiarach 2,20m x 2,20m można przenieść przez drzwi o wymiarach 1m x 2m?



$x^2 = 1^2 + 2^2$

$x^2 = 1 + 4$

$x^2 = 5$

$x = \sqrt{5} \text{ m}$

$x \approx 2,23 \text{ m}$

$2,23 \text{ m} > 2,20 \text{ m}$

Odpowiedź: Przez te drzwi da się przenieść lustro

9. Literatura

- 1) <http://portalwiedzy.onet.pl/1239,,,pitagoras,haslo.html>
- 2) http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Pitagorasa
- 3) http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Pitagorasa#Twierdzenie_odwrotne
- 4) http://www.serwis-matematyczny.pl/static/st_artykuly_trojkaty_pitagorejskie.php
- 5) http://pl.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%B3jk%C3%B3wki_pitagorejskie
- 6) http://pl.wikipedia.org/wiki/%C5%9AAlimak_Teodorosa
- 7) „Śladami Pitagorasa, Rozrywki matematyczne” Jeleński Szczepan wyd.1956r

10. Opinia nauczyciela

Z Piotrem mam przyjemność pracować od pierwszej klasy szkoły podstawowej. Jako uczeń klas I-III uczestniczył w prowadzonych przeze mnie warsztatach „Kształcenie myślenia logicznego u dzieci”. Systematycznie uczestniczy w zajęciach Koła Matematycznego oraz zajęciach indywidualnych dla uczniów szczególnie uzdolnionych matematycznie.

Piotr co roku odnosi sukcesy w konkursach matematycznych:

- Kangur Matematyczny - wynik „bardzo dobry” w latach 2011, 2012, 2013*
- Matematyka Krakowska - laureat w roku szkolnym 2012/2013*
- Małopolski Konkurs Matematyczny - wysoki wynik*
- Alfik Matematyczny - wysoki wynik.*

Piotr wykazuje duże zainteresowanie matematyką, chętnie rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności. Interesuje się tym, czego uczą się starsi koledzy.

Konkursem Prac Matematycznych zainteresowałam Piotra ja, ale temat wybrał sobie sam. Samodzielnie zebrał informacje o Pitagorasie i twierdzeniu Pitagorasa. Sam zapozna się z dowodami twierdzenia i najciekawsze zamieścił w pracy. Piotr skonstruował odcinki o długościach niewymiernych, chociaż na lekcjach nie omawialiśmy ani konstrukcji geometrycznych, ani liczb niewymiernych. Tata pomógł Mu przedstawić te konstrukcje w wersji elektronicznej.

Uczeń wybrał przykłady zastosowania twierdzenia Pitagorasa. Ja postanowiłam do każdego przykładu dopisać zadanie-problem. Piotr rozwiązał zadania bezbłędnie, bez najmniejszej mojej pomocy.

Jestem przekonana, że realizacja tematu tej pracy matematycznej pozwoliła Piotrkowi zrozumieć istotę twierdzenia Pitagorasa oraz jego zastosowanie do rozwiązywania zadań. Wykazuje się w tym temacie dużą biegłością - niejeden gimnazjalista, a może nawet licealista mógłby mu tej znajomości pozazdrościć.

Nauczyciel matematyki

Beata Ostrówka