Charakterystyka rozbicia zbioru co najwyżej przeliczalnego

Rafał Żelazko

Spis treści

1 Wprowadzenie

Niniejsza praca podejmuje tematykę partycji zbioru co najwyżej przeliczalnego. Jej motywem przewodnim jest charakterystyka struktur, jakie wyznacza dowolny podział wystarczająco licznego zbioru na skończoną liczbę pozdbiorów. Problemy rozstrzygane w tym dokumencie łączą w sobie cechy teorii Ramseya, teorii grafów, kombinatoryki oraz teorii liczb.

Praca podzielona jest na części, a tematyka każdej z nich tworzy pewien zamknięty obszar. Cechą łączącą wszystkie rozdziały jest kwestia rozbicia zbioru i towarzyszących jej własności.

Przedmiotem pracy będą struktury co najwyżej przeliczalne, czyli zawierające skończoną lub przeliczalną liczbę elementów. Przeliczalnym nazwiemy taki zbiór, dla którego istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna pomiędzy nim, a zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Moc zbioru przeliczalnego wynosi $\aleph_0$.

2 Kolorowanie skończone i zasada szufladkowa

Definicja 1. *Kolorowaniem skończonym* lub *k-kolorowaniem* zbioru S nazywamy funkcję $\chi : S \to C$, przypisującą każdemu elementowi S jedną z $|C| = k$ liczb całkowitych.

Definicja 2. Podzbiór $S' \subset S$ jest *monochromatyczny*, gdy dla każdej pary (i, j) różnych elementów podzbioru S' zachodzi $\chi(i) = \chi(j)$.

Przez kolorowanie skończone zbioru S rozumiemy podział S na skończoną liczbę parami rozłącznych pozdbiorów. Z zagadnieniem kolorowania ściśle powiązana jest zasada szufladkowa, przedstawiona poniżej.

Twierdzenie 1 (Zasada szufladkowa Dirichleta) Jeżeli zbiór o mocy niemniejszej, niż $nk + 1$ zostanie podzielony na k parami rozłącznych podzbiorów, to w co najmniej jednym z nich znajdzie się więcej, niż n elementów.

Dowód. Niech S stanowi zbiór o mocy $|S| \geqslant nk + 1$. Niech ponadto $S = S_1 \cup \ldots \cup S_k$ oraz $S_i \cap S_j = \varnothing$ dla $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$. Przypuśćmy, że dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, k\}$ zachodzi $|S_i| \leqslant n$. Mamy wówczas

$$|S| = \sum_{i=1}^{k} S_i \leqslant nk,$$

czyli sprzeczność. Stąd dla co najmniej jednego $i \in \{1, \ldots, k\}$, moc zbioru S_i przekracza n, co należało dowieść. □

Twierdzenie to możemy również „przetłumaczyć” na zbiory nieskończone.

Twierdzenie 2 (Nieskończona zasada szufladkowa) Jeżeli zbiór nieskończony zostanie podzielony na skończoną liczbę parami rozłącznych pozdbiorów, to jeden z nich będzie zawierał nieskończoną liczbę elementów.

Dowód. Niech $S_1 \cup \ldots \cup S_k$ tworzy rozbicie nieskończonego zbioru S. Załóżmy nie wprost, że moc każdego z podzbiorów S_i, dla $i = \{1, \ldots, k\}$ jest skończona.

Suma skończona pozdbiorów o skończonej mocy jest zbiorem o skończonej liczbie elementów. Dlatego $S = S_1 \cup \ldots \cup S_k$ nie może stanowić zbioru nieskończonego, co jest sprzeczne z jego definicją. Zatem istnieje $S_i \in \{S_1, \ldots, S_k\}$ o nieskończonej mocy, co kończy rozważania. □

Problem 1. Zbiór liczb całkowitych dodatnich został podzielony na skończoną liczbę podzbiorów. Wykazać, że pewien pozdbiór S spełnia następującą zależność: dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$, S zawiera nieskończenie wiele wielokrotności liczby n.

Rozwiązanie. Niech $S_1 \cup \ldots \cup S_k$ wyznaczają rozbicie zbioru $\mathbb{Z}_+$. Załóżmy, że teza jest fałszywa. Wówczas dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ istnieje takie n_i, że do S_i należy tylko skończenie wiele wielokrotności n_i.

Niech n stanowi iloczyn liczb $n_1, \ldots, n_k$. Każda wielokrotność n jest również wielokrotnością n_i, więc każdy podzbiór S_i może zawierać tylko skończenie wiele wielokrotności liczby n. Jednak oznacza to, iż także do sumy pozdbiorów $S_1, \ldots, S_k$ należy tylko skończenie wiele wielokrotności n, zaś tworzą one rozbicie zbioru liczb całkowitych dodatnich, który wielokrotności n zawiera nieskończenie wiele. Otrzymana sprzeczność dowodzi prawdziwości tezy. □

3 Kolorowanie w teorii grafów

Kolorować możemy nie tylko zbiory, ale również inne struktury, takie jak grafy. Zanim przystąpimy do analizy tego zagadnienia, wprowadzimy kilka pojęć z teorii grafów.

Definicja 3. *Graf* $G = (V, E)$ stanowi zbiór V punktów, zwanych *wierzchołkami* oraz zbiór E par wierzchołków, nazywanych *krawędziami.*

Definicja 4. *Podgrafem* $G' = (V', E')$ grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf spełniający warunek $V' \subset V$ oraz $E' \subset E$.

Definicja 5. *Graf pełny*, zwany inaczej *kliką*, to graf, którego każda para wierzchołków połączona jest krawędzią. Klikę o n wierzchołkach oznaczamy przez K_n.

Definicja 6. *Kolorowaniem krawędziowym* grafu jest przyporządkowanie każdej krawędzi grafu liczby całkowitej oznaczającej kolor.

Definicja 7. Graf pokolorowany krawędziowo jest *monochromatyczny*, gdy wszystkim jego krawędziom przypisano ten sam kolor.

Twierdzenie 3 (Twierdzenie Ramseya) Dla wszystkich liczb m, n całkowitych dodatnich istnieje taka najmniejsza liczba $R = R(m, n) \in \mathbb{Z}_+$, że każde kolorowanie krawędziowe grafu pełnego K_R na czerwono lub niebiesko wyznacza czerwony monochromatyczny podgraf pełny K_m lub niebieską monochromatyczną klikę K_n.

Dowód. Na początku zauważmy, że dla każdego $k \geqslant 2$ zachodzi $R(k,1) = R(1,k) = 1$ oraz $R(k,2) = R(2,k) = k$. Przeprowadzimy indukcję po $m+n$. Chcąc dowieść istnienia $R(m,n)$, wyznaczymy przedział skończony, w którym musi znaleźć się jej wartość. Wykażemy, że jeżeli istnieją liczby $R(m-1,n)$ oraz $R(m,n-1)$, to wówczas

$$R(m,n) \leqslant R(m-1,n) + R(m,n-1).$$

Niech $c = R(m-1,n) + R(m,n-1)$. Przyjmijmy, że każda krawędź grafu K_c została pokolorowana na czerwono lub niebiesko. Wybieramy jego dowolny wierzchołek i oznaczamy go przez v. Pozostałe $c-1$ wierzchołków rozbijamy na dwa rozłączne zbiory M i N w zależności od koloru ich krawędzi z v.

Mamy więc $|M|+|N| = c-1$. Wynika stąd, iż $|M| \geqslant R(m-1,n)$ lub $|N| \geqslant R(m,n-1)$, inaczej otrzymujemy $|M|+|N| \leqslant c-2$, czyli sprzeczność. Załóżmy bez straty ogólności, że $|M| \geqslant R(m-1,n)$.

Jeżeli M zawiera niebieską monochromatyczną klikę K_n, to zawiera ją również K_c, a to kończy rozważania. W przeciwnym wypadku istnieje czerwony monochromatyczny graf pełny $K_{m-1} \in M$. Na mocy określenia zbioru M, istnieje czerwona monochromatyczna klika K_m należąca do $M \cup \{v\}$, a więc również do K_c. Z zasady indukcji matematycznej uzyskujemy prawdziwość tezy. □

Twierdzenie Ramseya można uogólnić na skończenie wiele kolorów. Podobnie jak poprzednio, zastosujemy dowód przez indukcję.

Twierdzenie 4 (Twierdzenie Ramseya, skończona liczba kolorów) Dla wszystkich liczb $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_+$ istnieje taka najmniejsza liczba $R = R(n_1, \ldots, n_k)$ całkowita dodatnia, że każde k-kolorowanie krawędziowe grafu pełnego K_R wyznacza dla pewnego $i \in \{1, \ldots, k\}$ monochromatyczny podgraf pełny K_{n_i}.

Dowód. Zrealizujemy indukcję po liczbie kolorów. Przypadek $k = 1$ jest oczywisty, zaś $k = 2$ zachodzi na mocy poprzedniego twierdzenia. Pokażemy, że jeżeli dla pewnego $k \geqslant 3$ istnieją liczby $R(n_1, \ldots, n_l)$ dla wszystkich $l < k$, to wówczas

$$R(n_1, \ldots, n_k) \leqslant R(n_1, \ldots, n_{k-2}, R(n_{k-1}, n_k)).$$

Niech $c = R(n_1, \ldots, n_{k-2}, R(n_{k-1}, n_k))$. Pokolorujmy krawędziowo graf pełny K_c na k kolorów $\{c_1, \ldots, c_k\}$. Przypuśćmy, że $c_{k-1} = c_k$, co oznacza, iż graf K_c jest $(k-1)$-pokolorowany. Z założenia indukcyjnego K_c zawiera monochromatyczną klikę K_{n_i} o kolorze c_i, $i \in \{1, \ldots, k-2\}$ lub podgraf pełny o $R(n_{k-1}, n_k)$ wierzchołkach i wszystkich krawędziach koloru $c_{k-1} = c_k$.

Pierwsza sytuacja kończy indukcję. W drugim przypadku ponownie korzystamy z założenia indukcyjnego, na podstawie którego w grafie $K_{R(n_{k-1}, n_k)}$ znajdziemy monochromatyczną klikę $K_{n_{k-1}}$ koloru c_{k-1} lub podgraf pełny K_{n_k} o wszystkich krawędziach w kolorze c_k. Zakończyliśmy więc dowód indukcyjny. □

Z twierdzenia Ramseya dla skończonej liczby kolorów skorzystamy podczas dowodu twierdzenia Schura, omawianego w następnej części.

4 Twierdzenie Schura

Twierdzenie 5 (Twierdzenie Schura) Dla każdej liczby n całkowitej dodatniej istnieje taka najmniejsza liczba $S(n) \in \mathbb{Z}_+$, że każde n-kolorowanie zbioru $\{1, \dots, S(n)\}$ wyznacza monochromatyczne rozwiązanie równania $x + y = z$.

Dowód. Pokolorujmy każdą liczbę całkowitą dodatnią na jeden z n kolorów. Na podstawie twierdzenia Ramseya istnieje taka liczba $S(n) = R_n(3) = R(3, \dots, 3)$, że każde n-kolorwanie krawędziowe grafu pełnego $K_{S(n)}$ wyznacza monochromatyczną klikę K_3. Konstruujemy graf $K_{S(n)}$, numerując jego wierzchołki liczbami ze zbioru $\{1, \dots S(n)\}$.

Następnie przyporządkujmy kolory krawędziom kliki $K_{S(n)}$ w taki sposób, że krawędzi (i, j) przypisujemy kolor liczby całkowitej $i - j$, uzyskany przez n-kolorowanie $\mathbb{Z}_+$. Innymi słowy dla każdego $\chi : \mathbb{Z}_+ \to \{1, \dots, n\}$ spełniona jest zależność $\chi(i, j) = \chi(i - j)$, gdzie i, j są wierzchołkami grafu $K_{S(n)}$.

Na mocy określenia $S(n)$ istnieje monochromatyczny podgraf pełny K_3 grafu $K_{S(n)}$. Możemy więc wyznaczyć takie trzy wierzchołki należące do $K_{S(n)}$, że

$$i > j > k \quad \text{oraz} \quad \chi(i, j) = \chi(j, k) = \chi(i, k).$$

Dokonując podstawienia $x = i - j$, $y = j - k$, $z = i - k$ uzyskujemy trójkę $x, y, z \in \mathbb{Z}_+$ liczb, którym przypisano ten sam kolor. Ponadto stanowią one rozwiązanie równania

$$x + y = (i - j) + (j - k) = i - k = z,$$

co należało dowieść. □

Schur wykazał przez indukcję, że $S(n) \leqslant [n!e]$. Zauważył również, że jeżeli równanie $x^n + y^n = z^n$ zastąpimy kongruencją modulo liczba pierwsza, to spełnia ono własność przeciwną do występującej w Wielkim Twierdzeniu Fermata. Poniższe twierdzenie na pierwszy rzut oka nie ma nic wspólnego z kolorowaniem. Sęk w tym, że jest z nim ściśle powiązane, o czym zaraz się przekonamy.

Twierdzenie 6 (Twierdzenie Schura) Niech $n \in \mathbb{Z}_+$. Wówczas istnieje taka liczba pierwsza q, że dla wszystkich liczb pierwszych $p \geqslant q$ kongruencja $x^n + y^n \equiv z^n \pmod p$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y, z, spełniających zależność $xyz \not\equiv 0 \pmod p$.

Dowód. Niech $p > S(n)$ będzie liczbą pierwszą. Definiujemy $\mathbb{Z}_p^* = \{1, \dots, p - 1\}$ jako multiplikatywną grupę niezerowych klas reszt modulo p. Niech ponadto

$$S = \{x^n \pmod p) : x \in \mathbb{Z}_p^*\}.$$

Zauważmy, że S jest podgrupą $\mathbb{Z}_p^*$. Stąd możemy zapisać $\mathbb{Z}_p^*$ w postaci sumy

$$\mathbb{Z}_p^* = a_1 S \cup \ldots \cup a_k S, \quad k = \frac{n}{\gcd(n, p - 1)}.$$

Następnie skonstruujemy k-kolorowanie $\mathbb{Z}_p^*$ poprzez przypisanie koloru j elementowi $t \in \mathbb{Z}_p^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t \in a_j S$. Mamy $k \leqslant n$ oraz $p - 1 \geqslant S(n)$. Zatem na podstawie twierdzenia Schura istnieje monochromatyczna trójka liczb $\{a, b, c\} \subset a_i S$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, k\}$, spełniająca zależność $a + b = c$. Możemy więc wyznaczyć takie liczby $x, y, z \in \mathbb{Z}_p^*$, dla których zachodzi relacja

$$a_i x^n + a_i y^n \equiv a_i z^n \pmod{p}.$$

Mnożąc powyższą kongruencję stronami przez a_i^{-1} otrzymujemy tezę. □

Problem 2. Międzynarodowe towarzystwo zrzesza ludzi z sześciu różnych państw. Lista członków towarzystwa zawiera 1978 nazwisk, oznaczonych liczbami $1, 2, \ldots, 1978$. Dowieść, że istnieje co najmniej jedno nazwisko, którego numer stanowi sumę dwóch niekoniecznie różnych liczb, należących do osób tej samej narodowości.

(Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna 1978)

Rozwiązanie. Zauważmy, że $[6!e] = 1957 < 1978$. Zatem na podstawie twierdzenia Schura dla każdego podziału zbioru $\{1, \ldots, 1978\}$ na 6 parami rozłącznych podzbiorów co najmniej jeden z nich zawiera dwie liczby oraz ich różnicę, co należało dowieść. □

5 Równania liniowe

Definicja 8. Równanie liniowe $\mathcal{L}$ jest *r-regularne*, gdy dla pewnego $r \in \mathbb{Z}_+$, każde r-kolorowanie $\mathbb{Z}_+$ wyznacza monochromatyczne rozwiązanie równania $\mathcal{L}$.

Definicja 9. Równanie liniowe $\mathcal{L}$ jest *regularne*, gdy każde kolorowanie skończone $\mathbb{Z}_+$ wyznacza jego monochromatyczne rozwiązanie.

Na podstawie twierdzenia Schura równanie $x + y = z$ jest regularne. Poniższe twierdzenie generalizuje ten fakt na wszystkie jednorodne równania liniowe.

Twierdzenie 7 (Twierdzenie Rado) Niech $\mathcal{L}$ reprezentuje równanie liniowe zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ postaci $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = 0$ o niezerowych współczynnikach całkowitych. Równanie $\mathcal{L}$ jest regularne wtedy i tylko wtedy, gdy suma elementów pewnego niepustego podzbioru jego współczynników wynosi 0.

Dowód tego twierdzenia znajduje się w literaturze: [6].

Problem 3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki podział $\mathbb{Z}_+$ na skończoną liczbę podzbiorów, że do żadnego z nich nie należy rozwiązanie równania $5a + 2b + 2c + 3d = e$.

Rozwiązanie. Pokażemy, że taka partycja istnieje. Skonstruujemy kolorowanie

$$\chi : \mathbb{Z}_+ \to \{1, \ldots, 12\}.$$

Jeżeli 13 nie dzieli n, definiujemy $\chi(n) = n \pmod{13}$. W przypadku, gdy 13 dzieli n k-krotnie, ale nie $(k+1)$-krotnie, przypisujemy $\chi(n) = \frac{n}{13^k} \pmod{13}$.

Zauważmy, że takie kolorowanie spełnia zależność $\chi(13n) = \chi(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$. Oznacza to, iż jeżeli liczby $s_1, \ldots, s_5$ stanowią monochromatyczne rozwiązanie równania $5a+2b+2c+3d = e$ i są podzielne przez 13, to $\frac{s_1}{13}, \ldots, \frac{s_5}{13}$ również są monochromatycznym rozwiązaniem tego równania.

Załóżmy nie wprost, że takie monochromatyczne rozwiązanie istnieje. Innymi słowy, przypuśćmy, że istnieją liczby $s_1, \ldots, s_5 \in \mathbb{Z}_+$ spełniające równanie $5a + 2b + 2c + 3d = e$ oraz zależność $\chi(s_1) = \ldots = \chi(s_5)$. Wówczas dzieląc równanie stronami przez 13 w najniższej potędze, jaka występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczb $s_1, \ldots, s_5$ możemy przyjąć bez straty ogólności, że jedna z tych liczb jest niepodzielna przez 13.

Następnie rozważmy kongruencję

$$5a + 2b + 2c + 3d - e \equiv 0 \pmod{13}.$$

Ponieważ liczbom $s_1, \ldots, s_5$ przypisano ten sam kolor, przystają one do 0 (mod 13) lub do wspólnej wartości $r \in \{1, \ldots, 12\}$ (mod 13), która odpowiada ich kolorowi. Co najmniej jedna z tych liczb jest względnie pierwsza z 13, zatem pewna ze wspomnianych reszt jest różna od zera.

Korzystając z tego, że r nie jest podzielna przez 13, dzielimy kongruencję stronami przez r, otrzymując $m \equiv 0 \pmod{13}$, dla pewnego m, stanowiącego sumę niektórych spośród współczynników $\{5, 2, 2, 3, -1\}$ równania wyjściowego.

Jednak 13 nie dzieli żadnej z tych sum, co prowadzi do sprzeczności. Zatem nie istnieje monochromatyczne rozwiązanie równania $5a + 2b + 2c + 3d = e$.

Odpowiedź: Tak. $\square$

6 Ciągi arytmetyczne w jednym kolorze

Twierdzenie 8 (Twierdzenie van der Waerdena) Dla wszystkich liczb k, l całkowitych dodatnich istnieje taka najmniejsza liczba $W(k, l) \in \mathbb{Z}_+$, że każde k-kolorowanie zbioru $\{1, \ldots, W(k, l)\}$ wyznacza monochromatyczny ciąg arytmetyczny długości l.

Twierdzenie van der Waerdena oznacza, że dla każdego kolorowania skończonego zbioru liczb całkowitych dodatnich istnieje skończony, monochromatyczny ciąg arytmetyczny dowolnej długości. Dowód przedstawiony jest w [11].

Pokażemy jednak, iż własność ta nie zachodzi dla nieskończonych ciągów arytmetycznych poprzez demonstrację odpowiedniego kolorowania $\mathbb{Z}_+$.

Problem 4. Skonstruować takie kolorowanie skończone $\mathbb{Z}_+$, które wyklucza istnienie nieskończonych, monochromatycznych ciągów arytmetycznych.

Rozwiązanie. Podzielimy zbiór liczb całkowitych dodatnich na nieskończenie wiele parami rozłącznych podzbiorów $A_1, A_2, A_3, \ldots$ w taki sposób, że pozdbiór A_k zawiera k kolejnych liczb całkowitych i znajduje się pomiędzy podzbiorami A_{k-1} oraz A_{k+1}.

Podzbiory porządkujemy rosnąco, tak że maksymalnym elementem A_k jest liczba $\frac{1}{2}k(k+1)$. Następnie kolorujemy je naprzemiennie na czerwono i niebiesko. Innymi słowy, wszystkim elementom zbioru $\{1\}$ przyporządkowujemy kolor czerwony, elementom $\{2, 3\}$ - niebieski, $\{4, 5, 6\}$ - czerwony itd.

Wówczas dla dowolnej liczby $l \in \mathbb{Z}_+$ każdy nieskończony, monochromatyczny ciąg arytmetyczny o różnicy l ma z założenia nieskończenie wiele elementów rozmieszczonych w podzbiorach $A_l, A_{l+1}, A_{l+2}, \ldots$. Jednak każdy z tych podzbiorów ma moc nie mniejszą, niż l. Zatem jeżeli wyraz opisanego ciągu należy do pozdbioru A_i dla pewnego $i \geqslant l$, to jego najbliższy wyraz nie należący do A_i musi znaleźć się w A_{i+1}, co jest sprzeczne z monochromatycznością ciągu. $\square$

Definicja 10. Niech A stanowi podzbiór $\mathbb{Z}_+$. *Asymptotyczną gęstością górną* zbioru A nazywamy liczbę $\overline{d}(A)$, zdefiniowaną następująco:

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}{n}.$$

Twierdzenie 9 (Twierdzenie Szemerédiego) Każdy pozdbiór $\mathbb{Z}_+$ o niezerowej asymptotycznej gęstości górnej zawiera dowolnie długie, skończone ciągi arytmetyczne.

Zaprezentowany przez Szemerédiego dowód można znaleźć w [10]. Przedstawione poniżej twierdzenie nazywane jest często wielomianowym twierdzeniem Szemerédiego.

Twierdzenie 10 (Twierdzenie Bergelsona-Leibmana) Niech $P_1, \ldots, P_n$ będą wielomianami o współczynnikach wymiernych, takimi że

$$1 \leqslant j \leqslant n \Rightarrow (z \in \mathbb{Z} \Rightarrow P_j(z) \in \mathbb{Z})$$

i spełniającymi zależność $P_j(0) = 0$. Wówczas dla dowolnych liczb $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}_+$ istnieją liczby całkowite $x \neq 0$ oraz a, dla których zbiór postaci

$$\{a + P_1(x)v_1, \ldots, a + P_n(x)v_n\}$$

należy do każdego pozbioru $\mathbb{Z}_+$ o niezerowej asymptotycznej gęstości górnej.

Zauważmy, że podstawienie $P_j = jx^m$ oraz $v_j = 1$ dla każdego $j \in \{1, \ldots, n\}$ implikuje fakt, iż niezależnie od podziału $\mathbb{Z}_+$ na skończoną liczbę parami rozłącznych podzbiorów, co najmniej jeden z nich zawiera ciąg arytmetyczny, którego różnicą jest m-ta potęga liczby całkowitej. Dowód tego niezwykłego twierdzenia można znaleźć w literaturze: [1].

Na zakończenie przedstawione zostanie zadanie olimpijskie, które rozwiążemy, stosując jedno z poznanych twierdzeń.

Problem 5. Zbiór liczb rzeczywistych został podzielony na dwa nieprzecinające się pozdbiory. Wykazać, że dla każdej pary (m, n) liczb całkowitych dodatnich istnieją liczby rzeczywiste $x < y < z$ należące do jednego podzbioru, takie że $m(z - y) = n(y - x)$.

(British Mathematical Olympiad 2012)

Rozwiązanie. Zauważmy, że celem rozwiązania problemu wystarczy dowieść wersję dla zbioru liczb całkowitych dodatnich. Na podstawie twierdzenia van der Waerdena jeden z otrzymanych podzbiorów zawiera ciąg arytmetyczny o długości $m + n + 1$.

Niech $a \in \mathbb{Z}_+$ stanowi pierwszy wyraz tego ciągu, natomiast $d \in \mathbb{Z}_+$ jego różnicę. Wówczas liczby a, $a+md$ oraz $a+(m+n)d$ są wyrazami tego ciągu. Zatem podstawiając

$$x = a, \quad y = a + md, \quad z = a + (m+n)d,$$

otrzymujemy $m(z-y) = dmn$ oraz $n(y-x) = dmn$, co kończy rozwiązanie. $\square$

7 Literatura

1. Bergelson V., Leibman A.: *Polynomial Extension of van der Waerden's and Szemerédi's theorems.* J. Amer. Math. Society, Providence, 1996, 725–753.

2. Djukić D., Janković V., Matić I., Petrović N.: *The IMO Compendium.* Springer, New York 2006.

3. Glasscock D.: *Partition Regularity for Linear Equations over* $\mathbb{N}$. Ohio State University (2010), 2-3.

4. Landman B. M., Robertson A.: *Ramsey Theory on the Integers.* Amer. Math. Society, Providence, 2004.

5. Liu H.: *Combinatorial Number Theory.* University of Minnesota, 2012.

6. Rado R.: *Studien zur Kombinatorik.* Math. Zeit 36 (1933), 242–280.

7. Ramsey F.: *On a Problem of Formal Logic.* Proc. London Math. Society 30 (1928).

8. Schur, I.: *Über die Kongruenz* $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 25 (1916), 114-117.

9. Soifer A.: *The Mathematical Coloring Book.* Springer, New York, 2009.

10. Szemerédi, E.: *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression.* Acta Arithmetica XXVII (1975), 199–245.

11. van der Waerden B. L.: *Beweis einer Baudetschen Vermutung.* Nieuw Archief voor Wiskunde 15 (1927), 212–216.