

UPORZĄDKOWAĆ METODY KONSTRUOWANIA WIELOKĄTÓW FOREMNYCH

Autor : Olga Stec

Ul. Źródlana 18 B

33-100 Tarnów

Uczennica III LO im. Adama Mickiewicza w Tarnowie

Opiekun: mgr Jerzy Pantera

Ul. Prostopadła 4/51

33-100 Tarnów

Tarnów 24.02.2013r

SKĄD POMYSŁ ?

- ◎ Pomysł na pracę wpadł mi do głowy bardzo przypadkowo, kiedy to szukałam jakichś informacji na temat konstruowania pięciokąta foremego, ponieważ te informacje były mi potrzebne na lekcje matematyki. Wchodząc na jedną ze stron natknęłam się na opracowanie „Wielokąty foremne konstruowalne środkami klasycznymi ” Mgr Hanny Zbyszyńskiej-Przybysz, postanowiłam się zainspirować tą pracą i stworzyć własną, oryginalną, która to będzie nosiła nazwę : „Uporządkować metody konstruowania wielokątów foremnych”.

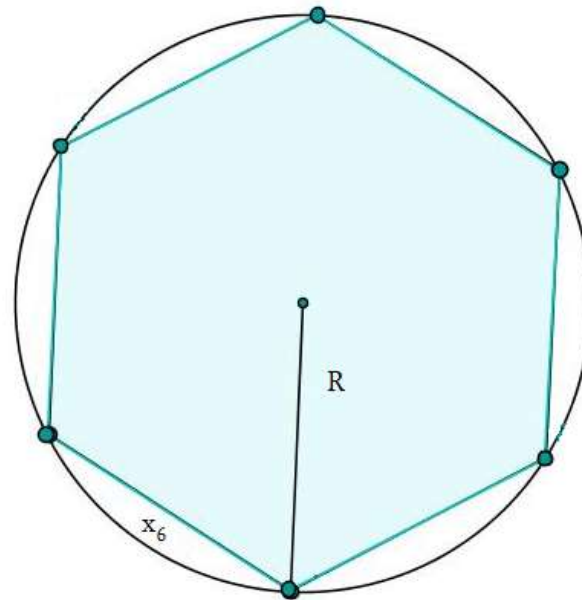
ZASADY POSTĘPOWANIA W METODZIE KLASYCZNEJ :

Zagadnienia konstrukcyjne zawsze były intrygującym i bardzo lubianym tematem w geometrii. Jeżeli chodzi o metodę klasyczną, to wiemy że ogranicza nas ona wyłącznie do korzystania z cyrkla i linijki. Takie tradycyjne konstrukcje sięgają starożytności, jednak sami Grecy nie unikali stosowania innych przyborów. Jest to niesamowite jakie pole do popisu dają nam dwa, proste przyrządy, możemy podzielić na połowę odcinek lub kąt, z danego punktu poprowadzić prostą prostopadłą do danej prostej, traktując długość odcinka za jednostkę otrzymywać inne odcinki dowolnej długości drogą dzielenia, mnożenia, dodawania, odejmowania i pierwiastkowania stopnia drugiego (długość takiego odcinka wyraża się jako iloczyn długości jednostkowej i liczby otrzymanej w wyniku skończonej liczby operacji wymienionych wyżej – takie liczby noszą nazwę niewymierności kwadratowe). Nie możemy jednak zapomnieć, że problem nie polega na praktycznym narysowaniu figury z pewną dokładnością, ale na tym czy można znaleźć teoretyczne rozwiązanie przy użyciu linijki i cyrkla, z założeniem że narzędzia są idealnie dokładne.

1. Konstrukcja :

a) sześciokąta => trójkąta

Bok sześciokąta (powstały zapewne z zabawy cyrklem) oznaczmy jako x_6 , który jak wiem równy jest promieniowi koła(R), w który wpisany jest sześciokąt.



$$x_6 = R$$

Natomiast bok trójkąta oznaczmy jako x_3 , który jest równy $x_3 = 2 \sqrt{R^2 - h^2}$, wynika to z tego przekształcenia :

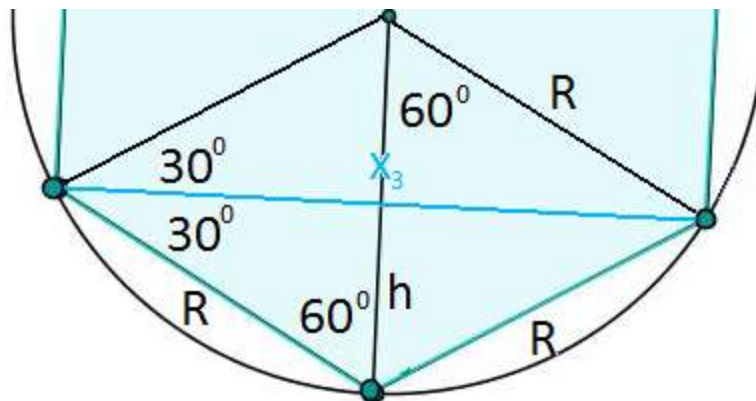
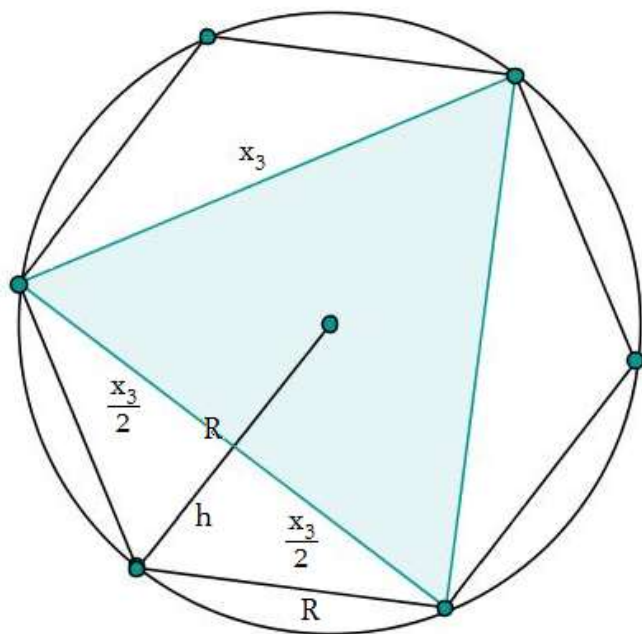
$$(x_3/2)^2 = R^2 - h^2$$

$$x_3^2 = 4 (R^2 - h^2)$$

$$x_3 = 2 \sqrt{(R^2 - h^2)}$$

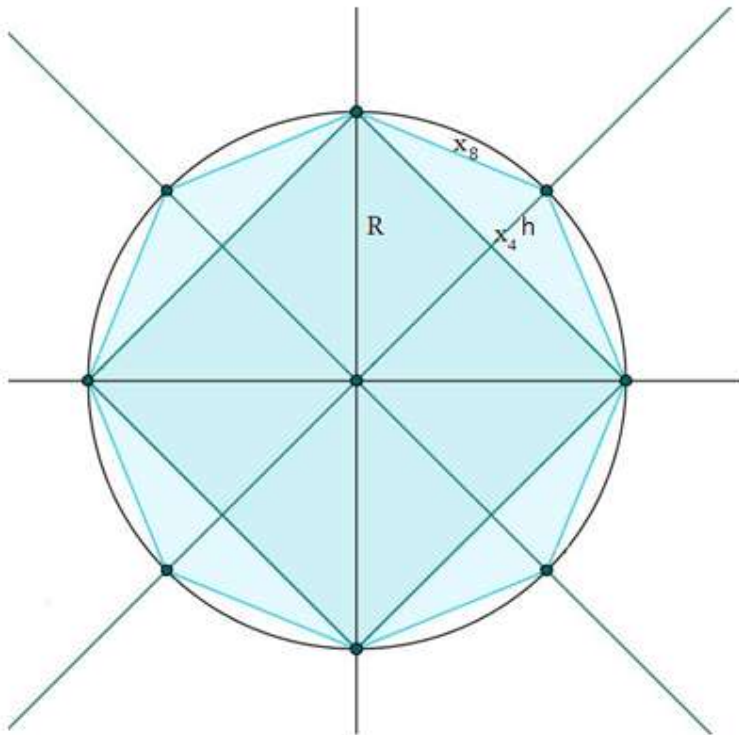
Z rysunku pomocniczego wynika : $h = R/2$, w konsekwencji

$$x_3 = \sqrt{3} R$$



b) czworokąta => ośmiokąta

Bok czworokąta oznaczamy przez x_4 , jak wiemy jest równy $R\sqrt{2}$. Natomiast bok ośmiokąta jako x_8 i wyznaczmy go, prowadząc symetralne boków czworokąta. (czworokąt powstaje przez połączenie punktów przecięcia się okręgu z prostymi prostopadłymi które przecinają się w środku okręgu).



$$\begin{aligned}x_8^2 &= (x_4/2)^2 + h^2 \\x_8^2 &= (2R^2/4) + h^2 \\X_8 &= \sqrt{(R^2/2 + h^2)}\end{aligned}$$

$$(x_4 / 2)^2 = x_8^2 - h^2 \rightarrow h^2 = x_8^2 - (x_4 / 2)^2 \rightarrow h = \sqrt{(x_8^2 - x_4^2 / 4)}$$

$$(x_4 / 2)^2 + (R-h)^2 = R^2$$

$$x_4^2 / 4 + R^2 - 2Rh + h^2 = R^2$$

$$x_4^2 / 4 - 2R \sqrt{(x_8^2 - x_4^2 / 4)} + x_8^2 - x_4^2 / 4 = 0$$

$$x_8^2 = 2R \sqrt{(x_8^2 - x_4^2 / 4)}$$

$$x_8^4 = 4R^2 (x_8^2 - x_4^2 / 4)$$

$$x_8^4 = 4R^2 x_8^2 - R^2 x_4^2$$

$$x_8^4 - 4R^2 x_8^2 + R^2 x_4^2 = 0 \quad \text{rozwiązuje równanie dwukwadratowe}$$

$$\Delta = 16R^4 - 4R^2 x_4^2 \quad ; \quad x_4 = R\sqrt{2}$$

$$\Delta = 8R^4$$

$$x_8^2 = (4R^2 \pm R^2 \sqrt{8}) / 2$$

$$x_8^2 = R^2 (2 \pm \sqrt{2})$$

$$x_8 = R\sqrt{(2 \pm \sqrt{2})} \quad \text{Rozwiązanie z plusem nie spełnia warunków,}$$

ponieważ $x_8 < x_4$.

$$x_8 = R\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$$

Otrzymywanie z dziesięciokąta foremnego pięciokąta foremnego:

- w oparciu o konstrukcję po prawej stronie konstruuję bok dziesięciokąta

$$a/x = x/R \rightarrow a = x^2/R$$

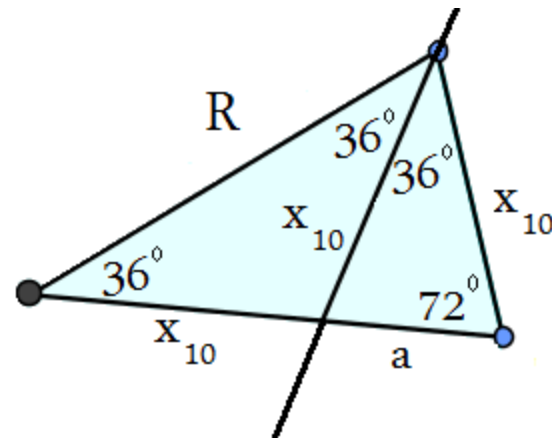
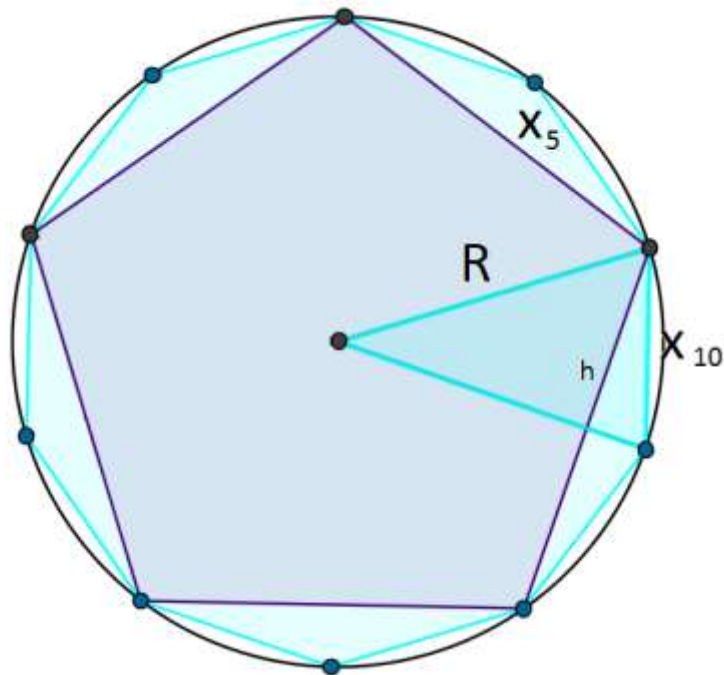
$$R = x + a$$

$$R = x + x^2/R \rightarrow R^2 = xR + x^2$$

$$x^2 + xR - R^2 = 0$$

$$\Delta = R^2 + 4R^2 = 5R^2$$

$$x_{10} = (-R \pm R\sqrt{5})/2 \rightarrow \text{rozwiązanie z minusem odrzucamy}$$



Tu wyliczamy bok pięciokąta z dziesięciokąta:

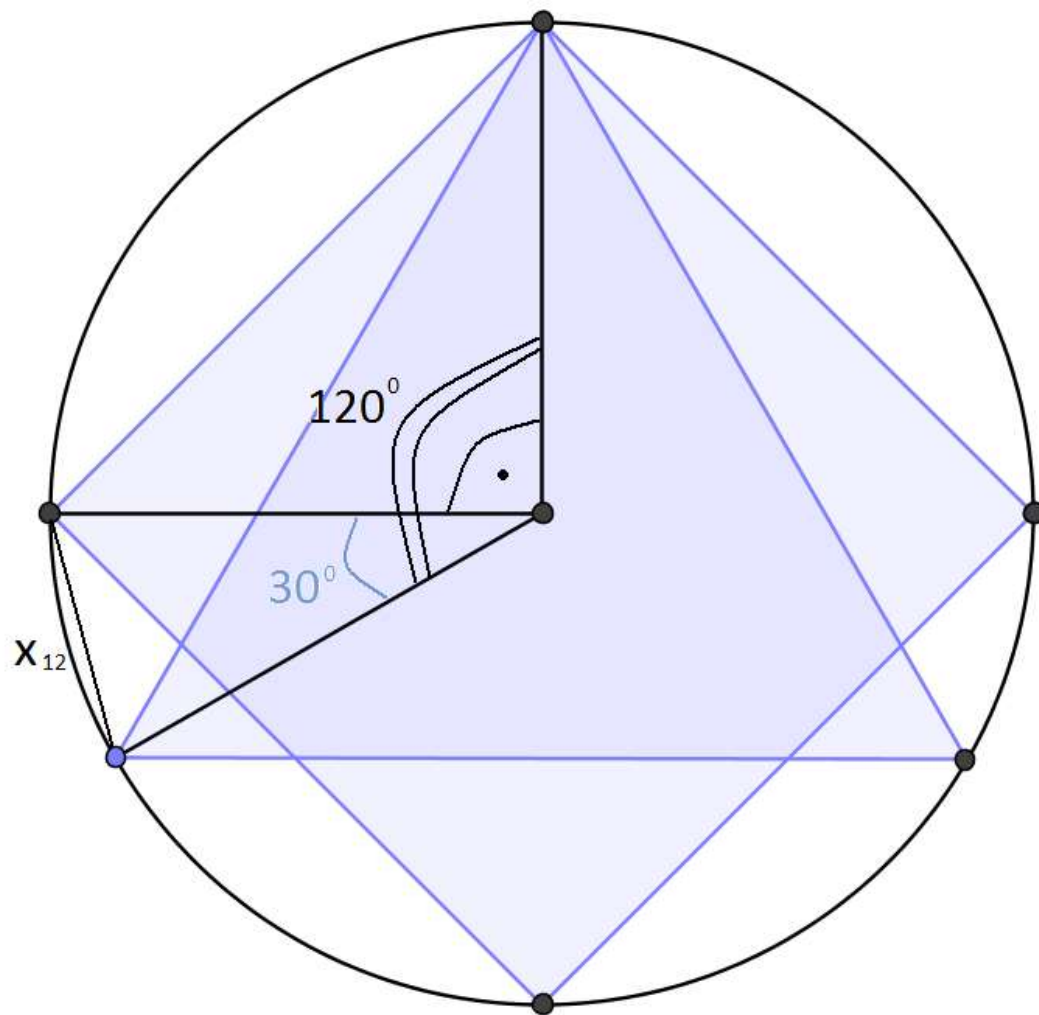
$$\begin{aligned}
 x_5^2 &= 4 (x_{10}^2 - h^2) \quad \text{gdzie } h = R - \sqrt{(R^2 - x_5^2 / 4)} \\
 x_5^2 &= 4 \{ x_{10}^2 - 2R^2 + x_5^2 / 4 + 2R[\sqrt{(R^2 - x_5^2 / 4)}] \} \\
 x_5^2 &= 4 x_{10}^2 - 8R^2 + x_5^2 + 8R[\sqrt{(R^2 - x_5^2 / 4)}] \\
 0 &= 2 x_{10}^2 - 4R^2 + 4R[\sqrt{(R^2 - x_5^2 / 4)}] \\
 &\quad - 2R[\sqrt{(R^2 - x_5^2 / 4)}] = x_{10}^2 - 2R^2 \quad / ()^2 \\
 4R^2 (R^2 - x_5^2 / 4) &= (x_{10}^2 - 2R^2)^2 \\
 4R^4 - R^2 x_5^2 &= x_{10}^4 - 4 x_{10}^2 R^2 + 4R^4 \\
 R^2 x_5^2 &= 4 x_{10}^2 R^2 - x_{10}^4 \\
 x_5^2 &= 4 x_{10}^2 - x_{10}^4 / R^2 \\
 x_5 &= x_{10} \sqrt{(4 - x_{10}^2 / R^2)} \\
 X_5 &= \{ [R (\sqrt{5} - 1)] / 4 \} \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}
 \end{aligned}$$

Wszystkie powyższe konstrukcje prowadzą do przedstawienia długości boku wielokąta za pomocą niewymierności kwadratowej, czyli wszystkie powyższe wielokąty można wykreślić przy pomocy cyrkla i linijki.

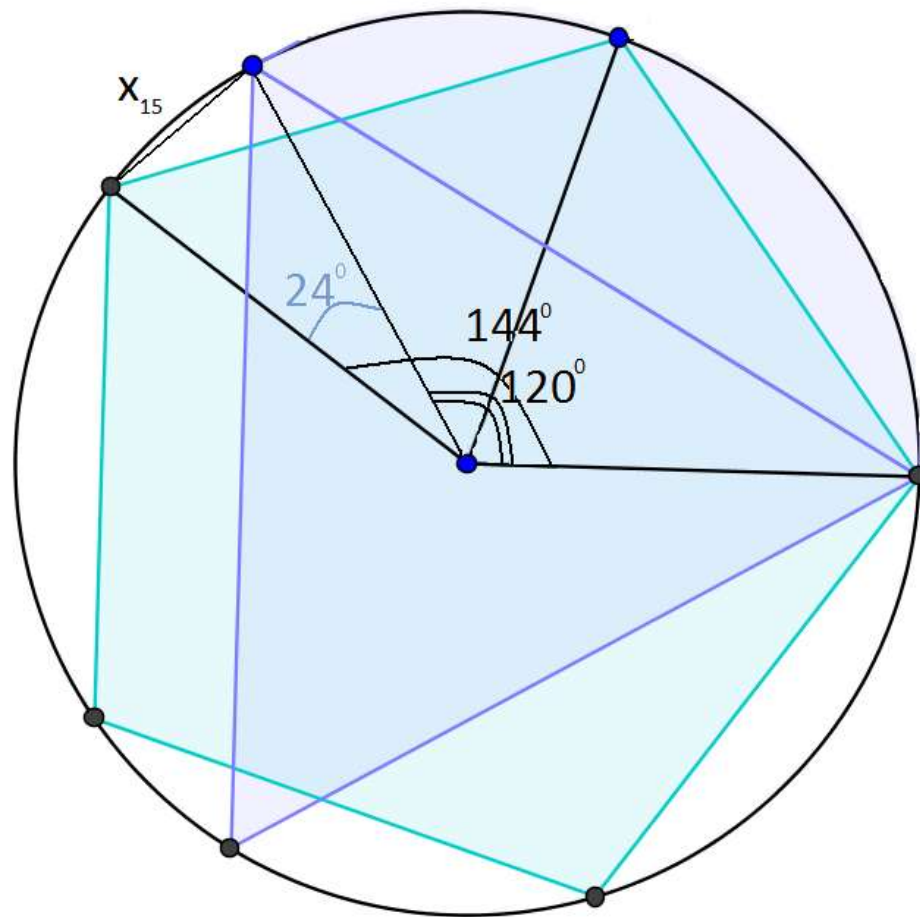
KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE :

Opierają się na możliwości wyznaczenia wielokątów foremnych przez podział (również wielokrotny) kątów łatwych do skonstruowania tj. 60° , 90° . Tą metodą otrzymałam szesnasto- kąt oraz dwudziesto cztero- kąt, możliwe są dalsze podziały. Można też konstruować wielokąty foremne wykorzystując metodę Euklidesa, którą on zastosował do konstrukcji piętnasto- kąta. Ja tym sposobem skonstruowałam również dwunasto- kąt, dwudziesto- kąt, trzydziesto- kąt.

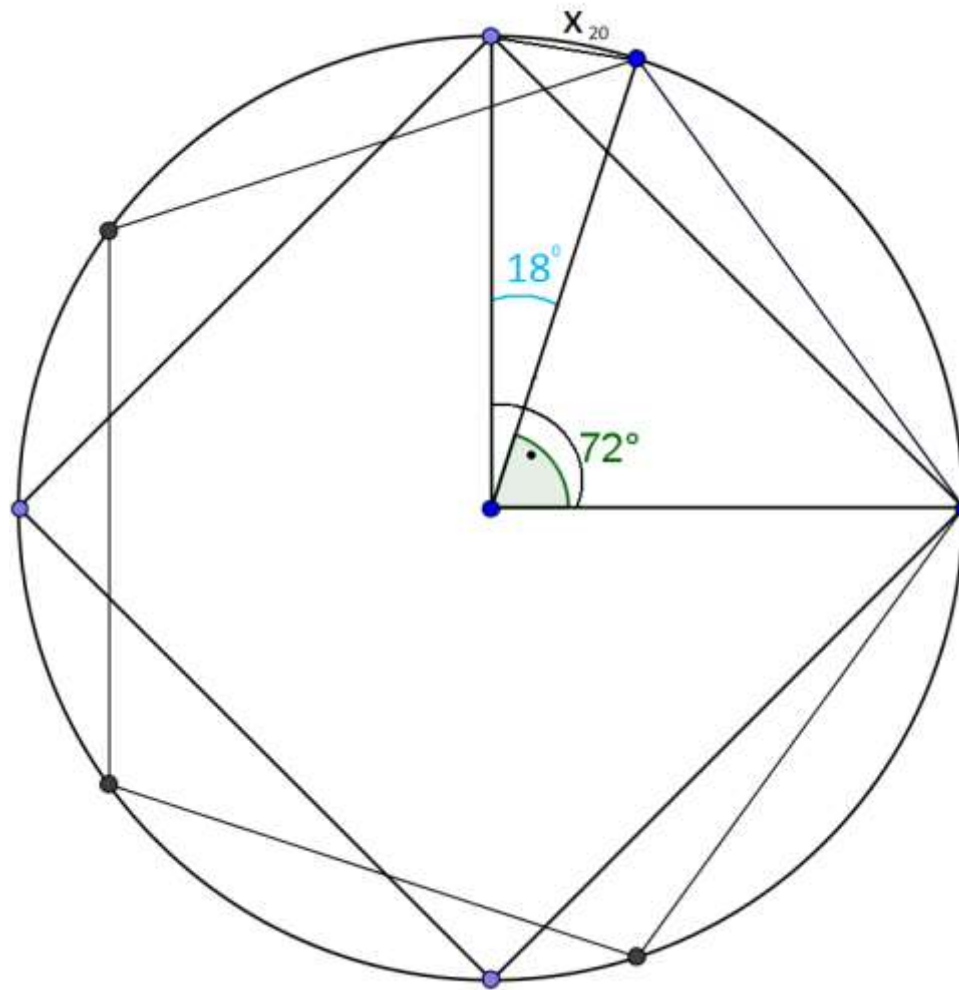
Za pomocą kwadratu i trójkąta foremnego wpisanego w okrąg wyznaczyłam bok dwunasto- kąta foremnego.



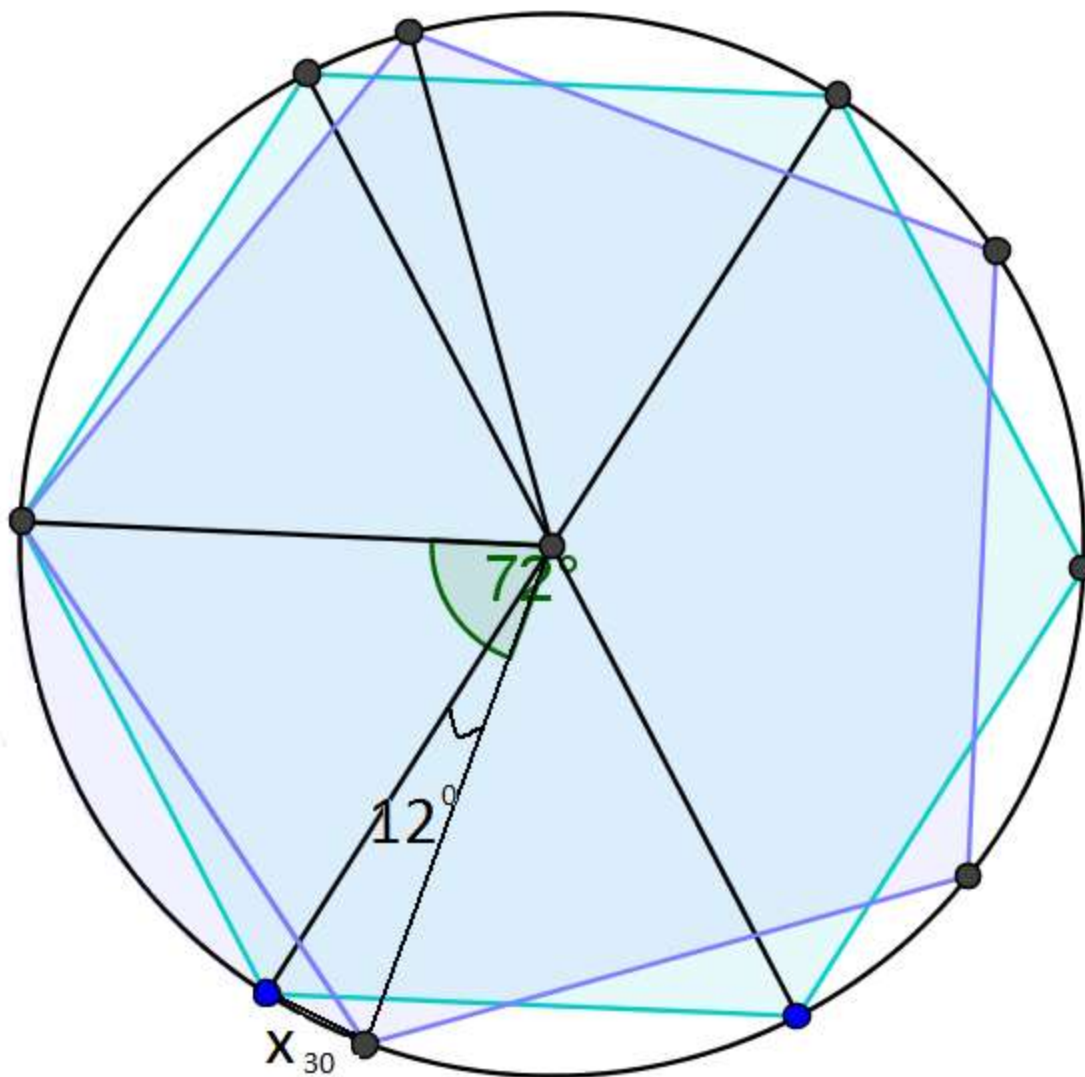
W tym przypadku do wyprowadzenia boku na piętnasto- kąt posłużył trójkąt i pięciokąt foremny wpisany w okrąg (metoda Euklidesa).



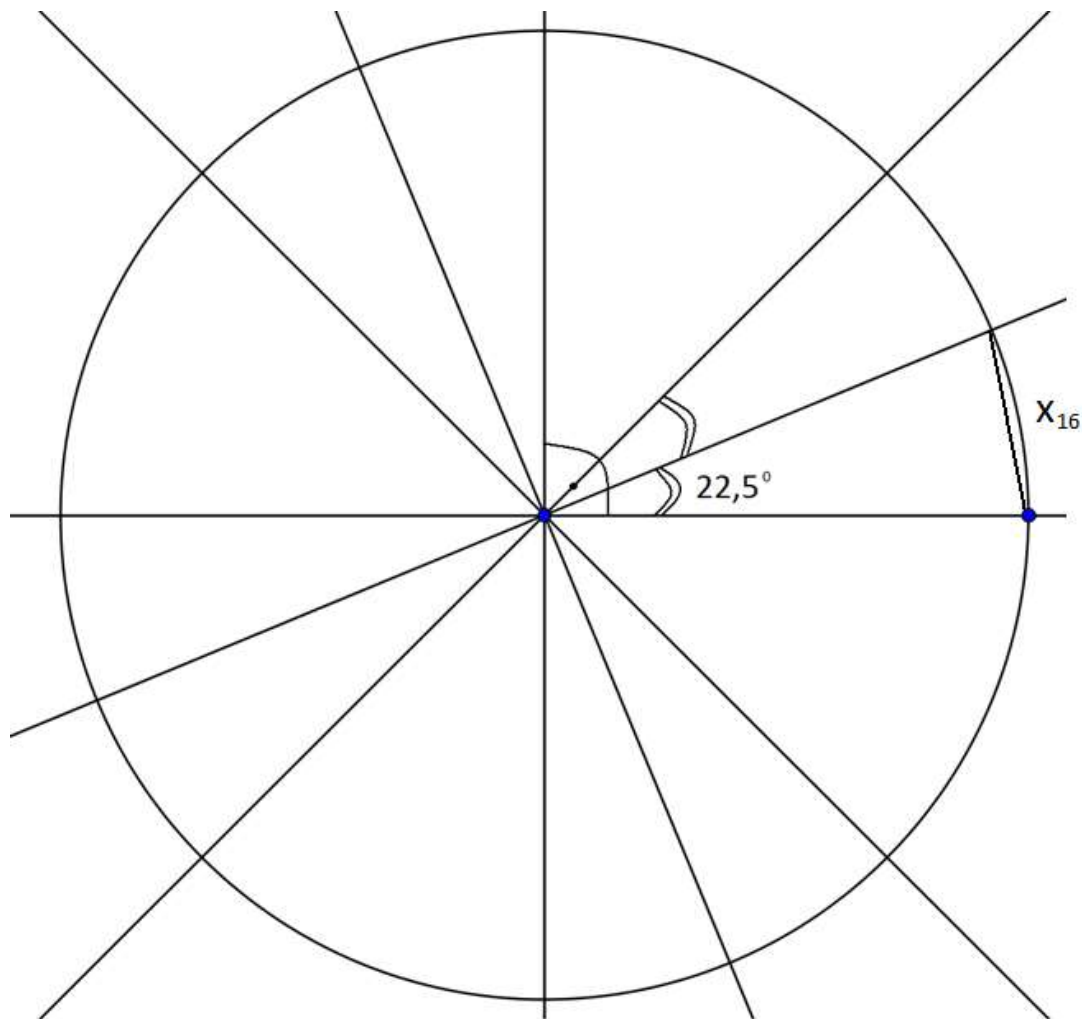
Bok dwudziesto kąta otrzymany za pomocą kwadratu i pięciokąta foremnego wpisanego w okrąg.



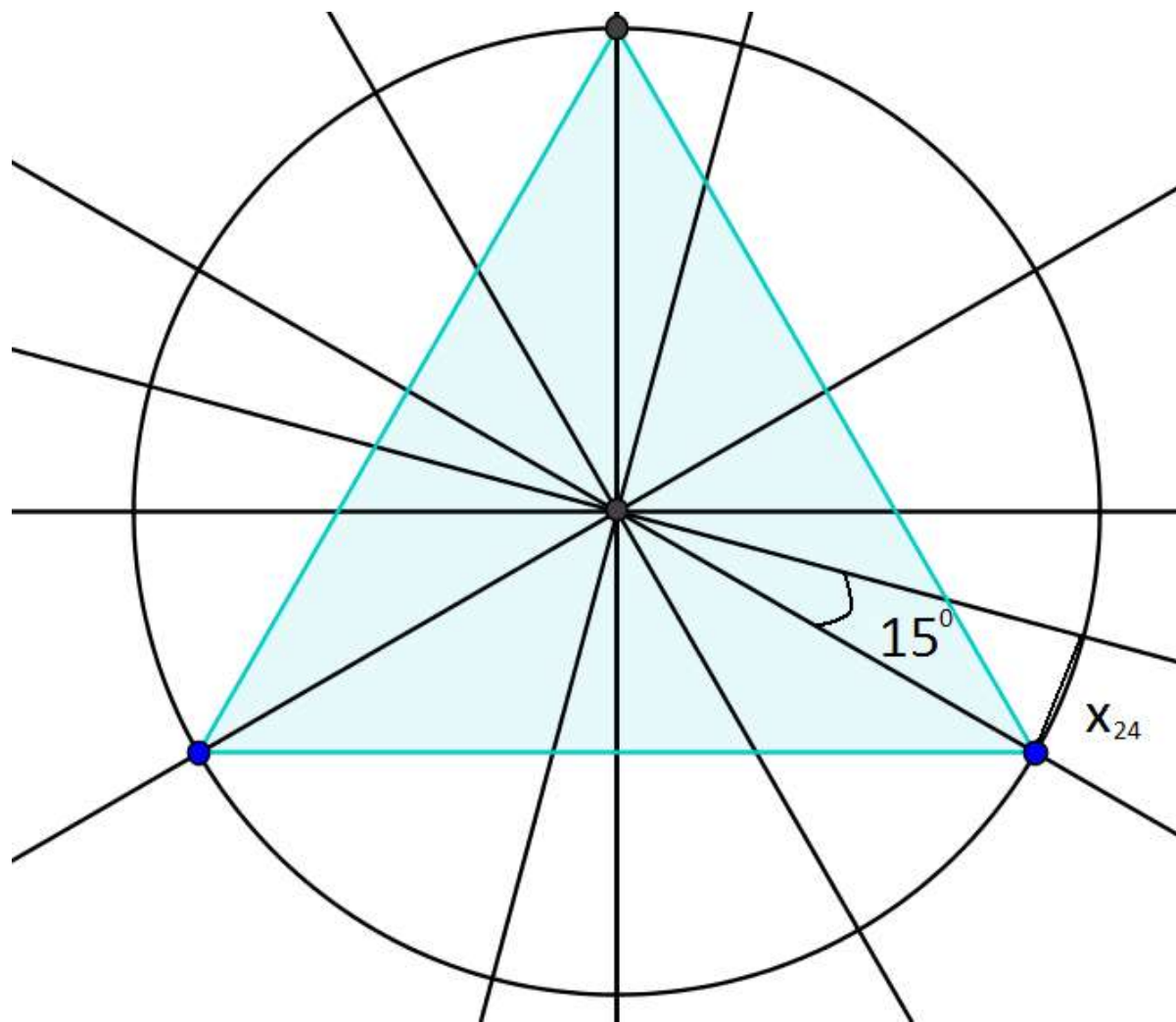
Tym razem sześciokąt i pięciokąt foremny dały mi bok trzydziesto- kąta foremnego.



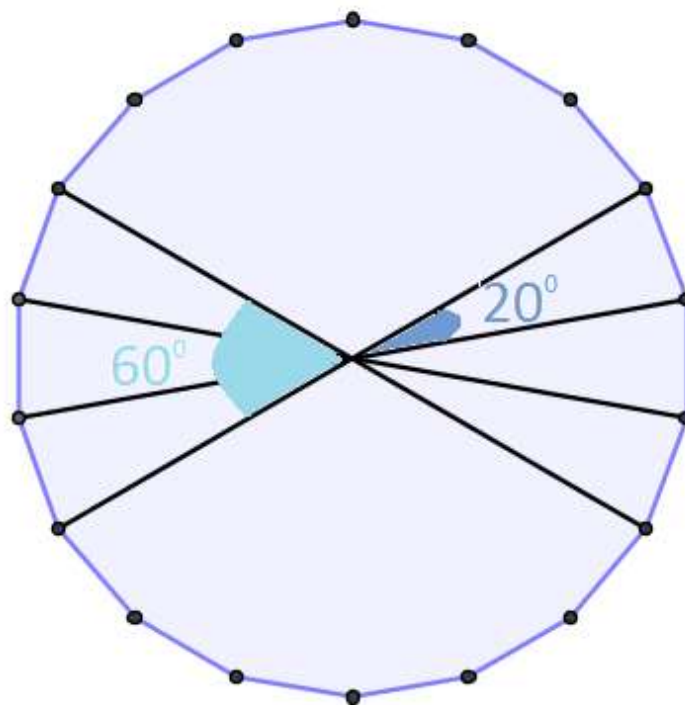
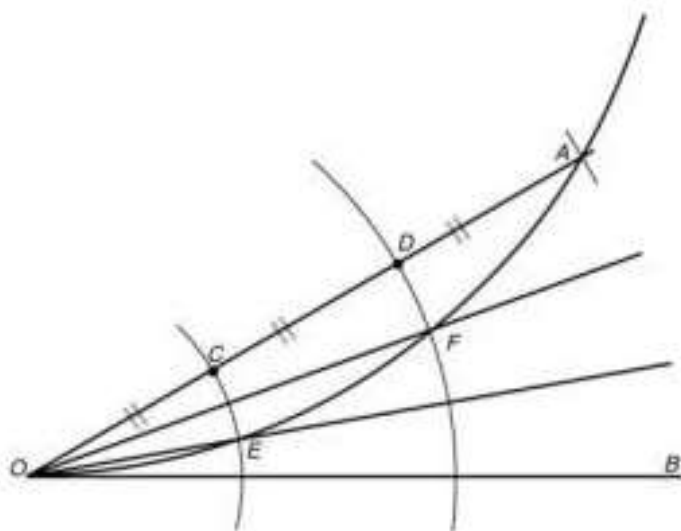
Konstrukcja boku szesnasto- kąta foremnego
przez dwukrotny podział kąta prostego.



Przez trzykrotny podział kąta 120° otrzymałam bok dwudziesto cztero- kąta.



Bardzo trudno w ogólności dokonać podziału kąta na trzy równe części. Można np.: podzielić kąt 60° na 3 części tak aby uzyskać bok osiemnasto –kąta. Aby tego dokonać trzeba wykonać konstrukcję z zastosowaniem spirali Archimedesesa. Podział kąta 30° na trzy części pozwala uzyskać trzydziesto sześciokąt, można w ten sposób uzyskać także inne wielokąty foremne.



Jest wiele konstrukcji pięciokąta foremnego np.:

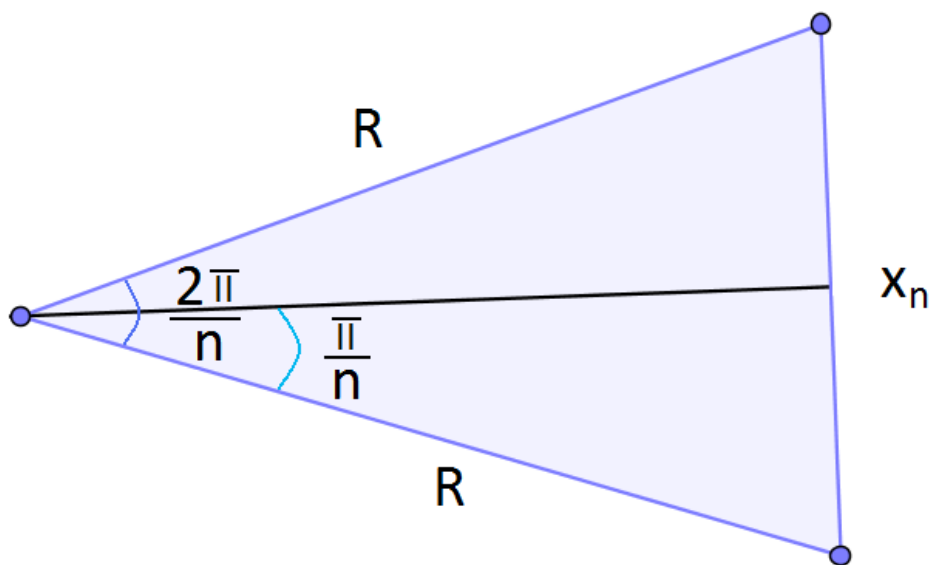
- Euklidesa,
- Herona z Aleksandrii,
- Ptolemeusza.

Powyżej jest przedstawiona konstrukcja Euklidesa, którą on oparł na tzw. *ciągłym podziale odcinka* czy także zwanym *złotym podziałem*.

METODY TRYGONOMETRYCZNE :

Oparte są na znajomości funkcji trygonometrycznych i pozwalają one na skonstruowanie dowolnego n - kąta foremnego .

Próba ogólnego podejścia do problemu :



a) korzystamy z tego, że dwusieczna kąta dzieli trójkąt równoramienny na dwa trójkąty prostokątne :

$$(x_n/2)^2 = R^2 - (R \cos \pi/n)$$

$$x_n^2/4 = R^2(1 - \cos^2 \pi/n)$$

$$x_n^2 = 4 R^2 (\sin^2 \pi/n)$$

$$x_n = 2 R \sin \pi/n$$

b) korzystam z twierdzenia cosinusów:

$$x_n^2 = R^2 + R^2 - 2RR$$

$$x_n^2 = 2 R^2 (1 - \cos 2\pi/n) \quad [1 - \cos 2\pi/n = 2 \sin^2 \pi/n]$$

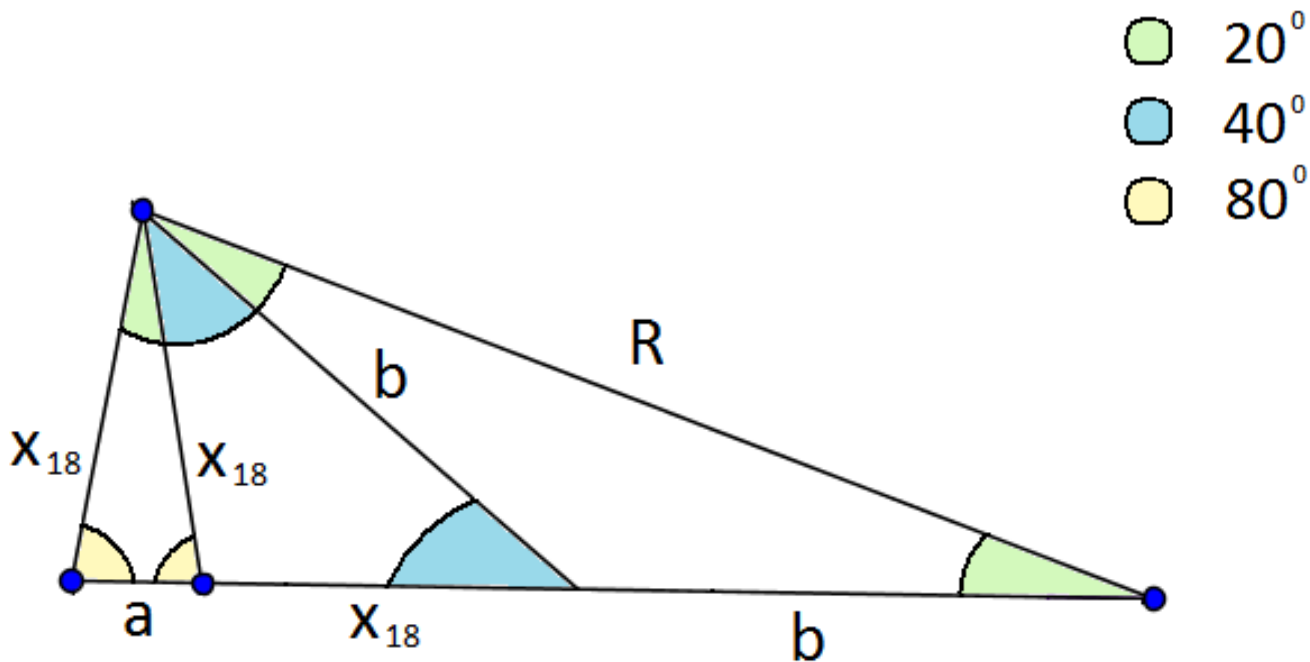
$$x_n^2 = 2R^2 2 \sin^2 \pi/n$$

$$x_n = 2 R \sin \pi/n$$

c) Tabela z wynikami otrzymanymi metoda ogólną, służące do weryfikacji wyników otrzymanych inną metodą :

Liczba n	Kąt $180^\circ / n$	$x_n = 2R \sin 180^\circ / n$
3	60°	$x_3 = \sqrt{3} R$
4	45°	$x_4 = \sqrt{2} R$
5	36°	$x_5 \approx 1,176 R$
6	30°	$x_6 = R$
7	$180/7^\circ$	$x_7 \approx 0,868 R$
8	$45/2^\circ$	$x_8 \approx 0,765 R$
9	20°	$x_9 \approx 0,684 R$
10	18°	$x_{10} \approx 0,618 R$
12	15°	$x_{12} \approx 0,518 R$
15	12°	$x_{15} \approx 0,416 R$
18	10°	$x_{18} \approx 0,347 R$
20	9°	$x_{19} \approx 0,313 R$
24	$7,5^\circ$	$x_{24} \approx 0,261 R$
30	6°	$x_{30} \approx 0,209 R$

NIEKIEDY MOŻNA POŁĄCZYĆ OBIE POPRZEDNIE METODY
CZYLI GEOMETRYCZNĄ I TRYGNOMETRYCZNĄ. DLA
PRZYKŁADU PRZEDSTAWIĘ KONSTRUKCJĘ OSIEMNASTO- I
DZIEWIĘCIO- KĄTA FOREMNEGO :



$x_{18} = x \rightarrow$ do obliczeń

$x^2 = 2R^2 (1 - \cos 20^\circ) \dots (1) \rightarrow$ z twierdzenia cosinusów

$a/x = x/R \rightarrow \underline{a = x^2/R} \rightarrow$ z podobieństwa trójkątów

$b^2 = R^2 + b^2 - 2R b \cos 20^\circ \rightarrow$ z twierdzenia cosinusów

$$R = 2b \cos 20^\circ$$

$$\cos 20^\circ = R / 2b \dots (2)$$

$$(1)(2) \rightarrow x^2 = 2R^2(1 - R/2b)$$

$$x^2/2R^2 = 1 - R/2b$$

$$R / 2b = 1 - x^2/2R^2$$

$$2R^3 / 2b = 2R^2 - x^2$$

$$\underline{b = R^3 / (2R^2 - x^2)}$$

$R = a + b + x$ podstawiam wyliczone wcześniej a i b

$$R = x^2/R + R^3 / (2R^2 - x^2) + x$$

$$R^2 = x^2 + xR + R^4 / (2R^2 - x^2)$$

$$2R^4 - R^2x^2 = 2R^2x^2 - x^4 + 2R^3x - x^3R + R^4$$

$$R^4 - 3R^2x^2 + x^4 - 2R^3x + x^3R = 0 \quad / : R^4$$

$$x^4/R^4 + x^3/R^3 - 3x^2/R^2 - 2x/R + 1 = 0 \rightarrow \text{teraz za } x/R \text{ podstawię } y$$

$$y^4 + y^3 - 3y^2 - 2y + 1 = 0 \dots (3) \text{ rozwiążę równanie czwartego stopnia}$$

$$(y + 1)(y^3 + ay^2 + by + c) = 0 \rightarrow y^4 + ay^3 + by^2 + cy + y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

$$y^4 + y^3(a+1) + y^2(a+b) + y(b+c) + c = 0 \dots (4)$$

Porównuje równania (3) i (4)

$$a+1=1 \rightarrow a=0$$

$$a+b=-3 \rightarrow b=-3$$

$$b+c=-2 \rightarrow c=1$$

Czyli równanie (3) przedstawimy w następujący sposób $\rightarrow$

$$\rightarrow (y+1)(y^3-3y+1)=0 \text{ można sprawdzić przez wymnożenie, że to równanie jest równoważne wyjściowemu (3).}$$

Teraz obliczę pierwiastki tego równania

$$y_0 = -1 \rightarrow \text{jednak to rozwiązanie nie spełnia warunków zadania, ponieważ } y \text{ musi być większe od zera}$$

Natomiast pozostało nam wyliczenie pierwiastków z równania :

$$y^3 - 3y + 1 = 0$$

Oznaczmy :

$$p = -3, \quad q = 1 \quad \text{ i } \quad (\text{wyróżnik}) \quad D = (p/3)^3 + (q/2)^2$$

$$D = -1 + 1/4 = -3/4 \quad D < 0 \rightarrow y_{1,2,3} = \sqrt[3]{(-q/2 + \sqrt{D})} + \sqrt[3]{(-q/2 - \sqrt{D})}$$

$$u = \sqrt[3]{(-1/2 + i\sqrt{3}/2)}, \quad v = \sqrt[3]{(-1/2 - i\sqrt{3}/2)}, \quad y_1 = u + v$$

$y_1 = \sqrt[3]{(-1/2 + i\sqrt{3}/2)} + \sqrt[3]{(-1/2 - i\sqrt{3}/2)}$ korzystam z postaci trygonometrycznej liczb zespolonych

$$y_1 = \sqrt[3]{(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)} + \sqrt[3]{(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)}$$

$$y_1 = \cos 40^\circ + i \sin 40^\circ + \cos 80^\circ + i \sin 80^\circ$$

$$y_1 = (\cos 40^\circ + \cos 80^\circ) + i (\sin 40^\circ + \sin 80^\circ) \rightarrow$$

$\rightarrow y_1 = 0,766 + 0,1736 + i (0,642 + 0,985)$ to rozwiązanie pozostaje liczbą zespoloną, my zaś szukamy rozwiązania rzeczywistego.

$$y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \quad y_3 = \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 u; \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$$y_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$y_2 = \sqrt[3]{\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^3\right]} + \sqrt[3]{\left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^3\right]}$$

$$y_2 = \sqrt[3]{\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^2\right]} + \sqrt[3]{\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^2\right]}$$

$$y_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{2/3} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{2/3}$$

Dla $k=0$

$$y_2 = \cos(120^\circ \cdot 2/3) + i \sin(120^\circ \cdot 2/3) + \cos(240^\circ \cdot 2/3) + i \sin(240^\circ \cdot 2/3)$$

y_2 nie spełnia warunków ponieważ nie jest liczbą rzeczywistą

Pierwiastkowanie powyższych liczb zespolonych jest tytaniczną pracą i dla tego postanowiłam skorzystać z gotowej reguły w poradniku matematycznym.

$y^3 - 3y + 1 = 0$; $p = -1$ $q = \frac{1}{2}$ $D = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} < 0 \rightarrow$ trzy różne pierwiastki rzeczywiste

Współczynnik $r = +\sqrt{|p|} = 1$ (+ wynika ze znaku q)

$\cos \varphi = q/(r^3)$, u nas $\cos \varphi = \frac{1}{2} / 1 = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = 60^\circ$

$$y_1 = -2r \cos(\varphi/3) = -2\cos 20^\circ < 0 \rightarrow \text{nie spełnia warunku } y > 0$$

$$y_2 = 2r \cos(60^\circ - \varphi/3) = 2 \cos 20^\circ \approx 1,8794 > 1 \text{ nie spełnia}$$

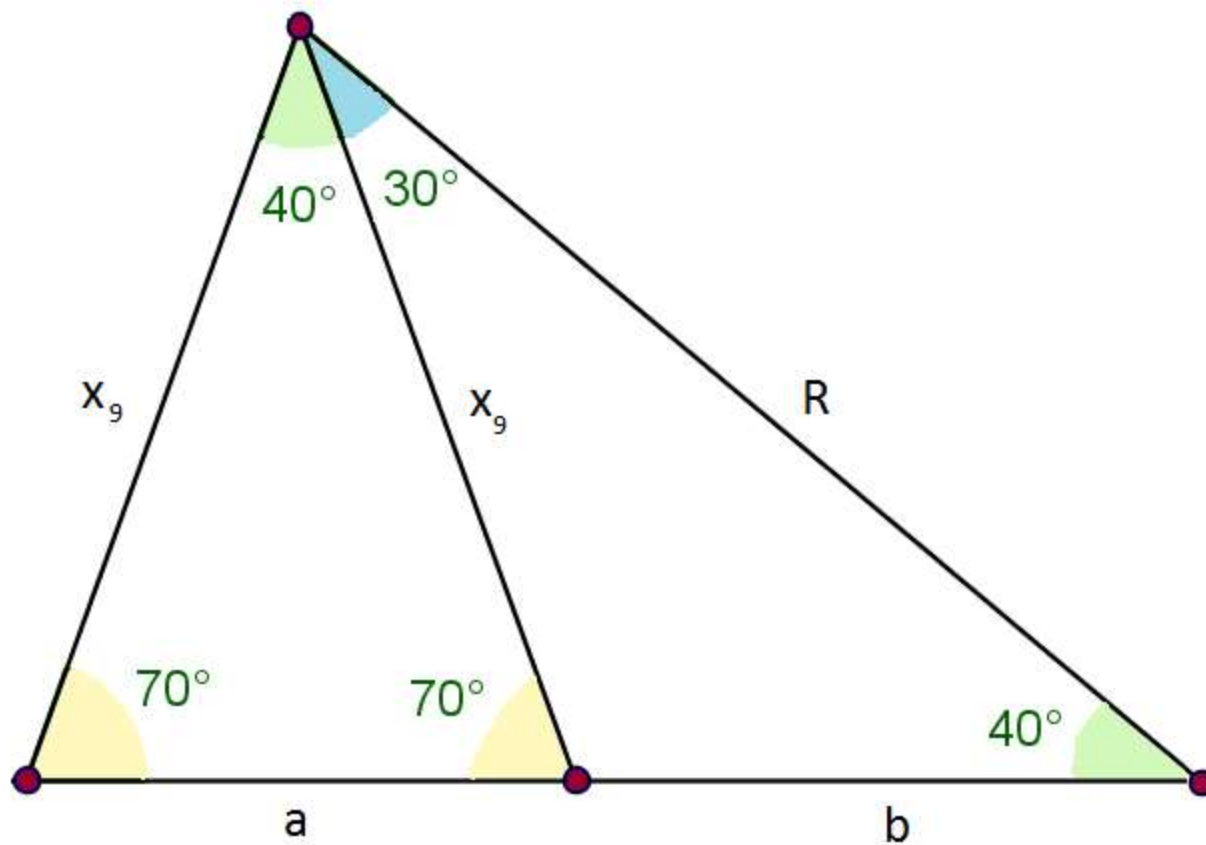
warunku $y < 1$

$$y_3 = 2r \cos(60^\circ + \varphi/3) = 2 \cos 80^\circ \approx 0,3473 \text{ spełnia warunki}$$

$$\mathbf{x/R = 0,3479 \rightarrow x = R \, 0,3479}$$

Jakkolwiek to rozwiązanie jest poprawne i prawdziwe to wyrażenie powyższe nie zawiera czynnika, który jest niewymiernością kwadratową, ponieważ w rozwiązaniu wystąpił pierwiastek trzeciego stopnia.

⊙ Konstrukcja dziewięć- kąta :



$$R=a+b$$

$$x_9/R = a/x_9 \rightarrow a = x_9^2/R$$

$$b^2=R^2 + x_9^2 - 2Rx_9\cos 30^\circ \rightarrow \text{z twierdzenia cosinusów}$$

$$b^2=R^2 + x_9^2 - 2Rx_9 \sqrt{3}/2$$

$$b= \sqrt{(R^2 + x_9^2 - Rx_9\sqrt{3})}$$

$$R= x_9^2/R + \sqrt{(R^2 + x_9^2 - Rx_9\sqrt{3})}$$

$$(R- x_9^2/R)^2= (R^2 + x_9^2 - Rx_9\sqrt{3})$$

$$R^2 - 2 x_9^2 + x_9^4/R^2= R^2 + x_9^2 - Rx_9\sqrt{3}$$

$$x_9^3/R^2 - 3x_9 + \sqrt{3} R = 0 \quad / :R$$

$$x_9^3/R^3 - 3x_9/R + \sqrt{3} = 0 \text{ podstawiam za } x_9/R \rightarrow y ; y<1$$

$$y^3 - 3y + \sqrt{3} = 0 \rightarrow \text{dla rozwiązywania tego równania stosuję}$$

metodę przedstawioną w „Poradniku
encyklopedycznym”

$$p = -1 ; q = \sqrt{3}/2 ; D = p^3 + q^2 \rightarrow D = -1/4$$

Dla $p < 0$ i $D \leq 0$

współczynnik $r = \eta \sqrt{|p|}$ $\eta = \pm 1$ (zgodnie ze znakiem q)

$$r = +\sqrt{1} = 1$$

$$\cos \varphi = (\sqrt{3}/2) / 1 = \sqrt{3}/2 \rightarrow \varphi = 30^\circ$$

$D < 0$, czyli będą trzy różne pierwiastki równania

$$y_1 = -2r \cos(\varphi/3) = -2\cos 10^\circ < 0 \rightarrow \text{nie spełnia warunku } y > 0$$

$$y_2 = 2r \cos(60^\circ - \varphi/3) = 2\cos 50^\circ \approx 1,2856 > 1 \text{ nie spełnia}$$

warunku $y < 1$

$$y_3 = 2r \cos(60^\circ + \varphi/3) = 2\cos 70^\circ \approx 0,68404 \text{ spełnia warunki}$$

$$\mathbf{x_9/R = 0,68404 \rightarrow x_9 = 0,68404 R}$$

ZASTOSOWANIE LICZB ZESPOLONYCH

- ◎ Bardzo skutecznie można do konstrukcji n - kąta foremnego wykorzystać liczby zespolone i operacje wykonywane na tych liczbach. „Moduł różnicy dwóch liczb zespolonych jest równy odległości odpowiadających im punktów na płaszczyźnie liczbowej (zespolonej) ”. Poniżej w paragrafie a) przedstawię kilka konkretnych przykładów konstrukcji mimo, iż ta metoda nie może być zaliczana do klasycznych. Jednak dzięki liczbom zespolonym można uzasadnić dlaczego rozwiązania równań postaci $z^n - 1 = 0$ były podstawą konstrukcji n – kątów metodą klasyczną – paragraf b) .

1. Liczby zespolone to liczby będące elementami rozszerzenia ciała liczb rzeczywistych o jednostkę urojoną „i” ($i^2 = -1$).

2. Mogą one przyjmować różne postacie:

- kanoniczna:

$$a + ib = \underline{z}$$

- trygonometryczna:

$$\underline{z} = |\underline{z}| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$* |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- algebraiczna:

$$z = |\underline{z}| e^{i\varphi}$$

z – liczba zespolona

a – część rzeczywista liczby zespolonej

b – część urojona liczby zespolonej

$e \approx 2,718...$

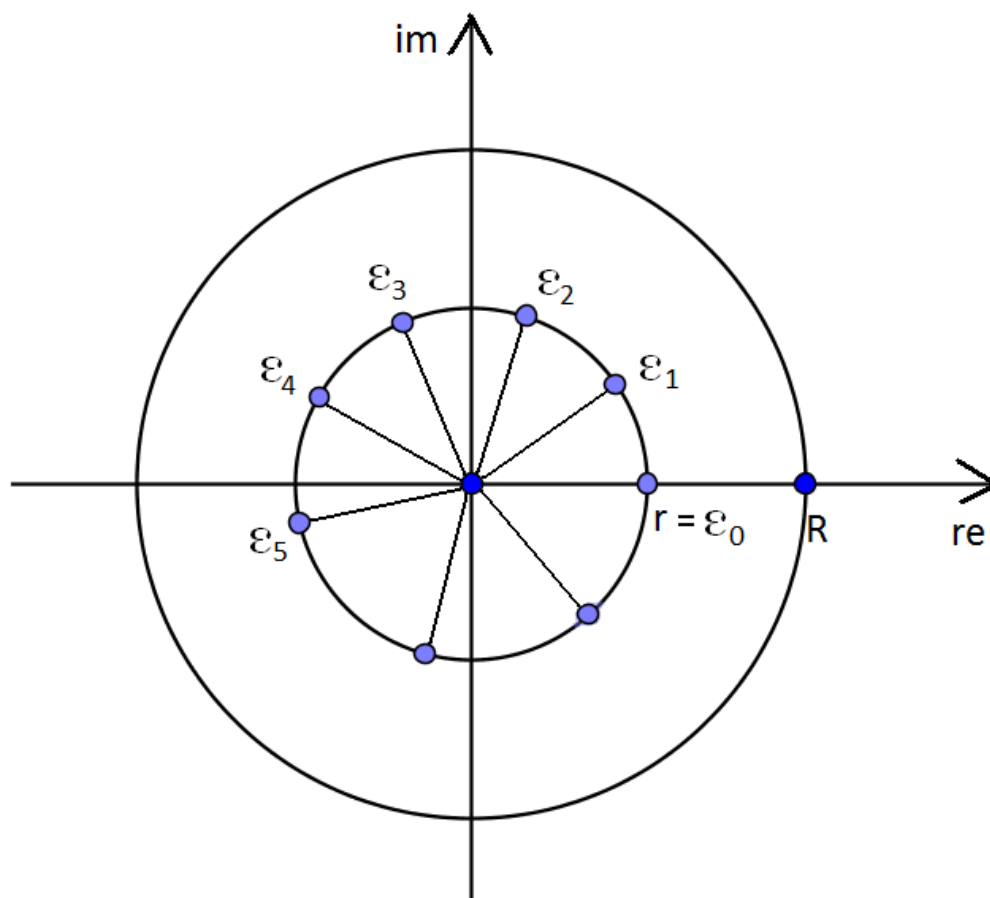
φ - argument liczby zespolonej

$|\underline{z}|$ - moduł z liczby zespolonej

a) Niech będzie dana liczba zespolona : $\underline{z} = R$

$$\underline{z} = R \cdot 1 \quad \text{tzn.} \quad \underline{z} = R (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{dla } \varphi = 0$$

Liczbę $\underline{z}$ przedstawia punkt na płaszczyźnie zespolonej:



Pierwiastek stopnia n z liczby $\underline{z}$ stanowią punkty na płaszczyźnie zespolonej, leżące na okręgu o promieniu $r = \sqrt[n]{R}$, o argumentach $\varphi_k = 2\pi k/n$; $k = 0, 1, 2 \dots n-1$, są to liczby przedstawiające pierwiastki liczby $\underline{z}$:

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{R} [\cos (\varphi+2k\pi)/n + i \sin (\varphi+2k\pi)/n] \quad \text{dla } \varphi = 0$$

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = r [\cos (2k\pi)/n + i \sin (2k\pi)/n]$$

$\sqrt[n]{\underline{z}}$ oznaczam jako $\underline{\varepsilon}_k$

$$\underline{\varepsilon}_k = r [\cos (2k\pi)/n + i \sin (2k\pi)/n]$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

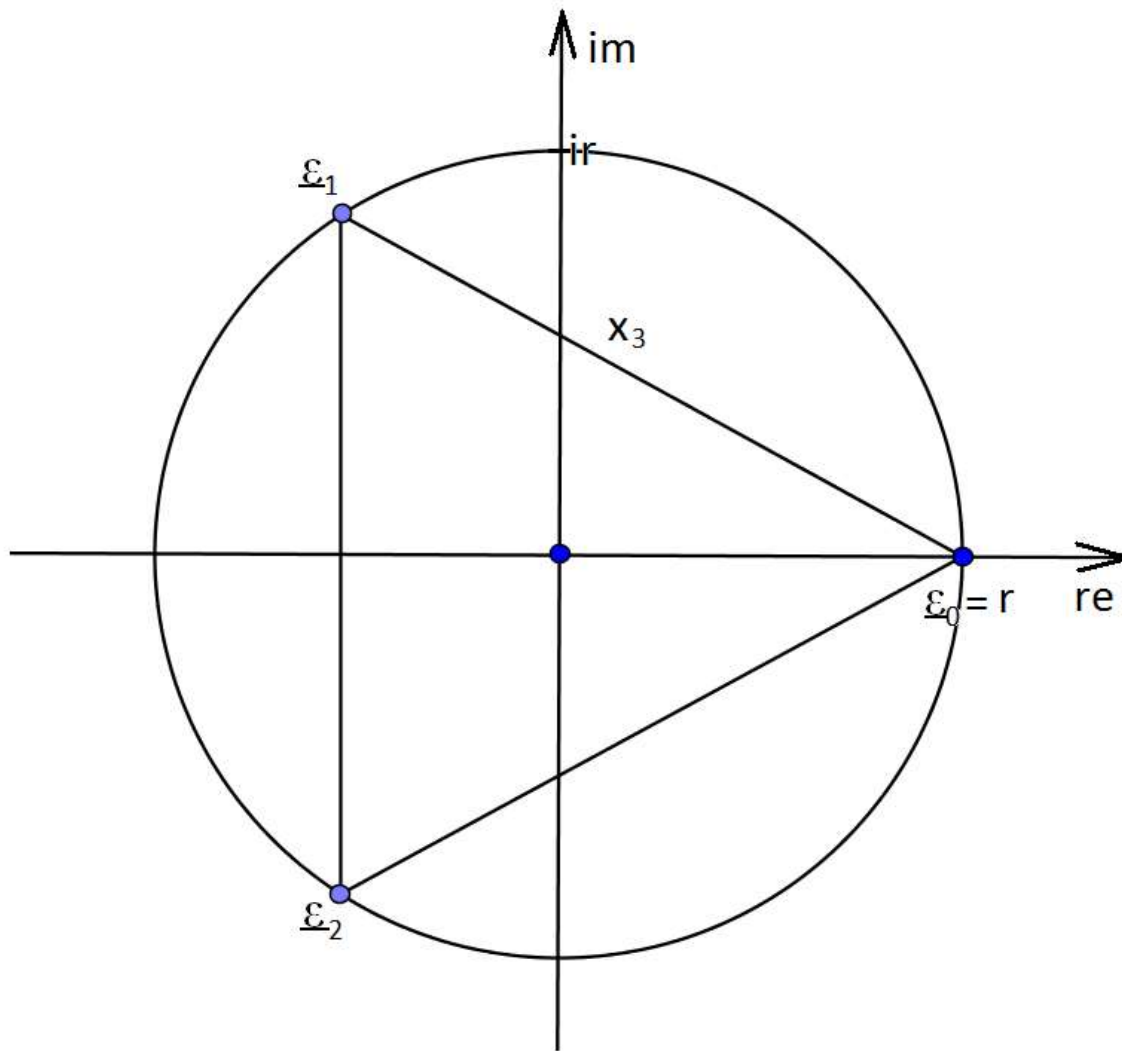
Pierwiastki $\underline{\varepsilon}_k$ są wierzchołkami wielokąta foremego wpisanego w okrąg o promieniu r . Łatwo zauważyć, że pierwiastki $\underline{\varepsilon}_k$ są wierzchołkami n – kąta foremnego, którego bok reprezentuje np.; $\underline{x}_n = \underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_0$ o długości równej modułowi liczby zespolonej $|\underline{x}_n|$.

Dla $n = 3$ $k = 0, 1, 2$

- $k = 0$ $\underline{\underline{\varepsilon_0}} = r (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon_0}} = r$

- $k = 1$ $\underline{\underline{\varepsilon_1}} = r (\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3) =$
 $= r (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) =$
 $= r (-\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ) =$
 $= r (-\frac{1}{2} + i \sqrt{3}/2)$

- $k = 2$ $\underline{\underline{\varepsilon_2}} = r (\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3) =$
 $= r (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) =$
 $= r (-\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) =$
 $= r (-\frac{1}{2} - i \sqrt{3}/2)$



$$\underline{x}_3 = \underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_0 = r (- \frac{1}{2} + i \sqrt{3}/2 - 1) = r (- 3/2 + i \sqrt{3}/2)$$

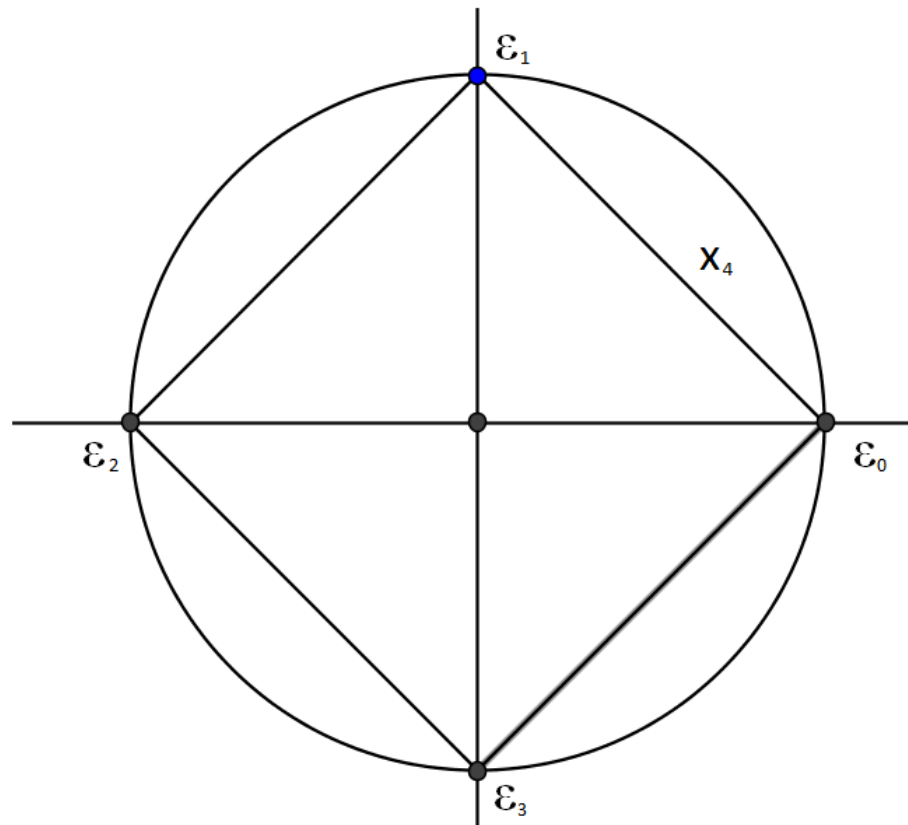
$$| \underline{x}_3 | = r \sqrt{ (9/4 + 3/4) } = r \sqrt{12} / 2 = r \sqrt{3}$$

Dla $n = 4$

- $k = 1$

$$\underline{x}_4 = \underline{z}_0 - \underline{z}_1 \quad \underline{z}_0 = r \quad \underline{z}_1 = r (\cos \tfrac{1}{2} \pi + i \sin \tfrac{1}{2} \pi)$$

$$\underline{x}_4 = r i - r = -r + r i \quad |\underline{x}_4| = r \sqrt{(1+1)} = r \sqrt{2}$$



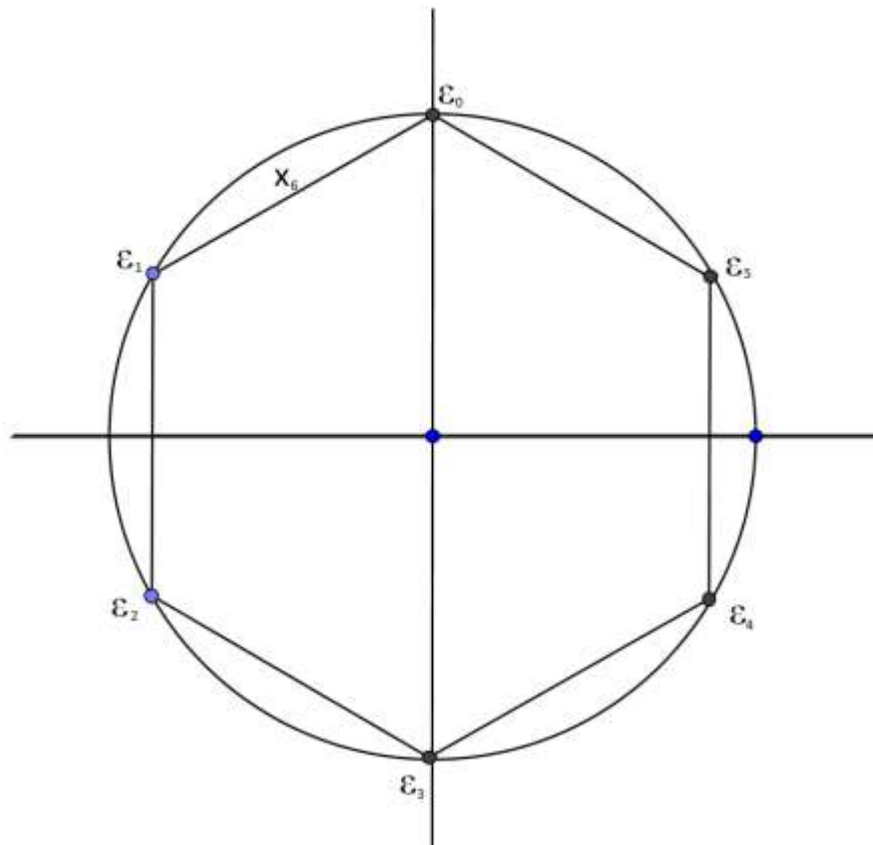
Dla $n = 6$

- $k = 1$

$$\underline{x}_6 = \underline{z}_0 - \underline{z}_1 \quad \underline{z}_0 = r$$

$$\underline{z}_1 = r (\cos 1/3 \pi + i \sin 1/3 \pi) = r (\frac{1}{2} + i \sqrt{3}/2)$$

$$|\underline{x}_6| = r \sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{3}{4})} = r \cdot 1 = r$$



Dla $n=12$

$$\underline{x}_{12} = r (\cos 1/6 \pi + i \sin 1/6 \pi) - r$$

$$\underline{x}_{12} = r (\cos 1/6 \pi - 1 + i \sin 1/6 \pi)$$

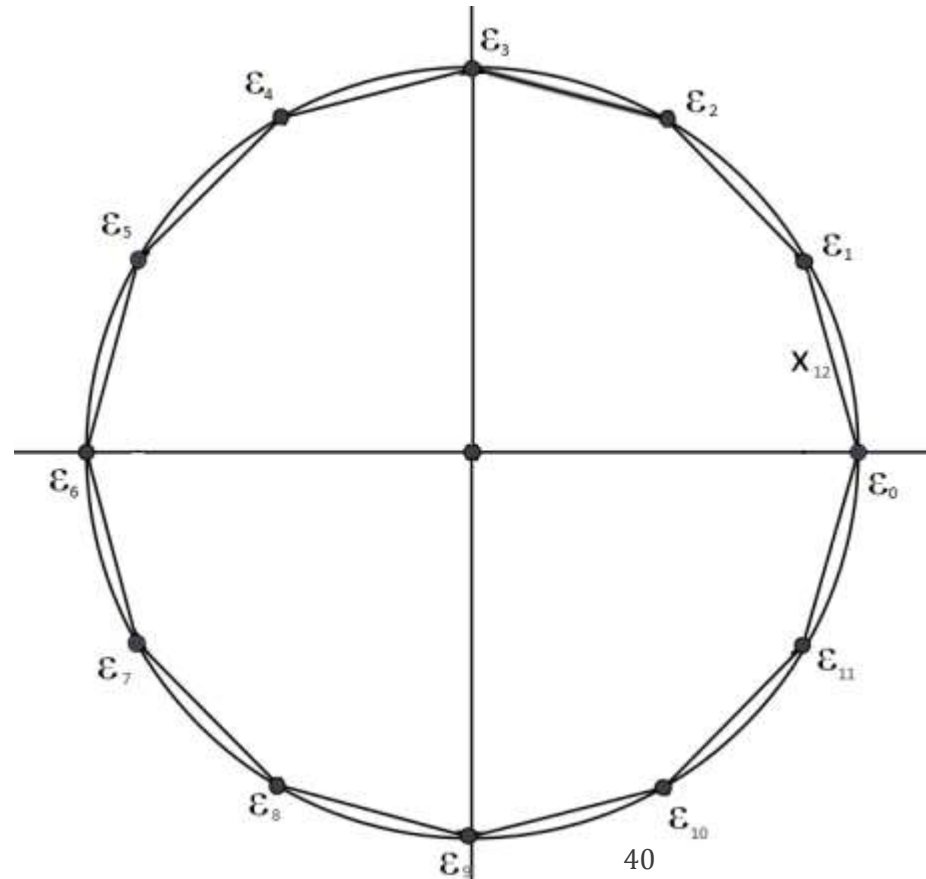
$$\underline{x}_{12} = r [(\sqrt{3})/2 - 1 + i \cdot 1/2]$$

$$|\underline{x}_{12}| = r \sqrt{[(\sqrt{3})/2 - 1]^2 + 1/4} =$$

$$= r \sqrt{3/4 - \sqrt{3} + 1 + 1/4} =$$

$$= r \sqrt{2 - \sqrt{3}} \rightarrow$$

$\rightarrow$ jest niewymiernością
kwadratową



OGÓLNIENIE :

$$\underline{x}_n = r (\cos 2\pi/n - 1 + i \sin 2\pi/n)$$

$$| \underline{x}_n | = r \sqrt{ \cos^2 2\pi/n - 2 \cos 2\pi/n + 1 + \sin^2 2\pi/n } =$$

$$= r \sqrt{ 2 - 2\cos 2\pi/n } =$$

$$= r \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos 2\pi/n} =$$

$= r 2 \sin \pi/n \rightarrow$ taki wynik uzyskałam również metodą trygonometryczną .

Jeżeli wyrażenie $\sin \pi/n$ da się przedstawić jako niewymierność kwadratową to oznacza to, że można za pomocą linijki i cyrkla wykreślić n – kąt foremny.

W książce „Opowiadania o fizykach i matematykach”, spotkałam interesujące rozważania na temat możliwości konstruowania wielokątów foremnych metodą klasyczną.

- 1) Jeżeli można otrzymać podział okręgu na p równych części (p – kąt) to można także podzielić go na $2^k p$ części dla dowolnego k należy do $\mathbf{N}$.
- 2) Jeżeli można podzielić okrąg na p_1 i p_2 części to również możliwy będzie podział na $n = p_1 \cdot p_2$ części. Jeżeli możliwy jest podział na np.: 10 części i $n = 2 \cdot 5$ wynika z tego możliwość wykreślenia pięciokąta (lub piętnasto- kąta $p_1 = 3$, $p_2 = 5$).

Próba skonstruowania n – kąta foremnego prowadzi się do podziału okręgu na n równych części. Zbiory cięciw na jakie podzielić można okrąg stanowią boki wielokątów foremnych, których długość jak wyznaczyłam wcześniej wynosi $x_n = 2r \sin \pi/n$.

Zarówno pierwiastki ε_k jak i boki wielokąta x_n mogą być w ogólności liczbami zespolonymi. Jeżeli część rzeczywista jak i urojona są niewymiernościami kwadratowymi to taki n – kąt da się skonstruować za pomocą cyrkla i linijki, czyli metodą klasyczną.

b) Matematycy w tym Fryderyk Gauss (który skonstruował metodą klasyczną siedemnasto- ką) analizowali równania typu $z^n - 1 = 0$ i obliczali pierwiastki ε_k tych równań a w konsekwencji długość boków x_n n- kąta foremnego.

Posługując się liczbami zespolonymi można wykazać równoważność tej metody ze sposobem przedstawionym w punkcie a) .

$$\text{Niech } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{R} \sqrt[n]{(\cos\varphi + i \sin\varphi)} \quad \sqrt[n]{R} = r$$

$$\varepsilon_k = r [\cos(\varphi+2k\pi)/n + i \sin(\varphi+2k\pi)/n]$$

$$(\varepsilon_k / r)^n = (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$\text{dla } \varphi = 0 \quad (\varepsilon_k / r)^n = 1$$

Oznaczę sobie : (ε_k / r) jako $v \rightarrow v^n - 1 = 0$

Takie równanie stopnia n można przedstawić w postaci :

$$v^n - 1 = (v-1) (v^{n-1} + v^{n-2} + \dots + v + 1) = 0$$

Tak więc $v-1=0 \rightarrow v_0 = 1$ lub $(v^{n-1} + v^{n-2} + \dots + v + 1) = 0$

Np.:

Dla $n = 3$

$$v^3 - 1 = 0 \rightarrow (v-1)(v^2+v+1)$$

$$\varepsilon_0/r = 1 \text{ lub } v^2 + v + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

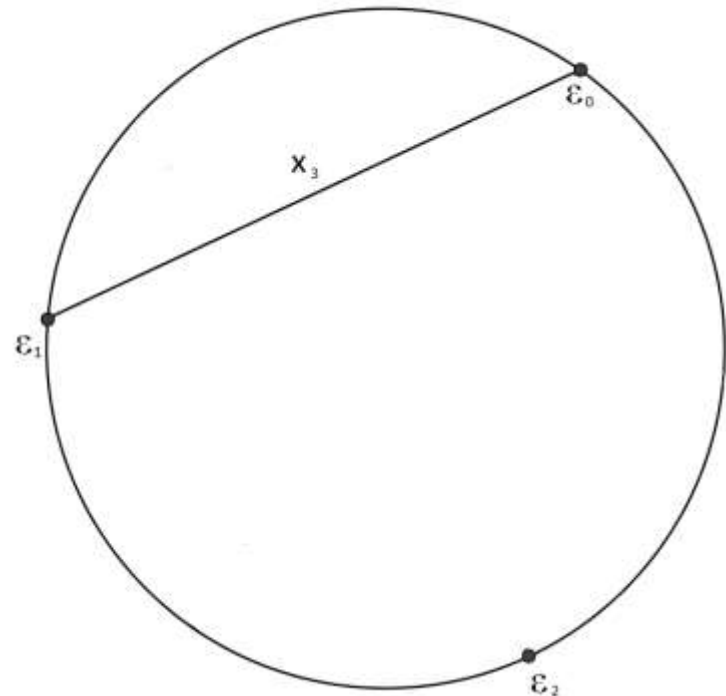
$$v = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$$

$$\varepsilon_1/r = (-1 + i\sqrt{3})/2$$

$$\varepsilon_2/r = (-1 - i\sqrt{3})/2$$

$$\underline{x}_3 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (-3/2 + i\sqrt{3}/2) r$$

$$|\underline{x}_3| = r \sqrt{9/4 + 3/4} = r \sqrt{3}$$



Dla $n = 4$

$$v^4 - 1 = 0 \rightarrow v_0 = 1 \text{ lub } v^3 + v^2 + v + 1 = 0$$

$$v^3 + v^2 + v + 1 = (v-1)(v+av+b)=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow v^3 + av^2 + v^2 + bv + av + b = 0$$

$$a+1=1 \rightarrow a=0$$

$$a+b=1 \rightarrow b=1$$

$$v^3 + v^2 + v + 1 = (v+1)(v^2+1)=0 \rightarrow v_2=-1 \text{ lub } (v^2+1)=0 \rightarrow$$

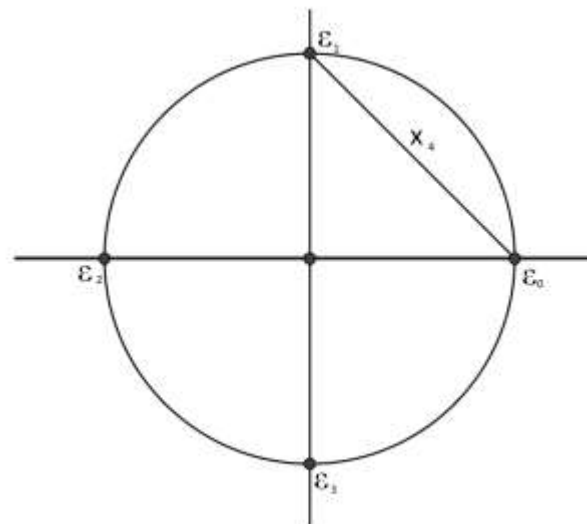
$$\rightarrow v_{1,3} = \pm i$$

$$x_4 = \varepsilon_1 r - \varepsilon_0 r \rightarrow \text{mamy } \underline{x_4} = ir - r$$

$$\underline{x_4} = -r + ir$$

$$\underline{x_4} = r(-1 + i)$$

$$|\underline{x_4}| = r \sqrt{1+1} = r\sqrt{2}$$



Dla $n = 5$

$$v^5 - 1 = 0 \rightarrow v_0 = 1 \text{ lub } v^4 + v^3 + v^2 + v + 1 = 0$$

$$v^4 + v^3 + v^2 + v + 1 = 0 \quad / : v^2$$

$$v^2 + v + 1 + 1/v + 1/v^2 = 0$$

$$v^2 + 1/v^2 + v + 1/v + 1 = 0$$

$$(v + 1/v)^2 - 2 + (v + 1/v) + 1 = 0$$

wstawiam niewiadomą $w = v + 1/v$

$$w^2 + w - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$w_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{5})/2$$

$$v_1 + 1/v_1 = (-1 - \sqrt{5})/2 \quad \text{lub}$$

$$v_2 + 1/v_2 = (-1 + \sqrt{5})/2$$

$$v_1^2 + [(1 + \sqrt{5})/2] v_1 + 1 = 0$$

$$v_2^2 - [(\sqrt{5} - 1)/2] v_2 + 1 = 0$$

$$\Delta = - (5 - \sqrt{5})/2$$

$$\Delta = - (5 + \sqrt{5})/2$$

$$v_{(1,1)}(1,2) = [-(\sqrt{5} + 1)/2 \pm i \sqrt{\{(5 - \sqrt{5})/2\}}]/2$$

$$v_{(2,1)}(2,2) = [(\sqrt{5} - 1)/2 \pm i \sqrt{\{(5 + \sqrt{5})/2\}}]/2$$

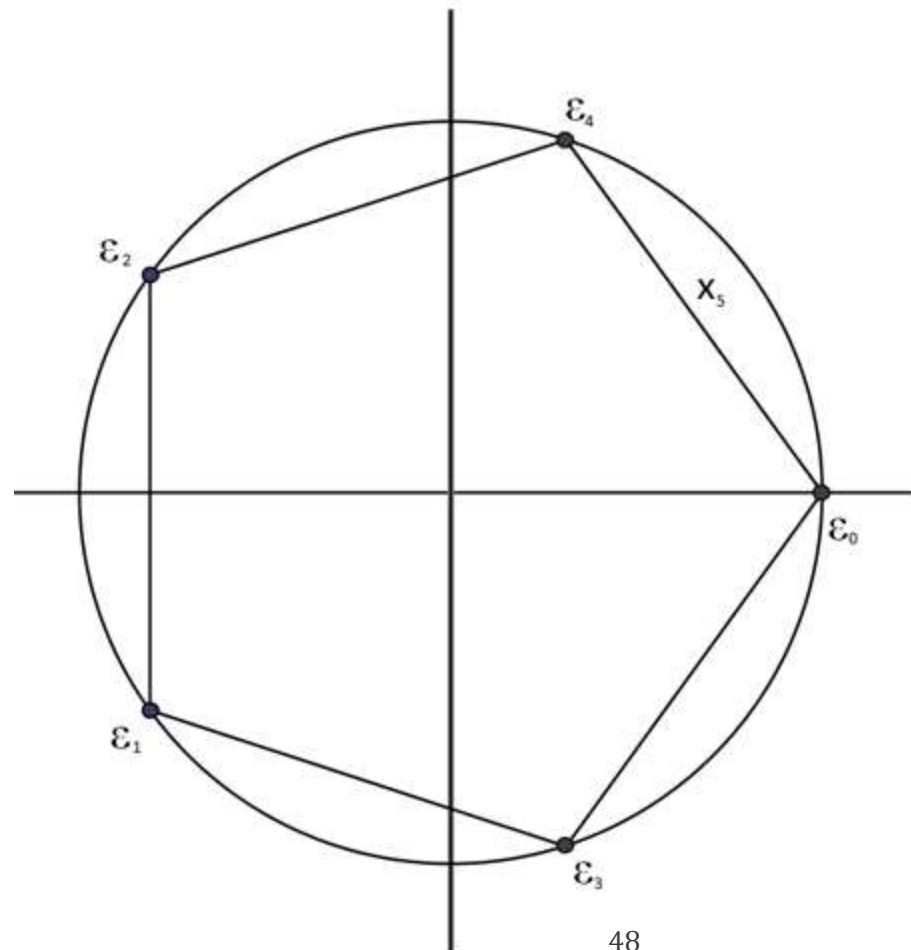
$$v_0 = 1$$

$$v_{(1,1)} = [-(\sqrt{5}+1)/2 - i \sqrt{\{(5-\sqrt{5})/2\}}]/2$$

$$v_{(1,2)} = [-(\sqrt{5}+1)/2 + i \sqrt{\{(5-\sqrt{5})/2\}}]/2$$

$$v_{(2,1)} = [(\sqrt{5}-1)/2 - i \sqrt{\{(5+\sqrt{5})/2\}}]/2$$

$$v_{(2,2)} = [(\sqrt{5}-1)/2 + i \sqrt{\{(5+\sqrt{5})/2\}}]/2$$



$$\underline{x}_5 = r[v_{(2,2)} - v_0]$$

$$\underline{x}_5 = r[(\sqrt{5} - 1)/4 + i/2\{(5 + \sqrt{5})/2\} - 1]$$

$$\underline{x}_5 = r[(\sqrt{5} - 5)/4 + i/2\{(5 + \sqrt{5})/2\}]$$

$$|\underline{x}_5| = \sqrt{[(5 - 10\sqrt{5} + 25)/16 + (5 + \sqrt{5})/8]}$$

$$|\underline{x}_5| = \sqrt{[(40 - 8\sqrt{5})/16]}$$

$$|\underline{x}_5| = 1,1756$$

Ten pięciokąt jest konstruowalny metodą klasyczną .

Końcowy efekt Fryderyka Gauss'a po obliczeniach dotyczących siedemnasto- kąta :

$$x_{17} = 1/8 \{ \sqrt{17} - 1 + \sqrt{(34-2\sqrt{17})} + \frac{1}{4} \sqrt{[17+3\sqrt{17} - \sqrt{(170+38\sqrt{17})}]] \}$$

WNIOSKI :

- Istnieje wiele równoległych metod konstruowania wielokątów foremnych.
- Metoda klasyczna niestety nie pozwala na wszystkie konstrukcje.
- Metodami uniwersalnymi są trygonometryczna i metoda z zastosowaniem liczb zespolonych.
- Udało mi się różnymi metodami pokazać, że metodą klasyczną da się skonstruować następujące n – kąty :
 $n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 20, 24, 30$.
Metodą podwajania kątów można konstruować następne wielokąty.
- Możliwe jest skonstruowanie siedemnasto- kąta (Gauss).
- Skonstruowałam dziewięcio- i osiemnasto- kąt, ale jak wynika z rachunków nie da się tych wielokątów skonstruować metodą klasyczną.
- Gauss wykazał że nie da się metodą klasyczną skonstruować siedmiokąta foremnego, chociaż podobno Archimedes tego dokonał .

Budzi zachwyt, że wiele rozwiązań w swojej pracy mogłam opierać na osiągnięciach matematyków z szesnastego wieku (Tartalia, Ferraro, Cardano). Cardano w wydanej w 1545 roku książce nazwał matematykę „Ars magna” – matematyka to rzeczywiście wielka i piękna sztuka.

Tarnów 24.02.2013r

Olga Stec

ŹRÓDŁA :

- ⊙ „Matematyka – poradnik encyklopedyczny ” I. N. Bronsztejn i K. A. Siemiendiajew PWN
Warszawa 1968
- ⊙ „Liczby i zmienne zespolone „ W. Jaworski, J. Kaczmarowski WSIP Warszawa 86
- ⊙ „Opowiadania o fizykach i matematykach ” S. G. Gindinkin (w j. rosyjskim) wyd. „Nauka”
Moskwa 1981.
- ⊙ Internet

KONIEC