Problem anioła
Strategie wygrywające i wariacje na temat gry w anioła i diabła.

Leszek Kania
V Liceum Ogólnokształcące
im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

1 Czym to się je, czyli wprowadzenie.

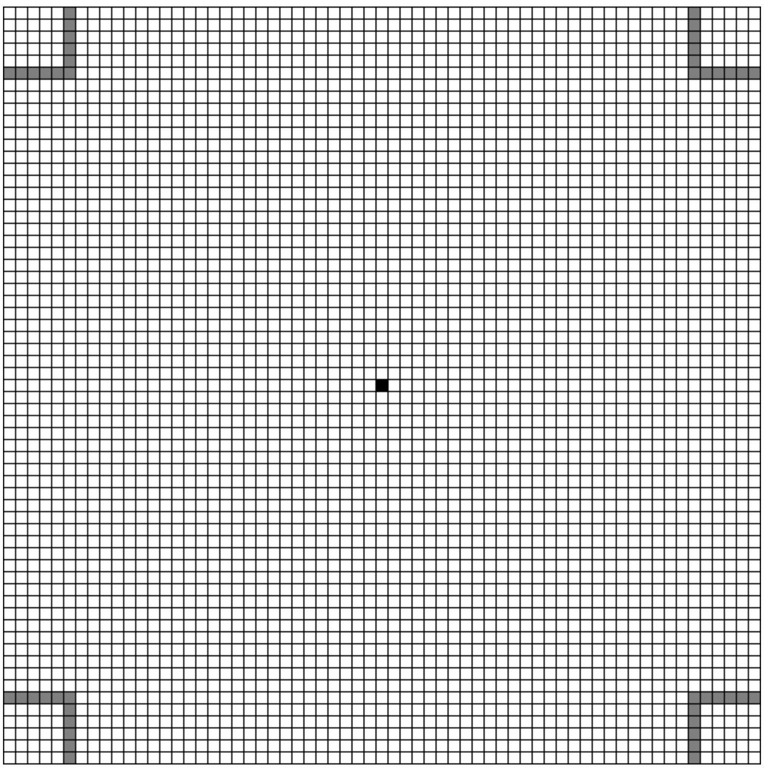
Zagadnieniem, które chcę dziś naświetlić i rozwinąć jest *Problem anioła* zaproponowany przez angielskiego matematyka Johna Hortona Conway'a – twórcy *Gry w życie* - w 1982 roku w książce *Winning Ways*. Zatytułowany został w niej: *the angel and the square-eater*. Conway przedstawił ten problem w taki sposób: Gra toczy się na planszy – nieskończonej szachownicy pomiędzy dwoma graczami - *aniołem* i *diabłem*. Na początku gry anioł znajduje się na środku planszy. Posiada on ustaloną przed rozpoczęciem gry moc K. Oznacza to, że w każdej turze anioł może przesunąć się o co najwyżej K ruchów króla szachowego. Diabeł natomiast w każdej turze blokuje dowolne pole. Od tego momentu staje się ono polem *zablokowanym* i już nigdy nie będzie mógł zakończyć na nim swojej tury, może jednak nad nim przelatywać w trakcie wykonywania ruchu. Diabeł wygrywa jeżeli uda mu się doprowadzić do sytuacji, kiedy anioł nie będzie mógł już wykonać żadnego ruchu. Anioł odnosi zwycięstwo jeśli może wykonywać ruchy w nieskończoność.

Już w 1982 roku pojawił się dowód, że jeśli anioł ma moc $K = 1$ to diabeł ma strategię wygrywającą. Jeszcze tego samego roku Conway udowodnił też, że jeśli anioł nigdy nie zmniejsza swojej współrzędnej y to również diabeł ma strategię wygrywającą. Dowód kolejnych faktów zajął trochę więcej czasu. Dopiero w 1996 roku Conway pokazał, że jeśli anioł zawsze zwiększa swoją odległość od środka planszy to również wygrywa diabeł. W roku 2006 Peter Winkler w swojej książce *Mathematical Puzzles* opisał ponownie ten problem, co pomogło w spopularyzowaniu, go i jeszcze tego samego roku pojawiły się cztery niezależne od siebie dowody związane z tym problemem. Péter Gács pokazał, że dla odpowiednio dużego K strategię wygrywającą ma anioł. Brian Bowditch opublikował dowód mówiący, że już dla $K = 4$ anioł może wygrać każdą partię. Natomiast Oddvar Kloster i András Máthé przedstawili swoje dowody, że nawet $K = 2$ daje aniołowi strategię wygrywającą. Problem został przeniesiony również na trzy wymiary, gdzie także udało się udowodnić parę ciekawych faktów, jak ten, że anioł o mocy $K \geq 13$ ma strategię wygrywającą.

Problem wydał mi się niezwykle ciekawy. Zwłaszcza zaskakujące wydało się to, że już moc $K = 2$ wystarcza, ale strategia jest nieoczywista i nie zawsze polega na uciekaniu w kierunku najmniej zablokowanego obszaru. Kiedy okazało się, że większość zaproponowanych wariantów i strategii jest już rozważona pojawiła się nowa myśl. Co jeśli moc K będzie oznaczać, że anioł może wykonać nie K ruchów króla szachowego, ale jakiejś innej figury, np. konia lub wieży? Większość figur okazała się mało fascynująca za wyjątkiem jednej. Niemniej postaram się wspomnieć o wszystkich tych przypadkach i zaprezentować to, co udało mi się zauważyć oraz przedstawić moje przewidywania w tym względzie. Innym ciekawym zagadnieniem jest: co jeśli moc K oznacza, że anioł musi wykonać dokładnie K ruchów króla szachowego (lub innych figur szachowych), zamiast co najwyżej K ruchów. W swojej pracy chcę zaprezentować niektóre z dowodów różnych faktów związanych z *problemem anioła* w moim opracowaniu oraz przedstawić własne rozważania o wariacjach na temat tej gry.

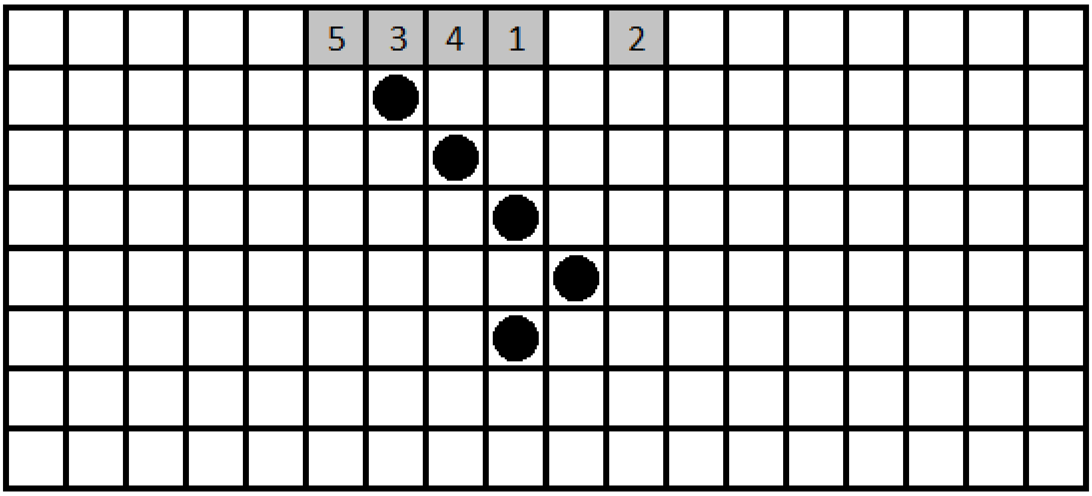
2 Kiedy anioł jest królem, czyli K=*1*

Jest to bardzo specyficzny przypadek. Dlaczego? Dlatego, że ze względu na krótki dystans jaki może pokonywać anioł w jednym ruchu jest pozbawiony swojego gigantycznego atutu, który posiada przy większych wartościach K, mianowicie możliwości przeskakiwania nad zablokowanymi polami, stąd będzie wynikać łatwość dowodu. Przeformułujmy trochę warunek wygranej diabła - niech diabeł wygrywa wtedy, gdy uda mu się zamknąć anioła w pewnym fragmencie planszy, którego anioł, niezależnie od swoich ruchów, nie będzie mógł już nigdy opuścić. Pokażemy, że diabeł może zamknąć anioła w odpowiednio dużym kwadracie. Załóżmy, że diabeł obrał już sobie obszar poza który nie będzie chciał wypuścić. Najłatwiej uciec z tego obszaru będzie aniołowi przez jego narożniki. Zatem od zabezpieczenia się na wypadek takiej próby musi zacząć diabeł. Co więc robi? Blokuje narożniki. Ale jak dużo pól musi zablokować? Pokażemy zaraz, że za każdym razem kiedy anioł będzie się zbliżał do któregoś z brzegów tego obszaru w którym diabeł chce utrzymać anioła przez cały czas trwania gry diabeł będzie musiał reagować już wtedy, gdy anioł będzie w odległości 6 ruchów od brzegu obszaru. Zatem musi zablokować w każdym rogu kwadrat o wymiarach $6x6$, a ponieważ anioł nie może przeskakiwać nad pojedynczym murkiem, wystarczy zablokować tylko dwa boki takiego kwadratu, czyli po 11 pól w każdym z kwadratów. Zajmie mu to $4 \cdot 11 = 44$ ruchów, a nie chcemy, żeby anioł mógł próbować uciec zanim diabeł się przygotuje. Dotarcie do któregokolwiek brzegu musi więc zająć aniołowi co najmniej $44 + 6 = 50$. Nie wiemy w którą stronę poleci anioł, więc musimy wziąć taki zapas we wszystkie cztery strony, co daje nam obszar o wymiarach co najmniej $101x101$ (trzeba doliczyć pole na którym stoi anioł).



Pola, które musi zablokować diabeł zaznaczone są na szaro, zaś środek planszy, czyli miejsce gdzie na początku stoi anioł na czarno.
Rysunek poglądowy. Proporcje niezachowane celowo.

Skoro diabeł zabezpieczył już rogi to teraz przedstawimy algorytm postępowania, kiedy anioł znajduje się w niebezpiecznej odległości od brzegu naszego kwadratu. Kiedy anioł znajdzie się w odległości nie większej niż 6 od krawędzi obszaru diabeł zaczyna blokować, co drugie pole przy krawędzi, zaczynając od tych które są aktualnie najbliżej anioła (w przypadku remisu może wybrać dowolne spośród tych pól). Kiedy anioł zbliży się do brzegu na odległość nie większą niż 3 ruchy diabeł musi zacząć blokować dziury między zablokowanymi już polami, podobnie jak w poprzedniej fazie, zaczynając od najbliższych aktualnemu położeniu anioła.

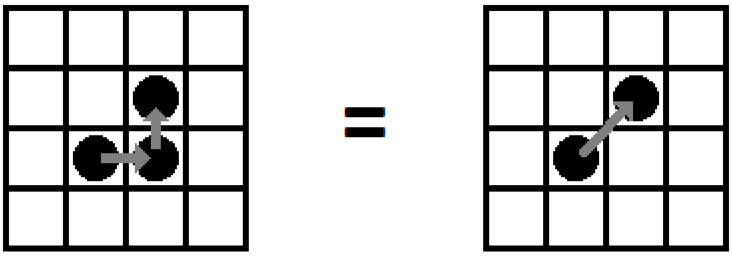


Przykład odparcia ataku na krawędź.
Liczby oznaczają kolejność z jaką diabeł blokował pola.

To uniemożliwi aniołowi wydostanie się w tym miejscu, którego jest najbliżej, a ponieważ anioł porusza się w tym wypadku tak szybko jak diabeł blokuje pola, więc z racji tego, że narożniki są zablokowane nigdy nie uda mu się opuścić tego kwadratu, w związku z czym diabeł może konsekwentnie blokowac kolejne pola doprowadzając do swojej wygranej.

3 Anioł rośnie w siłę, ale spryt ten sam, czyli o strategiach, które nie gwarantują wygranej aniołowi o mocy $K = 2$ i większych.

Pokazaliśmy już, że anioł który ma moc $K = 1$ nie może wygrać z optymalnie grającym diabłem. Co zatem się stanie, gdy zwiększymy jego moc? Bardzo szybko okaże się, że odpowiednio sprytny anioł jest w stanie wygrać. Co więcej już moc $K = 2$ pozwala mu wygrać. Oczywiście oznacza to, że w podstawowej wersji gry każdy anioł o mocy $K \geq 2$ ma strategię wygrywającą, gdyż nie musi użyć pełnej swej mocy - wystarczy zastosować strategię dla $K = 2$. Jak jednak wspomniałem już we wstępie: zastanawiał mnie również wariant tej gry, gdy anioł musi wykonać dokładnie K ruchów króla szachowego. Okazuje się, że odpowiedź jest taka sama. Dlaczego? Otóż możemy zawsze wykonać taką sekwencję ruchów, która zaczyna się i kończy na tych polach, które byłyby polem startowym i końcowym dla anioła o $K = 2$ w danej turze. Jeśli nasze K jest parzyste to wystarczy ruszyć się tak jak przewiduje to strategia dla $K = 2$, a następnie ruszać się na dowolne sąsiednie pole i wracać, jeśli natomiast K jest nieparzyste i większe od 1 to pierwszy ruch rozbijamy na dwa, to znaczy wykonujemy dwa ruchy, które mógłby zastąpić jeden, a potem wykonujemy drugi ruch przewidziany w strategii dla $K = 2$ - w ten sposób wykonaliśmy 3 ruchy, więc musimy wykonać jeszcze parzystą ilość ruchów, więc powtarzamy trik z ruchem na sąsiednie pole i powrotem.



Widać zatem, że każdą moc anioła da się wykorzystać tak, by efekt końcowy tury był taki sam jak dla dowolnego mniejszego K. Łatwo też zauważyć, że nawet gdybyśmy dodali warunek, że w ciągu trwania tury nie możemy przelecieć dwa razy nad tym samym polem to nie jest trudne skonstruowanie ścieżki o żądanej długości K tak, aby zaczynała się w miejscu gdzie stoi anioł, a kończyła w dowolnym polu oddalonym od niego nie więcej niż K. Tak więc warunek, że anioł musi wykonać dokładnie K ruchów króla szachowego możemy bez straty ogólności pominąć.

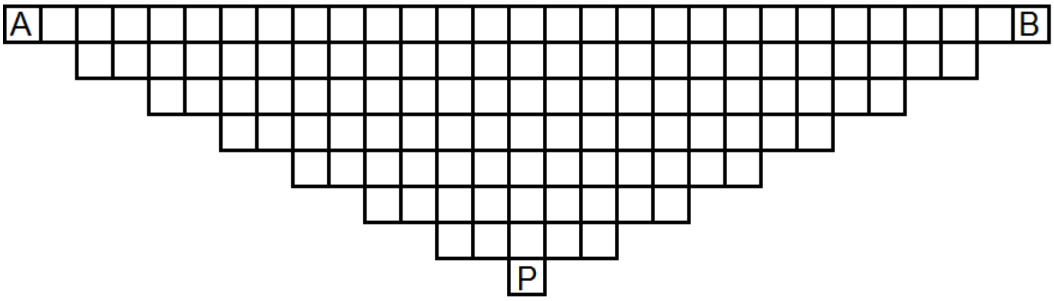
Skupmy się zatem na strategii wygrywającej anioła. Oto kilka pomysłów strategii, które mają szansę powodzenia:

3.1 Na łeb, na szyję... Czyli głupi anioł.

Pomysłem na strategię, który nasuwa się jako pierwszy to uciekanie jak najdalej. Pomyślał o tym sam Conway, ale jeszcze tego samego roku w którym zaproponował problem udowodnił, że strategia ta jest nieskuteczna. Pokażmy zatem jak diabeł może powstrzymać tak grającego anioła.

Mianem *głupiego anioła* (*ang. fool angel*) będziemy określać takiego anioła, który obiera dodatkowe założenie, że w każdym ruchu będzie zwiększał swoją współrzędną y.

Zauważmy, że głupi anioł ogranicza swoje ruchy. Jeśli w pewnym momencie gry znajduje na jakiejś pozycji P, to zakres pól, na których będzie mógł się w przyszłości znaleźć jest ograniczony przez dwie półproste zaczynające się w P i nachylone pod kątem $+-\frac{1}{K}$. Diabeł może więc próbować powstrzymać głupiego anioła szykując dla niego pułapkę w pewnej odpowiednio dużej odległości S nad aktualną pozycją anioła. Nazwijmy pole znajdujące się w odległości S ruchów króla szachowego od P i o najmniejszej współrzędnej x A, a pole znajdujące się w odległości S ruchów króla szachowego od P i o największej współrzędnej x B. Zauważmy, że odcinek $|AB| = 2 \cdot K \cdot S + 1$ i każde pole na nim jest osiągalne dla anioła w dokładnie takiej samej liczbie ruchów.



Od czego diabeł zacznie tworzenie pułapki? Diabeł będzie chciał zablokować co n-te pole na odcinku AB, tak by ukończyć blokowanie zanim anioł będzie w połowie drogi do pułapki. Wykonanie tej trasy zajmie aniołowi conajmniej $\frac{S}{2K}$ ruchów, a diabeł musi zablokować $\frac{2SK+1}{n}$ pól co zajmie mu tyle samo ruchów stąd:

$$\frac{2SK+1}{n} \leq \frac{S}{2K},$$

co daje nam:

$$n \geq 4K^2 + 1$$

Po wykonaniu tej trasy anioł znajdzie się w pewnym punkcie Q, a zakres jego ruchów zostanie znów ograniczony przez nowe półproste, co więcej teraz jedynie połowa odcinka AB będzie w przyszłości możliwa do osiągnięcia przez anioła. Nowe punkty skrajne, do których może dotrzeć anioł na odcinku AB nazwijmy C i D. Teraz diabeł będzie chciał zablokować co n-te wolne pole na odcinku CD. Jeżeli wartość n zostanie dobrana tak jak poprzednio to zanim anioł wykona połowę drogi do odcinka CD dwa z każdych kolejnych n pól będą zablokowane. Łatwo więc zauważyć, że po wykonaniu n takich faz wszystkie pola na odcinku $|AB|$, które będą jeszcze osiągalne przez anioła będą już zablokowane. Diabłowi udało się utworzyć o szerokości 1, ale przecież anioł może mieć większą moc. To nie szkodzi, łatwo bowiem zauważyć, że możemy tę strategię przeskalować na większą moc. Zamiast odcinka, diabeł chce więc zablokować teraz prostokąt o wymiarach $KxAB$. W tym celu zamiast blokować co n-te pole będzie blokował pionowe paski od długości K, w odległe od siebie o n. Widać, że jednocześnie droga anioła musi wydłużyć się K-krotnie. więc dostajemy, że:

$$K \cdot n \geq 4K^3 + K.$$

Zatem jeśli dobierzemy:

$$S = K \cdot 2^{4K^3+K},$$

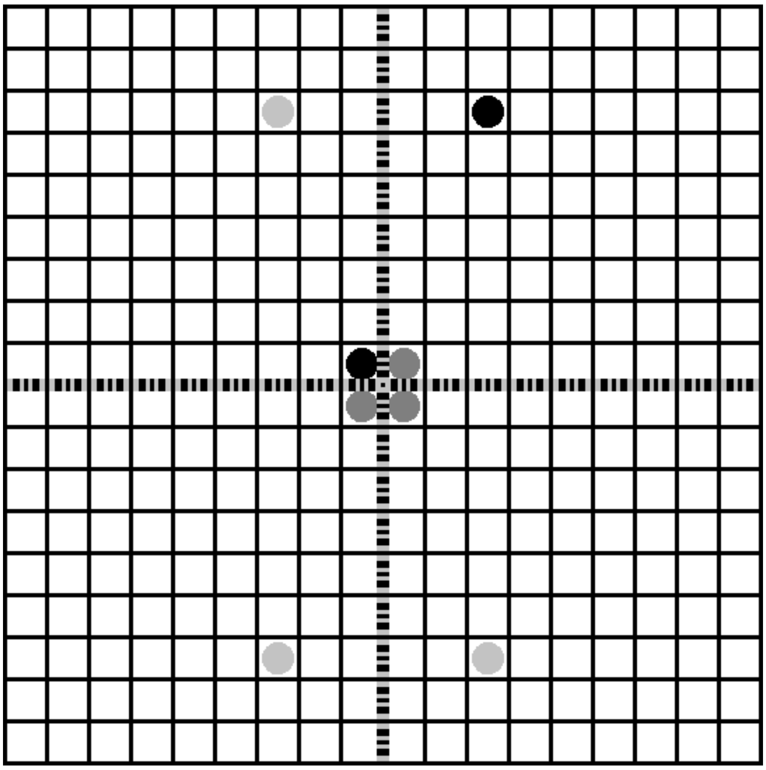
to zanim anioł dotrze do przgotowywanej przez diabła blokady będzie ona ukończona, co oznacza, że strategia głupiego anioła jest nieskuteczna.

3.2 Skok w bok, czyli trochę bystrzejszy głupi anioł.

Szukając kolejnych sensownych strategii anioła rozważmy następującą: anioł nigdy nie zmniejsza swojej współrzędnej y. Oznacza to tyle, że anioł nie koniecznie musi iść do przodu - może uciekać również w bok. Okazuje się, że i ta strategia nie gwarantuje zwycięstwa. Diabeł będzie teraz w parzystych ruchach starał się udaremnić ucieczkę anioła w poziomie, a w nieparzystych będzie budował swoją pułapkę taką jak w przypadku zwykłego głupiego anioła, tyle, że o większej mocy. Wiemy zatem jak diabeł radzi sobie z ucieczką na północ w nieparzystych ruchach, a jak radzi sobie z ucieczką w poziomie w parzystych? Będzie on blokował długie na K pól odcinki po lewej i prawej stronie anioła w odległości $4K^2$ ruchów od jego pozycji początkowej. W co drugim ruchu parzystym będzie blokował pole po lewej stronie anioła i w co drugim parzystym będzie blokował pole po prawej stronie anioła. Stąd co 4 ruchy będzie blokował pole z tej samej strony. W tym czasie anioł może pokonać maksymalnie $4K$ pól w jedną stronę, a ukończenie jednej pułapki zajmie K ruchów diabła, stąd odległość $4K^2$. Zatem zanim anioł dotrze do pułapki budowanej przez diabła będzie ona ukończona, zatem w końcu będzie zmuszony do ruchu na północ, a tam diabeł zaczyna budowę pułapek od początku. Pozostaje tylko pytanie: Jak dużą moc anioła powinien przyjąć diabeł chcąc unieszkodliwić jego ucieczkę na północ? Z racji tego, że anioł niekoniecznie musi w każdym ruchu zwiększać współrzędną y, ale w poziomie może się przemieścić o maksymalnie $4K^2$ ruchów diabeł musi traktować go jako anioła o mocy $4K^2 + K$, co nie zmienia faktu, że jego strategia nadal powstrzyma tak grającego anioła. Pokazaliśmy więc, że ta strategia anioła również zawodzi. Warto wspomnieć, że nawet jeśli anioł byłby jeszcze bystrzejszy i zostawiał sobie zawsze możliwość ucieczki na południe o skończoną ilość ruchów j to diabeł również może go powstrzymać - wystarczy zamienić pasy o długości K uniemożliwiające aniołowi ucieczkę w poziomie na prostokąty o wymiarach Kxj. Widać, że ta strategia zadziała analogicznie.

3.3 Byle dalej, czyli uciekający anioł.

Skoro ucieczka na północ zawiodła to kolejną strategią, która wydaje się być oczywistą szansą jest postanowenie, że anioł będzie stale się oddalał od środka planszy. Takiego anioła nazwiemy *uciekającym aniołem*. Niestety i ta strategia zawodzi. Pokażemy jak diabeł może poradzić sobie z uciekającym aniołem. Podzielmy naszą planszę na cztery ćwiartki tak, aby proste które ją dzielą przecinały się pod kątem prostym i zawierały po jednej krawędzi pola na którym stoi anioł. Następnie stwórzmy klony naszego anioła, które będą odbiciami względem prostych i względem ich przecięcia. Tak więc z jednego anioła zrobiliśmy cztery. Symetrie te będą zachowane przez cały czas trwania gry, a ewentualne przejścia aniołów do sąsiednich ćwiartek możemy potraktować jak ruch tego samego anioła, który nigdy nie opuszcza swojej ćwiartki. Diabeł podzieli swoje ruchy na cztery rodzaje za każdym razem starając się unieszkodliwić innego anioła. Będzie zatem blokował pola w każdej ze ćwiartek co cztery ruchy. W każdej z ćwiartek anioł tam się znajdujący zachowuje się podobnie jak głupi anioł, co umożliwia diabłowi zastosowanie z grubsza tej samej strategii, co przy głupim aniele (mimo drobnych różnic, jak na przykład: inne ułożenie pól) o mocy cztery razy większej niż K. Tak więc kolejny raz anioł został unieszkodliwiony. Podobnie stanie się z aniołem, który założy, że nigdy nie zmniejszy odległości od środka, czy, że zmniejszy ją maksymalnie o jakąś ustaloną wartość - wystarczy zastosować kombinację strategii dla uciekającego anioła i bystrzejszych głupich aniołów.

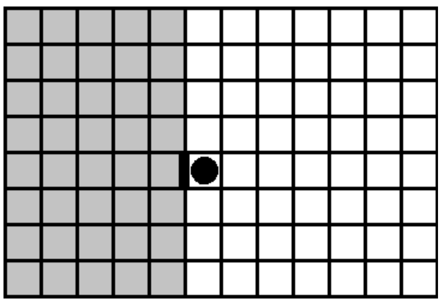


4 Trzy gramy subtelności, czyli strategia wygrywająca dla anioła o $K = 2$.

Okazuje się, że strategia wygrywająca dla anioła o mocy $K \geq 2$ jest nieco bardziej subtelna niż próba ucieczki w sposób określony jednym prostym założeniem. Postaram się ją przedstawić w oparciu o pracę Oddvara Klostera. András Máthé przedstawił dowód, który w prosty sposób pokazuje dlaczego anioł o odpowiednio dużej mocy K wygrywa, ale pokazanie faktu, że odpowiednio dużym K jest już $K = 2$, nie jest proste, dlatego zdecydowałem się na opracowanie dowodu Klostera.

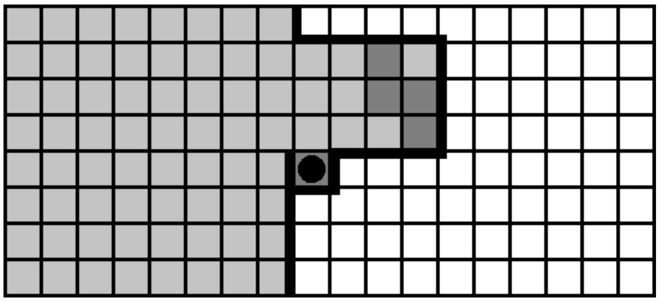
4.1 Którędy droga? Czyli podwaliny pod budowę strategii ucieczki przed diabłem.

Anioł postanawia w swojej strategii, że cześć pól to *pola zakazane*. Nigdy, w ciagu całej gry, nie będzie chciał wylądować na takim polu. Na początku gry polami zakazanymi jest połowa planszy. Przez cały czas anioł będzie chciał znajdować się na polu sąsiadującym z polem zakazanym. Wobec tego przynajmniej jedna krawędź pola na którym stoi anioł jest częścią obwodu zakazanego obszaru. Nazwijmy obwód zakazanego obszaru *ścieżką*, a ten fragment ścieżki, który jest krawędzią pola na którym stoi anioł nazwijmy *aktualnym fragmentem*. W każdym ruchu anioł będzie przesuwał aktualny fragment o dwie jednostki wzdłuż ścieżki tak by po wylądowaniu obok niego znajdował się on nadal po jego lewej stronie, a następnie wykonuje ruch, tak by znaleźć się obok nowego aktualnego fragmentu.



4.2 Pora na zmiany, czyli o modyfikacjach łamanej brzegowej.

Przed każdym ruchem anioł będzie dodawał do zbioru pól zakazanych jak największą ilość nowych pól, co będzie skutkowało również zmianą ścieżki. Jednak zawsze będzie chciał pozostać wierny kilku zasadom: - Zakazany obszar musi pozostać spójny. - Ścieżka znajdująca się za aniołem, aż do aktualnego fragmentu włącznie pozostaje niezmieniona. - Długość ścieżki wzrośnie nie więcej niż 2 jednostki na każde pole zablokowane przez diabła, które zostało dołączone do zbioru pól zakazanych w tej turze. W niektórych przypadkach (zwłaszcza, kiedy diabeł zablokuje pole na którym stoi anioł) kształt ścieżki może ulec degeneracji (patrz rysunek).



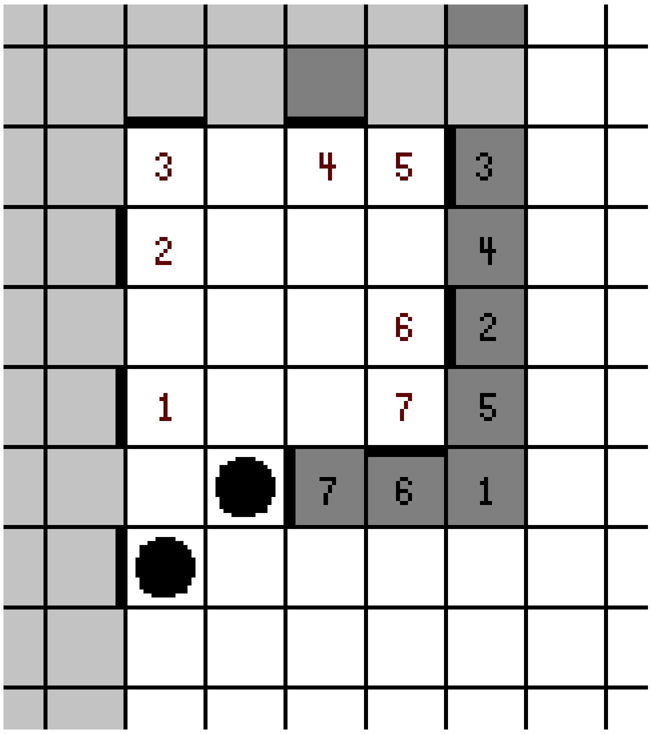
4.3 A ja Ci nie wierzę, czyli czemu to działa?

Aby udowodnić, że przedstawiona strategia działa musimy odowodnić, że anioł nigdy nie wyląduje na polu zablokowanym przez diabła. Przedstawimy tu jedynie sposób w jaki będziemy dowodzić poprawności tej strategii, gdyż jest to w dużej mierze rozważanie dużej ilości przypadków, co jest mało fascynujące i nie jest istotą tej pracy.

Po pierwsze pokażemy, że anioł nigdy nie wyląduje na zablokowanym polu, które nie jest polem zakazanym. Anioł przez cały czas porusza się wzdłuż ścieżki, czyli po polach sąsiadujących z zakazanym obszarem, a nie może istnieć zablokowane pole sąsiadujące bezpośrednio z zakazanym obszarem, które nie jest zakazane. Wcielenie takiego pola do zbioru pól zakazanych oznacza wydłużenie ścieżki o maksymalnie dwie jednostki. Zatem wszystkie warunki są spełnione, wobec czego powinno ono zostać oznaczone jako zakazane.

Pozostaje nam zatem udowodnić, że anioł nigdy nie stanie na zablokowanym polu, które jest również zakazane. W rzeczywistości anioł nie staje na zakazanych polach wcale. W celu zmuszenia anoła do zakończenia ruchu na zakazanym polu diabeł musi doprowadzić do sytuacji kiedy jakaś część ścieżki sąsiaduje z dwóch stron z polami zakazanymi (czyli jest *zdegenerowana*), a anioł znajduje się na *wyspie* utworzonej z pól które nie są zakazane otoczonych polami zakazanymi. Powstanie takiej wyspy musiałoby się odbywać przez tworzenie bariery z zablokowanych pól, która byłaby konsekwentnie budowana wokół anioła zgodnie z ruchem wskazówek zegara do momentu, aż ścieżka się zdegeneruje, a wyspa zostanie zamknięta.

Aby stworzyć taką wyspę diabeł musi zablokować pewną liczbę pól w pobliskim obszarze (ze względu na ostatni warunek jaki postawił sobie anioł). Jeśli jednak weźmiemy pod uwagę, że diabeł blokuje pola z ograniczoną prędkością to cofając się w czasie do momentu kiedy Anioł ma wejść w obszar, z którego diabeł chce zrobić wyspę okaże się, że już wtedy było zablokowanych tak dużo pól, że potencjalna wyspa powinna zostać uznana za obszar zakazany, a anioł zamiast wpaść w pułapkę zgodnie ze swą strategią powinien ją obejść dookoła.



4.4 Biali nie umieją skakać, czyli co jeśli anioł nie może przeskakiwać nad polami?

Po analizie tego dowodu zauważyłem, że anioł wcale nie potrzebuje tej wspaniałej zdolności jaką jest przelatywanie nad zablokowanymi polami, by wygrać z diabłem. W ciągu całej gry żadne zablokowane pole nie sąsiaduje ze ścieżką anioła, co już wykazaliśmy. Gdyby takie pole istniało to oznacza, że graliśmy niezgodnie z naszą strategią. Zatem zdolność ta jest mu całkowicie zbędna, bo nigdy nie będzie musiał z niej korzystać. Tak więc w wersji, w której anioł nie potrafi latać, a jedynie przesuwa się po planszy również moc $K = 2$ wystarcza by wygrać z diabłem.

5 Anioł przestaje królować, czyli wariacje na temat gry.

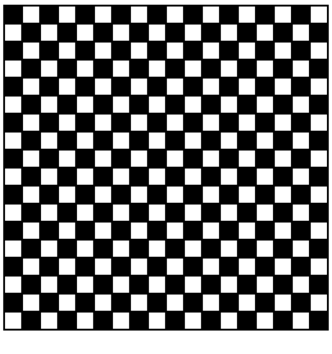
Bardzo szybko okazało się, że podstawowa wersja gry przestała mnie fascynować, dlatego zacząłem tworzyć jej własne wersje. Skupiłem się na tym, co się stanie jeśli moc K będzie oznaczać, że anioł może wykonać K ruchów na przykład wieży, zamiast króla. Pomińmy wersję kiedy anioł rusza sie jak pion, bo trywialne jest spostrzeżenie, że już po pierwszym ruchu przegrywa. Rozważmy natomiast wszystkie inne figury.

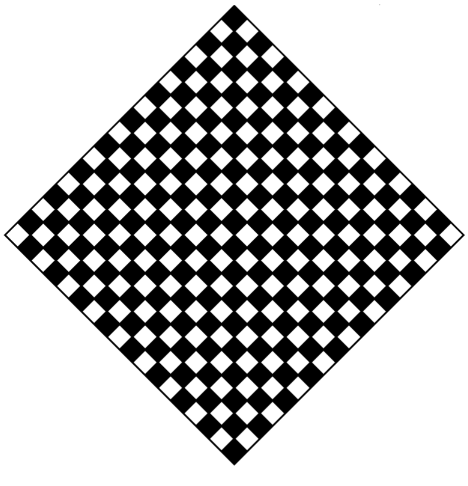
5.1 Pikuś, czyli prosta do rozstrzygnięcia interpretacja.

Niech moc K oznacza, że anioł może wykonać K ruchów wieży. W takiej interpretacji już $K = 1$ pozwala aniołowi wygrać każdą partię. Anioł będzie chciał kończyć ruch na takim polu, aby przynajmniej w dwóch kierunkach mógł przesuwać się w nieskończoność. Ponieważ jeden ruch wieży to dowolnie długi ruch w jednym z kierunków południe, północ, wschód, zachód to anioł zawsze będzie mógł przesuwać się w tym kierunku, na którym nie spotka żadnego zablokowanego pola w nieskończoność, a ponieważ liczba zablokowanych pól jest skończona to będzie mógł on skoczyć na takie pole, które będzie spełniać jego założenie. Zauważmy, też jeśli anioł zawsze będzie kończył ruch na polu, z którego mógłby uciekać w przynajmniej dwie strony w nieskończoność to diabeł w swoim ruchu może mu zablokować co najwyżej jedną z tych dróg zatem w oczywisty sposób anioł może uciekać nadal. Podobnie jest w przypadku, gdy anioł rusza się jak goniec i hetman. Od tej pory będziemy zatem inaczej interpretować moc K dla gońca, wieży i hetmana, mianowicie moc K będzie oznaczać, że anioł może przesunąć się o K pól w sposób w jaki może się poruszać odpowiednio goniec, wieża lub hetman.

5.2 To wygląda podobnie! Czyli o wieży i gońcu.

Swoje spostrzeżenia rozpocząłem od pewnej obserwacji dotyczącej wieży i gońca. Łatwo zauważyć, że to tak naprawdę ta sama gra. Wystarczy obrócić planszę o 45 stopni i teraz ruchy gońca są ruchami wieży tyle, że na planszy złożonej z połowy pól - tych po których może poruszać się goniec. Oznacza to, że zarówno dla wieży jak i dla gońca będzie działać ta sama strategia.





5.3 Wieża i goniec, czyli, co jeśli anioł jest jedną z tych figur?

Szukając odpowiedzi na pytanie: "Co się dzieje jeśli anioł, rusza się jak wieża lub goniec?" trafiłem na stronę Oddvara Klostera, który napisał, że diabeł może z powodzeniem zastosować swoją strategię przeciwko aniołowi-królowi o mocy $K = 1$ w walce z aniołem-wieżą o dowolnej mocy K jeśli dodatkowo zabronimy naszemu aniołowi przelatywać nad zablokowanymi polami. Wystarczy ją tylko odpowiednio przeskalować. A skoro tak się dzieje, to również anioł-goniec przegrywa jeśli nie może przelatywać nad polami.

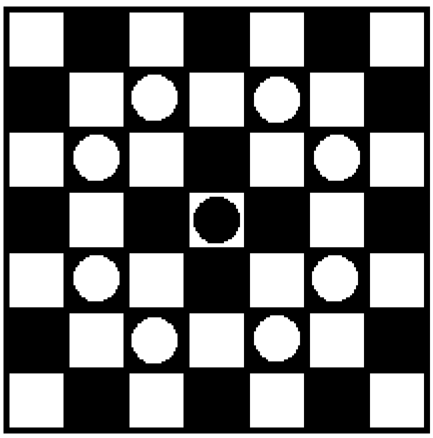
Przedstawił on również zarys dowodu oparty na pracy Briana Bowditcha, że anioł-wieża o mocy $K \geq 9$ ma strategię wygrywającą. Wspomniał też, że da się udowodnić, iż nie jest to najmniejsze wystarczające K, co można udowodnić w oparciu o pracę Andrása Máthé.

5.4 Hetman prawie jak król, czyli o strategii dla anioła-hetmana.

Nikt nie rozważył natomiast przypadku, gdy anioł rusza się jak hetman. Intuicja podpowiada, że będzie z nim tak samo jak z aniołem-królem. Wydaje się oczywistym, że powinno dać się przenieść strategię dla anioła-króla o mocy $K \geq 2$ dla anioła-hetmana o tej samej mocy. Ze względu na specyficzny kształt ścieżki anioła jeśli nie możemy wykonać ruchu przewidzianego w strategii możemy pozwolić sobie na małe odstępstwo, nie wykonując ruchu w całości, a jedynie przesuwając się o tyle, na ile pozwala nam zdolność anioła. Mimo to strategia powinna zadziałać równie dobrze, gdyż sytuacji takich będzie stosunkowo niewiele więc nie daje to dużej przewagi diabłowi. Nie potrafię jednak przeprowadzić w pełni formalnego dowodu.

5.5 Pora wyjść ze stajni, czyli anioł-koń.

Najciekawszym wariantem gry, choć też wcale nie poruszonym w literaturze, jest ten kiedy moc K oznacza, że anioł może wykonać K ruchów konia szachowego. Ruchy anioła są wtedy bardzo specyficzne, a to sprawia, że gra jest jeszcze bardziej intrygująca. Po pierwsze zauważmy, że jeśli pomalujemy planszę jak szachownicę to po parzystej liczbie ruchów konia anioł będzie stał na polu o tym samym kolorze, co pole startowe, a po nieparzystej liczbie ruchów na polu o przeciwnym kolorze, gdyż zawsze ruszamy się w kształcie litery "L", czyli albo najpierw wykonujemy ruch o jedno pole w pionie lub poziomie, zmieniając kolor, a następnie ruch po skosie, który nie zmienia koloru, albo te same ruchy w odwrotnej kolejności. Zatem każdy ruch konia szachowego kończy się na polu o innym kolorze niż pole z którego ten ruch został wykonany.



Oznacza to że, w przeciwieństwie do anioła-króla strategia wygrywająca dla gry kiedy anioł o mocy K może wykonać co najwyżej K ruchów, nie zadziała, kiedy anioł będzie musiał wykonać dokładnie K ruchów. Ponieważ drugi wariant jest bardziej skomplikowany skupimy się na pierwszym. Zatem zakładamy dalej, że anioł o mocy K może wykonać co najwyżej K ruchów. Okazuje się, że już $K = 3$ wystarczy naszemu aniołowi, aby zastosować strategię dla anioła-króla o mocy $K \geq 2$. Na rysunku przedstawiłem anioła i jego najbliższe otoczenie. Liczby na polach oznaczają, że tyle ruchów konia szachowego anioł musi wykonać, by się tam przemieścić. Dodatkowo na szaro zaznaczone zostały pola, które są nieosiągalne dla anioła-króla o mocy $K = 2$.

2	3	2	3	2	3	2
3	4	1	2	1	4	3
2	1	2	3	2	1	2
3	2	3	●	3	2	3
2	1	2	3	2	1	2
3	4	1	2	1	4	3
2	3	2	3	2	3	2

Zauważmy, że jedyne pola osiągalne dla anioła-króla o mocy $K = 2$, a nieosiągalne dla anioła-konia o $K = 3$ to te pola z cyfrą cztery w rogach białego kwadratu. Warto jednak zauważyć, że strategia wygrywająca, dla anioła-króla o $K \geq 2$ nigdy nie będzie wymagać przeskoczenia na to pole, gdyż oznaczałoby to przesunięcie odcinka aktualnego na ścieżce o conajmniej 3 jednostki, a strategia tego nie przewiduje. Zatem dowiedliśmy, że już $K = 3$ wystarcza, aby anioł-koń mógł zastosować strategię dla anioła-króla o mocy $K \geq 3$.