



Trójkąt Pascala od kuchni

*Laura Opalska
Klasa 1*

*Gimnazjum nr 1
z Oddziałami
Integracyjnymi i Sportowymi
im. Bł. Salomei w Skale*

*ul. Ks.St.Połetka 32
32-043 Skala*



Drodzy Czytelnicy!

Pomysł na napisanie tej pracy zrodził się podczas lekcji matematyki w klasie 6. Nauczycielka powiedziała nam o pojęciu silni, która była nam przydatna do rozwiązania trudniejszego zadania, którego treść brzmiała następująco:

Koleczy wybrali się do restauracji. Postanowili kupić 3 pizze, które będą zawierały różne składniki. Do wyboru były: pieczarki, szynka, ser, kurczak i cebula. Na ile różnych sposobów mogą wybrać składniki do 3 pizz, tak żeby się one nie powtarzały? Każda pizza może zawierać tylko jeden z dostępnych składników.

Silnia tak mnie zainteresowała, że z ogromnym zapalem zaczęłam przeszukiwać strony internetowe w poszukiwaniu dodatkowych informacji. Wchodząc coraz głębiej w wirtualną sieć, natknęłam się na *Symbol Newtona*, *Dwumian Newtona* no i wreszcie *Trójkąt Pascala*. Szczerze mówiąc, to właśnie ten ostatni termin skojarzył mi się z popularnym kucharzem, stąd tytuł mojej pracy.

Zgodnie z tytułem moją pracę napisałam w formie przepisu. Dla doświadczonych „kucharzy” jest on banalny, ale dla moich rówieśników staje się pięciogwiazdkowym (*****) daniem.

Laura Opalska

(*) - łatwe

(*****) - bardzo trudne



Potrzebne składniki

Silnia.....	4
Symbol Newtona.....	5
Dwumian Newtona.....	7

Przepis na Trójkąt Pascala

Twórca przepisu.....	9
Trójkąt Pascala.....	10
Co ma „piernik do wiatraka”.....	11
Przekątne w Trójkącie Pascala.....	12
Trójkąt Pascala a ciąg Fibonacciego.....	15
Kolorowanki w Trójkącie Pascala.....	16
Trochę pokombinujemy.....	21
Szczęśliwy rzut.....	22
Literatura.....	23



Zacznijmy od definicji silni. To pojęcie będzie nam potrzebne do zrozumienia kolejnych tematów tej pracy.

Silnia

Symbol: **$n!$**

Można zdefiniować pojęcie silni w następujący sposób:

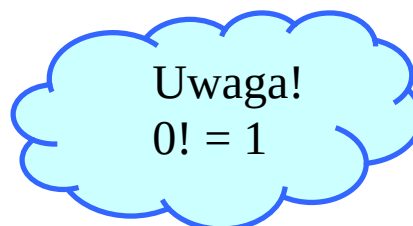
dla $n \in \mathbb{N}$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad \text{dla } n \neq 0$$

Prawdziwe są zależności:

$$n! = (n-1)! \cdot n \quad \text{dla } n > 0$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$



A oto kilka przykładów:

$$1! = 1$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Zauważyłam, że:

$$0! = 1!$$

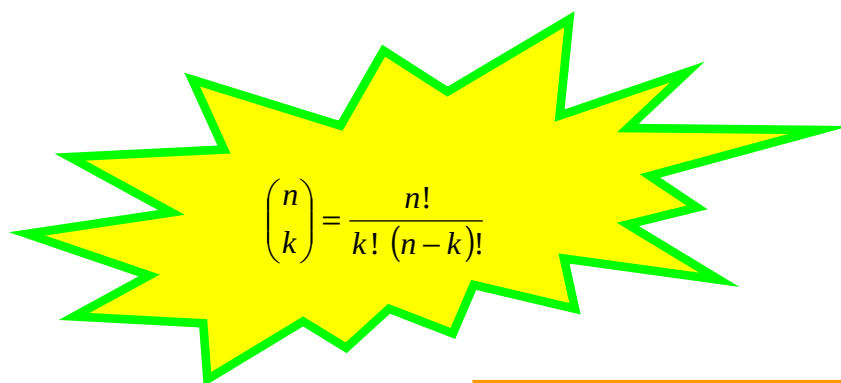


Symbol Newtona

Pierwszą rzeczą jaką chciałabym Wam przekazać o tym pojęciu jest to, do czego ma on zastosowanie. Głównie są to dwie rzeczy:

- pomoże nam przy potęgowaniu dwumianów,
- do obliczeń kombinatorycznych - np. umożliwi on wyznaczenie liczby kombinacji - czyli liczbę sposobów na jakie daje się wybrać k elementów ze zbioru n elementów dla n i k naturalnych.

A oto **Symbol Newtona**, którego wartość obliczamy w następujący sposób:


$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

gdzie n i k należą do zbioru
liczb naturalnych
oraz $k \geq 0$ i $k \leq n$

Szczególne przypadki:

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

To była teoria, a teraz czas na praktykę.

Przykład zastosowania *SYMBOLU NEWTONA*.

Rozwiążmy następujące zadanie:

Na ile sposobów można wybrać reprezentację 5 osób z grupy 7 osobowej?

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot (7-5)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (1 \cdot 2)} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (6 \cdot 7)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (1 \cdot 2)} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

A co by było gdyby $k > n$?

Rozwiążmy takie zadanie:

Na ile sposobów można wybrać reprezentację 7 osób z grupy 5 osobowej?

Nie jest to możliwe. Przyjmijmy zatem:

$$\binom{5}{7} = 0$$

Przy rozwiązywaniu tego typu przykładów nie możemy stosować *SYMBOLU NEWTONA*, ponieważ:

$$\binom{5}{7} = \frac{5!}{7!(5-7)!} = \frac{5!}{7!(-2)!}$$

Stąd wniosek, że jeśli $k > n$, wtedy:

$$\binom{n}{k} = 0$$



DWUMIAN NEWTONA

Zacznijmy od potęgowania dwumianów. Bez problemu poradzimy sobie z kwadratem sumy i kwadratem różnicy $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, z sześcianiem też nie powinno być kłopotu. Ale jak obliczyć np. 8 potęgę sumy liczb a i b ?

W rozwiązaniu tego problemu pomocny będzie Dwumian Newtona.

Dwumian Newtona

to wzór, zgodnie z którym potęgę dwumianu można rozwinąć w sumę jednomianów(*).

Dwumianowy wzór Newtona:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
$$a \neq 0 \quad i \quad b \neq 0$$

Przykład:

$$(a + b)^8 = \binom{8}{0} a^{8-0} b^0 + \binom{8}{1} a^{8-1} b^1 + \binom{8}{2} a^{8-2} b^2 + \binom{8}{3} a^{8-3} b^3 + \binom{8}{4} a^{8-4} b^4 +$$
$$+ \binom{8}{5} a^{8-5} b^5 + \binom{8}{6} a^{8-6} b^6 + \binom{8}{7} a^{8-7} b^7 + \binom{8}{8} a^{8-8} b^8 \quad dla \ a \neq 0 \ i \ b \neq 0$$

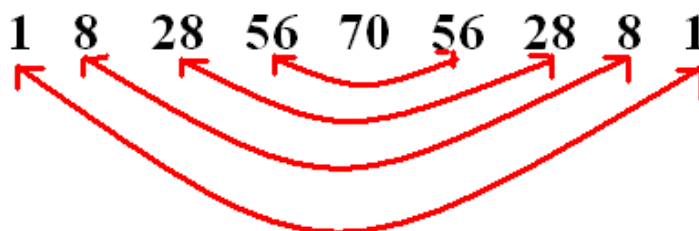
$$(a + b)^8 = \binom{8}{0} a^8 b^0 + \binom{8}{1} a^7 b^1 + \binom{8}{2} a^6 b^2 + \binom{8}{3} a^5 b^3 + \binom{8}{4} a^4 b^4 +$$
$$+ \binom{8}{5} a^3 b^5 + \binom{8}{6} a^2 b^6 + \binom{8}{7} a^1 b^7 + \binom{8}{8} a^0 b^8 \quad dla \ a \neq 0 \ i \ b \neq 0$$

$\binom{8}{0} = \frac{8!}{(8-0)! \cdot 0!} = \frac{8!}{8! \cdot 0!} = 1$	$\binom{8}{8} = \frac{8!}{(8-8)! \cdot 8!} = \frac{8!}{0! \cdot 8!} = 1$
$\binom{8}{1} = \frac{8!}{(8-1)! \cdot 1!} = \frac{8!}{7! \cdot 1!} = 8$	$\binom{8}{7} = \frac{8!}{(8-7)! \cdot 7!} = \frac{8!}{1! \cdot 7!} = 8$
$\binom{8}{2} = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$	$\binom{8}{6} = \frac{8!}{(8-6)! \cdot 6!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$
$\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$	$\binom{8}{5} = \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$
$\binom{8}{4} = \frac{8!}{(8-4)! \cdot 4!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$	

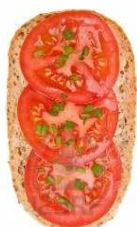
Podstawiłam do wzoru gotowe wyniki i otrzymałam:

$$(a + b)^8 = 1a^8b^0 + 8a^7b^1 + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8a^1b^7 + 1a^0b^8$$

Warto zwrócić uwagę na symetrię współczynników:



Wartości Symboli Newtona można otrzymać w prostszy sposób tworząc tabelę zwaną **Trójkątem Pascala**.



Wyjaśnienia do działu:

(*) **JEDNOMIAN** – wyrażenie algebraiczne, które jest iloczynem. Nie występuje w nim dodawanie ani odejmowanie



(**) **WIELOMIAN** – suma skończonej liczby jednomianów, bywa zwana sumą algebraiczną.

TWÓRCA PRZEPISU



"Jesteśmy czymś, lecz nie jesteśmy wszystkim."

Blaise Pascal

Blaise Pascal – francuski matematyk ur. w 1623r., zm. w 1662r. To właśnie on opracował metodę wyznaczania współczynników dwumianu dowolnego stopnia (trójkąt Pascala). Był filozofem, matematykiem, fizykiem i publicystą. W młodości ojciec zabronił Pascalowi uczyć się matematyki przed 15 rokiem życia. Wszelkie książki matematyczne zostały usunięte z domu, więc mały Pascal nie widząc innej możliwości zaczął samodzielnie odkrywać różne twierdzenia matematyczne.

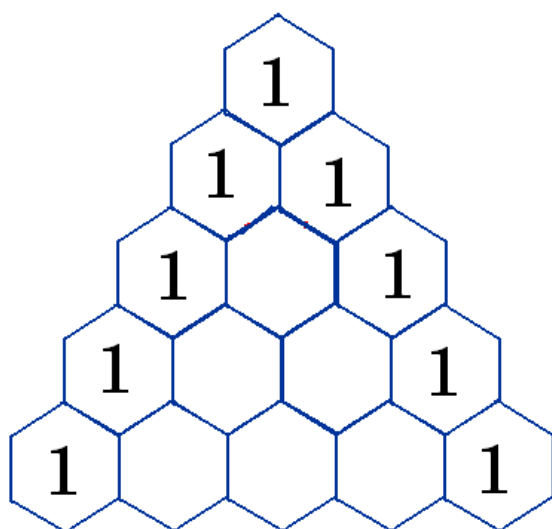
Przyjaciel Pascala bardzo lubił gry hazardowe. Zakładał się, że przy rzucie dwiema kostkami raz na 24 rzuty wypadną dwie szóstki, ale niestety niewłaściwie określił szansę wygrania (prawdopodobieństwo przy 24 rzutach wynosi 0,4914) i ciągle przegrywał. Poprosił wtedy Pascala o radę. Pascal zaczął się zastanawiać i w wyniku przemyśleń powstały załączki statystyki i rachunku prawdopodobieństwa. Okazało się, że dopiero przy 25 rzutach prawdopodobieństwo wypadnięcia dwóch szóstek jest większe od połowy (wynosi dokładnie 0,5055). Owocem zainteresowania hazardem jest więc rozwój nowych działów matematyki.

Okolo połowa studentów pierwszego roku historii na jednej z polskich wyższych uczelni na pytanie, kim był Blaise Pascal, odpowiada bez zająknięcia - informatykiem i programistą (popularny język strukturalny programowania na cześć słynnego uczonego nosi nazwę - Pascal).



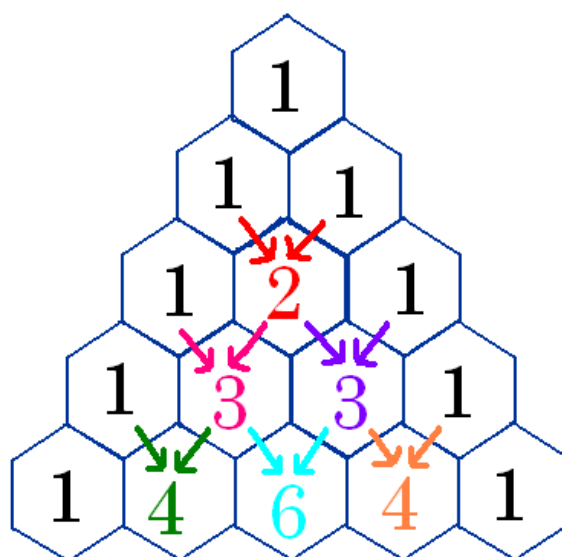
Trójkąt Pascala jest to układ liczbowy na trójkątnej tablicy.

Jak przyrządzić Trójkąt Pascala?



Zaczynamy od wierzchołka trójkąta wpisując tam jedynkę. Następnie wpisujemy tę samą liczbę wzdłuż ramion trójkąta.

Do kolejnych pustych pól trójkąta wpisujemy sumę dwóch liczb położonych bezpośrednio nad danym polem.



„Przekątne” w Trójkącie Pascala

Przekątną w Trójkącie Pascala będziemy określać odcinek równoległy do boku trójkąta.

Pierwsza przekątna składa się z samych jedynek. Druga przekątna to liczby naturalne. Trzecia przekątna ma w sobie magiczną właściwość, ponieważ składa się z **liczb trójkątnych**.



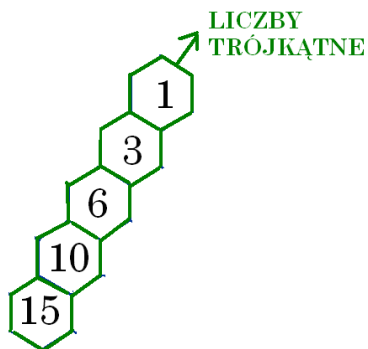
Liczby trójkątne – Są to liczby wyrażające ilość elementów (np. pieniędzy) potrzebnych do ułożenia coraz większych trójkątów równobocznych. Liczby te podlegają pewnym stałym zasadom tworzenia. Oto sposób ich obliczenia:

KROK 1: Wypiszmy w pierwszym wierszu same jedyнки, a bezpośrednio pod nim w drugim wierszu liczby naturalne dodatnie.

- w pierwszej kolumnie są same jedyнки

KROK 2: Następnie utwórzmy 3 wiersz – liczb trójkątnych - poprzez dodanie liczby stojącej bezpośrednio **nad nią** i liczby stojącej **przed nią**.

	Kolumna 1	Kolumna 2	Kolumna 3	Kolumna 4	Kolumna 5	Kolumna 6...
Wiersz 1	1	1	1	1	1	1...
Wiersz 2	1	2	3	4	5	6...
Wiersz 3 (liczby trójkątne)	1	3	6	10	15	21...

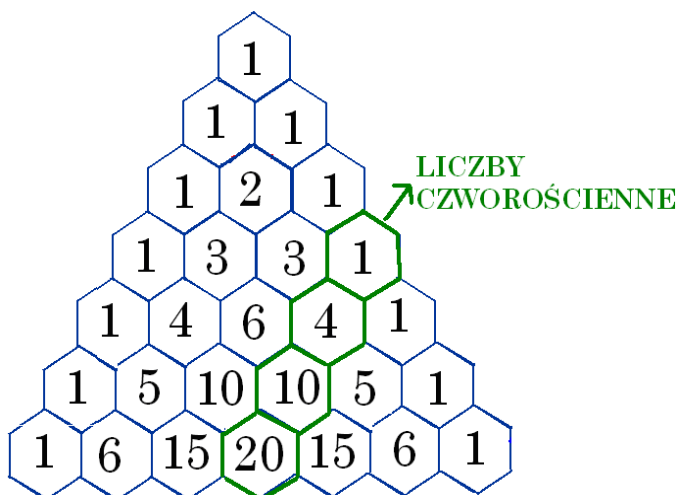


Właśnie takie liczby zawiera 3 przekątna Trójkąta Pascala.

No i rzeczywiście chyba dobrze trafiliśmy z tym składnikiem, ponieważ idealnie sprawdza się w praktyce.

Teraz przejdźmy do czwartej przekątnej, którą stanowią

liczby piramidalne, zwane liczbami czworościennymi.



Liczby piramidalne

Wyobraźmy sobie, że ze szklanych kulek lub jakichkolwiek innych elementów budujemy ostrosłup – czworościan foremny, według pewnych zasad:

KROK 1. Tworzymy z 10 kulek trójkąt równoboczny.

KROK 2. Na tych kulkach układamy kolejną warstwę w kształcie trójkąta, tym razem z 6 kulek.

KROK 3. Teraz układamy trzecią warstwę z 3 kulek.

KROK 4. Następnie układamy ostatnią, czwartą warstwę zawierającą 1 kulkę. Otrzymaliśmy bryłę – czworościan foremny podobny do piramidy.



Czwarta liczba czworościenna: „20” określa ilość wszystkich kul tworzących piramidę.

Możemy zauważyć, że każda krawędź składa się z 4 kulek.

Liczby piramidalne tworzy się bardzo podobnie jak liczby trójkątne.

Na początku wypisujemy w 1 wierszu same jedynki, w drugim liczby naturalne dodatnie. Następnie zapisujemy pod spodem trzeci wiersz składający się z liczb trójkątnych. Następnie obliczamy w 4 wierszu liczby piramidalne, które są sumą liczby znajdującej się bezpośrednio **nad nią i przed nią**.

- W kolumnie pierwszej są same jedynki.

	Kolumna	Kolumna	Kolumna	Kolumna	Kolumna
	1	2	3	4	5...
Wiersz 1	1	1	1	1	1...
Wiersz 2	1	2	3	4	5...
Wiersz 3 (liczby trójkątne)					
	1	 3	 6	 10	 15...
Wiersz 4 (liczby piramidalne)					
	1	 4	 10	 20	 35...

Nasze danie, czyli Trójkąt Pascala jest potrawą bardzo wyrafinowaną.

Im dalej sięgamy tym bardziej odkrywamy kolejne smaki.

Każdy z nich ma ogromną i różnorodną głębię.

W styczniu dostałeś parę nowo narodzonych królików. Po dwóch miesiącach para ta rodzi po raz pierwszy nową parę, a potem regularnie jedną nową parę co miesiąc. Podobnie ma się rzecz z każdą nową parą królików: po dwóch miesiącach od urodzenia rodzi ona po raz pierwszy nową parę, a potem jedną nową parę co miesiąc. Ile królików będziesz miał w grudniu?

Oto te liczby: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

A Pascal's triangle diagram with 10 rows. Red diagonal lines are drawn from the top-left to the bottom-right, separating the triangle into sections. The numbers in the top row (row 0) are highlighted in red: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. The rest of the numbers are in black.

1	1	2	3	5	8	13	21
1	1	2	3	5	8	13	
1	1	2	3	5	8		
1	2	3	4	6	10		
1	3	6	10	15	21		
1	4	10	20	35	56		
1	6	15	35	70	126		
1	7	21	56	126	252		
1	8	28	84	210	462		
1	9	36	126	378	924		

Kolorowanki w Trójkącie Pascala

A teraz dodajmy kolorów naszemu daniu.
Pokolorujmy inną barwą liczby parzyste i nieparzyste.

				1					
			1		1				
		1		2		1			
		1	3		3		1		
	1		4		6		4		1
	1	5		10		10		5	1
	1	6	15		20		15	6	1
	1	7	21	35		35	21	7	1
1	8	28	56	70	56	28	8	1	

Ta „kolorowanka” jest ładząco podobna do **TRÓJKĄTA SIERPIŃSKIEGO**. Jest to niekończący się układ trójkątów.

Jego konstrukcja jest następująca:

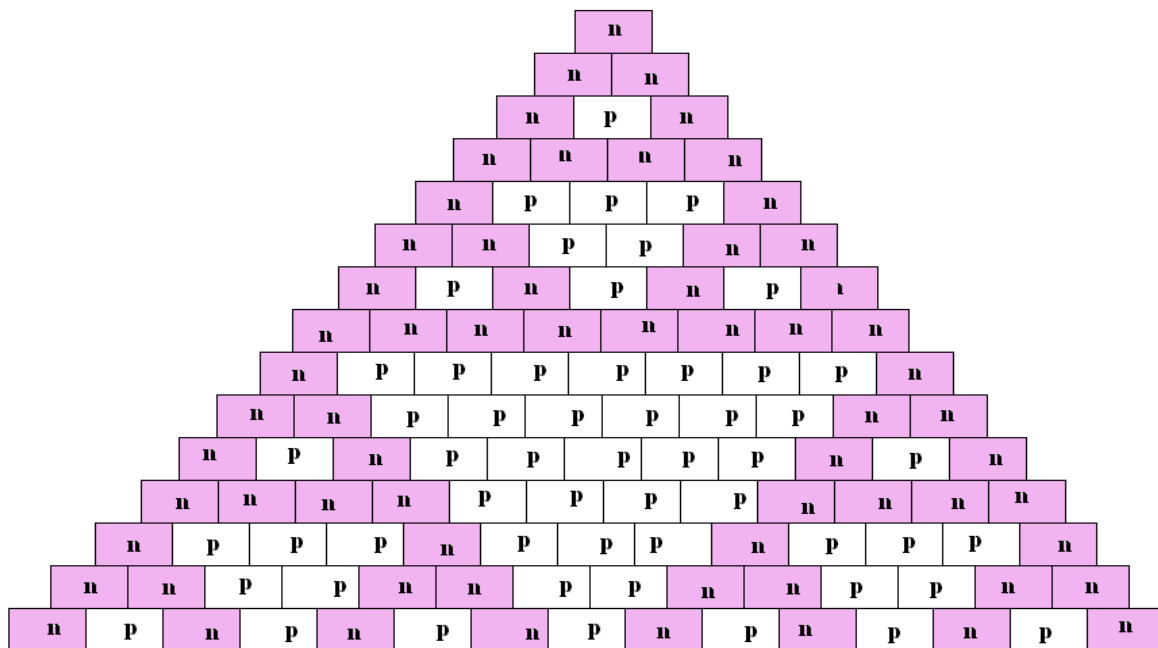
Zaczynamy od trójkąta równobocznego o boku a . Dzielimy go na 4 przystające trójkąty równoboczne o boku $\frac{1}{2}a$, a następnie środkowy trójkąt „wyrzucamy”. Każdy z trzech pozostałych trójkątów znowu dzielimy na 4 przystające trójkąty o boku $\frac{1}{4}a$, a następnie z każdego z tych 4 trójkątów „wyrzucamy” trójkąt środkowy, otrzymując w ten sposób 9 trójkątów. Postępujemy tak dalej w nieskończoność.

TRÓJKĄT SIERPIŃSKIEGO jest przykładem **fraktala**.

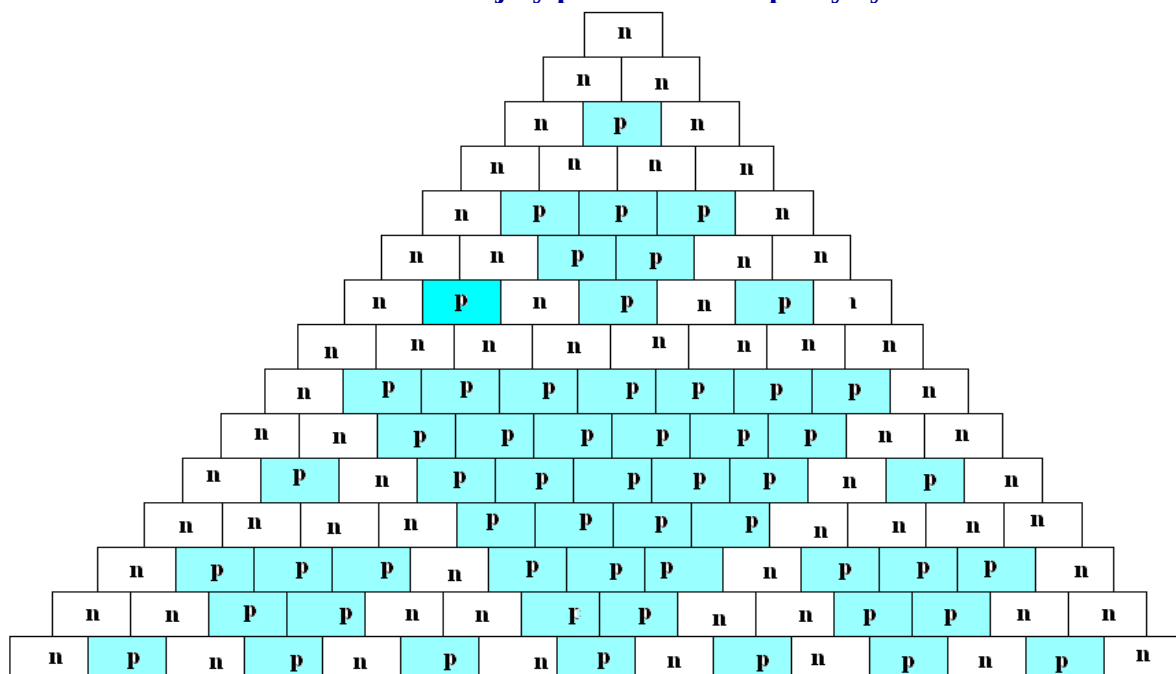


Co się stanie, jeśli zamalujemy wszystkie pola z liczbami nieparzystymi, a pozostałe (z liczbami parzystymi) zostawimy puste?

Przyjmuję: *n*- liczby nieparzyste, *p*- liczby parzyste.

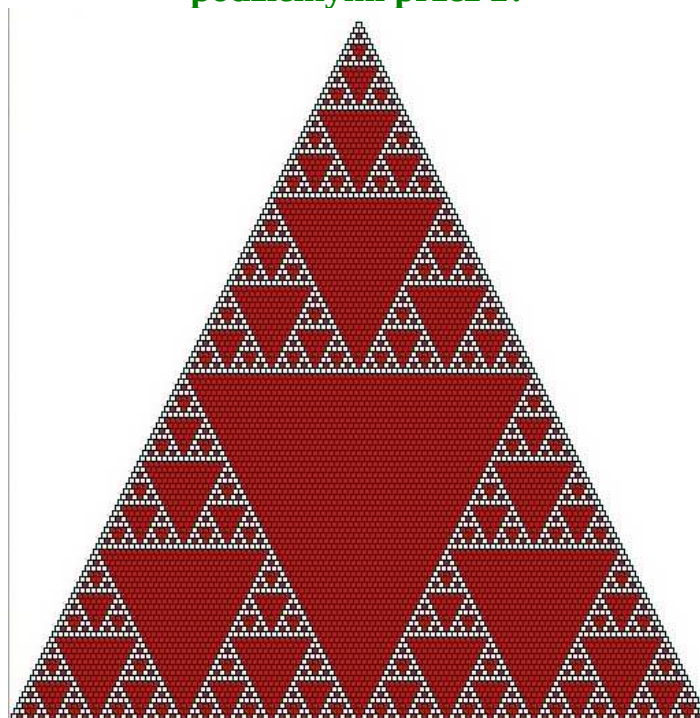


A teraz zamalujemy pola z liczbami parzystymi

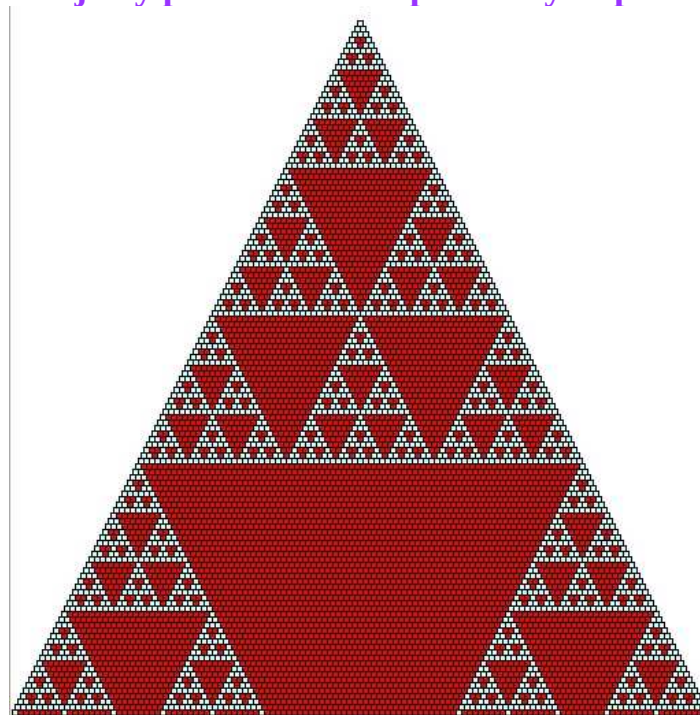


Zauważyłam, że te „kolorowanki” są również podobne do Trójkąta Sierpińskiego.

Co się stanie, gdy zamalujemy pola z liczbami podzielnymi przez 2?

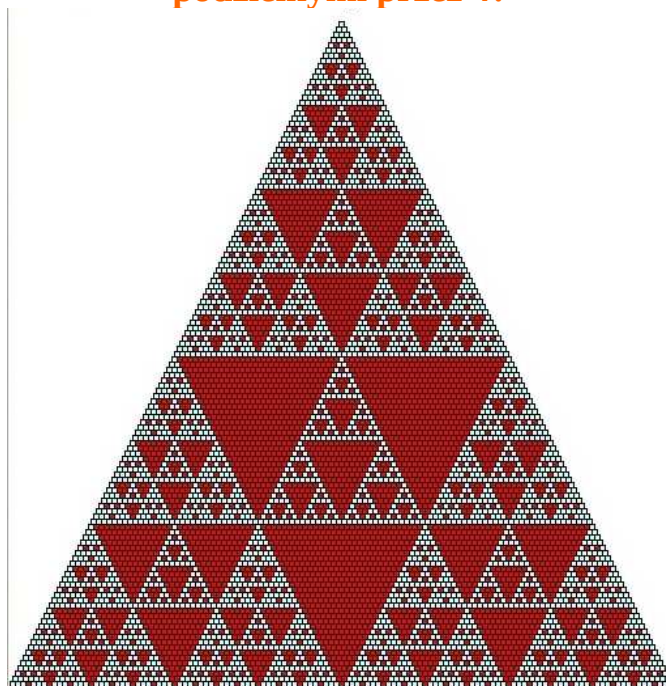


Malujemy pola z liczbami podzielnymi przez 3

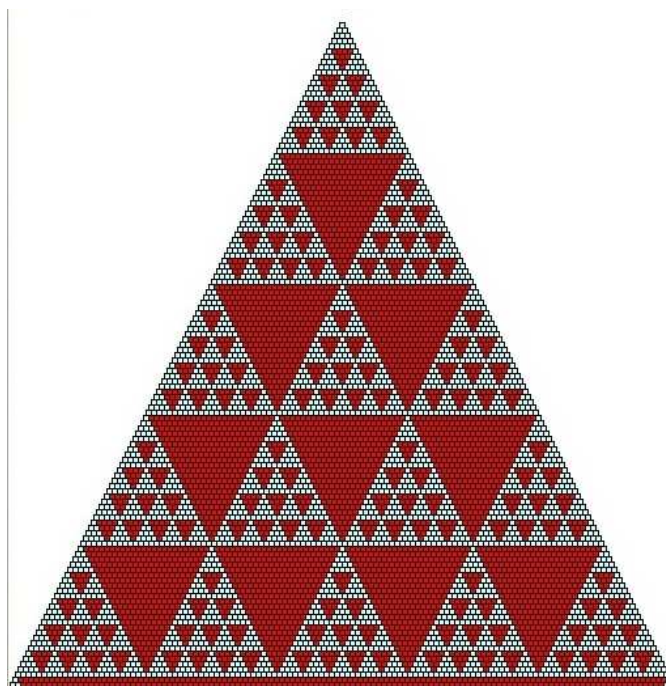


- * **Zauważyłam, że w wyniku takiego postępowania otrzymujemy figury symetryczne.**

A co otrzymamy, gdy zamalujemy pola z liczbami podzielnymi przez 4?



Zamalujmy pola z liczbami podzielnymi przez 5

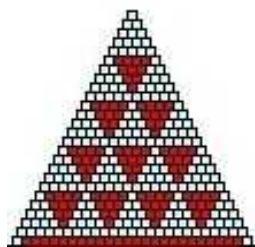


Zaobserwowałam, że gdybyśmy chcieli na części tablicy Trójkąta Pascala zamalować pola z liczbami podzielnymi przez 5 możemy postępować według następującej instrukcji:

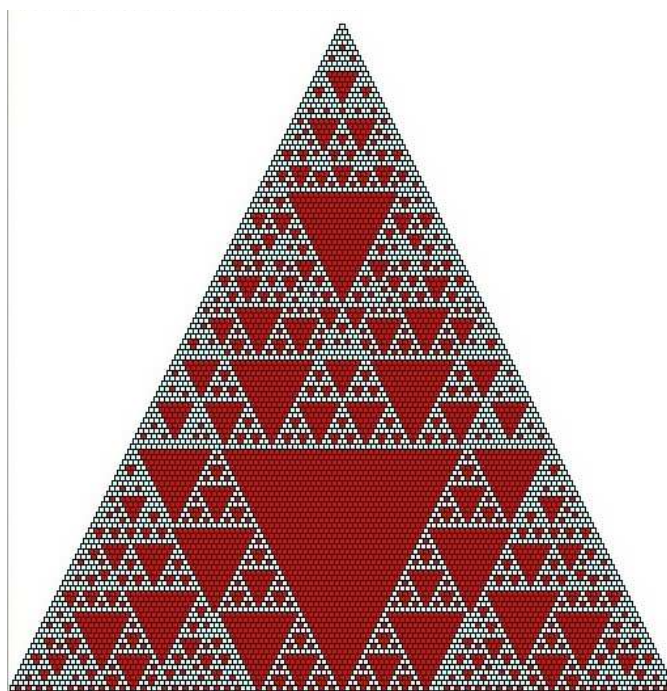
KROK 1. Zaczynając od wierzchołka dzielimy trójkąt Pascala na identyczne paski składające się z czterech wierszy, pomiędzy którymi jest odstęp 1 wiersza.

KROK 2. Każdy pasek dzielimy na przystające trójkąty. W każdym pasku ma być ich więcej o 2 niż w poprzednim.

KROK 3. Gdy już podzieliliśmy w ten sposób paski, to malujemy co 2 trójkąt. Jeżeli liczbę określającą miejsce danego trójkąta w pasie przyjmiemy jako n , to jeżeli n jest podzielne przez 2, wtedy dany trójkąt zawiera liczby podzielne przez 5.



Pomalujmy pola z liczbami podzielnymi przez 6



* I znowu otrzymaliśmy przykład symetrii osiowej.

Dalszą zabawę z kolorowanymi pozostawiam czytelnikowi.

Trochę pokombinujemy, czyli kombinacje a Trójkąt Pascala

Zacznijmy od wyjaśnienia czym są

KOMBINACJE:

Jeśli zbiór składa się z n różnych elementów, to każdy jego podzbiór k - elementowy nazywamy kombinacją.

Przykład zastosowania *TRÓJKĄTA PASCALA* w kombinacjach:

Z Trójkąta Pascala możemy bez żadnych obliczeń odczytać ile kombinacji obiektów jest możliwych. Wystarczy wybrać odpowiedni wiersz i odpowiednią w nim liczbę.

Oto zadanie:

Ania udała się do cukierni i kupiła 12 różnych ciastek. Na ile różnych sposobów może wybrać 3 z nich?

Zamiast męczyć się nad długimi obliczeniami wystarczy odnaleźć w trójkącie Pascala 12 wiersz (wierzchołek trójkąta z liczbą 1, to wiersz zerowy) i wybrać z niego liczbę na 3 miejscu (nie licząc 1). Mamy odpowiedź na nasze pytanie.

Wiersz 12 w *TRÓJKĄCIE PASCALA*:

1 12 66 **220** 495 792 924 792 495 220 66 12 1

Jeżeli nie mielibyście w pobliżu Trójkąta Pascala możecie posłużyć się *SYMBOLEM NEWTONA*.

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9!} = 220$$

Odp.: Ciastka można wybrać na 220 różnych sposobów.

Szczęśliwy rzut, czyli orły i reszki a Trójkąt Pascala

Myślę, że nie spodziewaliście się, że *TRÓJKĄT PASCALA* ma coś wspólnego z pieniędzmi.

A jednak!

Przykład zastosowania *TRÓJKĄTA PASCALA*:

Rzucamy monetą 3 razy.

Jaka jest ilość możliwych układów orłów i reszek w takim przypadku?

Spójrzmy na trzeci wiersz *TRÓJKĄTA PASCALA*
(wierzchołek trójkąta z liczbą 1, to wiersz zerowy):

1	3	3	1
----------	----------	----------	----------

Trzeci wiersz oznacza liczbę możliwych kombinacji przy trzech rzutach.

Pierwsza liczba 1 oznacza liczbę kombinacji dla orłów (OOO).

Druga liczba 3 oznacza liczbę możliwych kombinacji dla dwóch orłów i jednej reszki (ORO, OOR, ROO).

Trzecia liczba oznacza liczbę możliwych kombinacji dla dwóch reszek i jednego orła (RRO, ORR, ROR).

Czwarta liczba oznacza liczbę możliwych kombinacji dla reszek (RRR).

Myślę, że ta uczta dla umysłu była bardzo sycąca. Jeżeli ktoś jest nadal głodny, to widocznie jest łakomczuchem matematycznym. Mam nadzieję, że czytając tę pracę nie nudziliście się i dowiedzieliście się wielu ciekawych rzeczy.

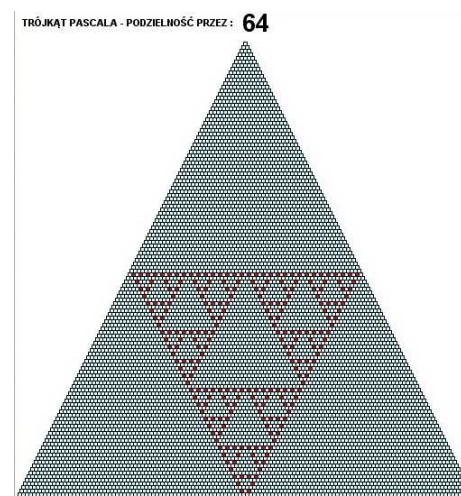
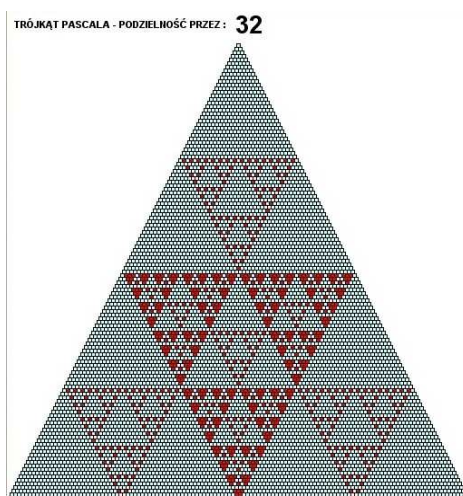
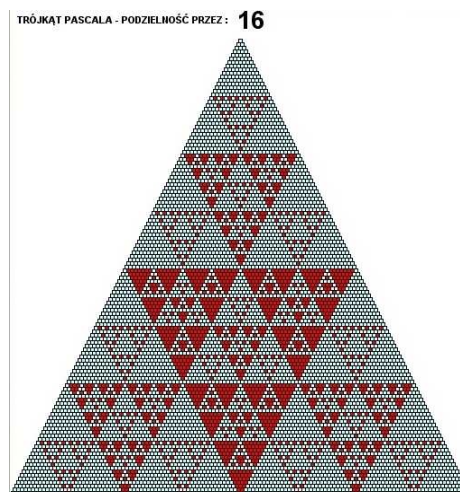
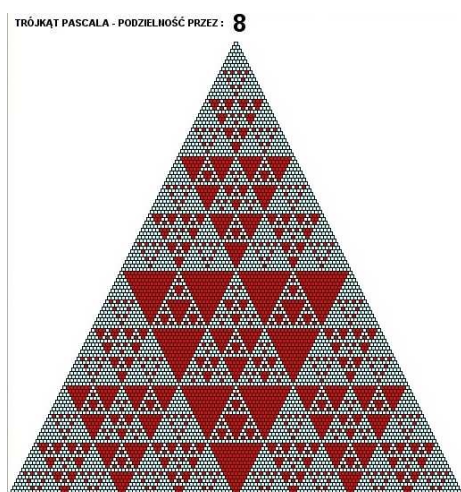
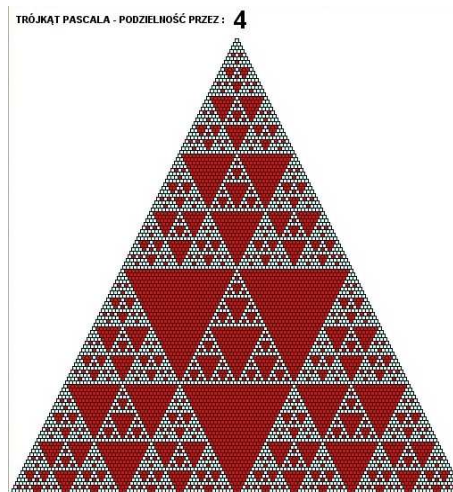
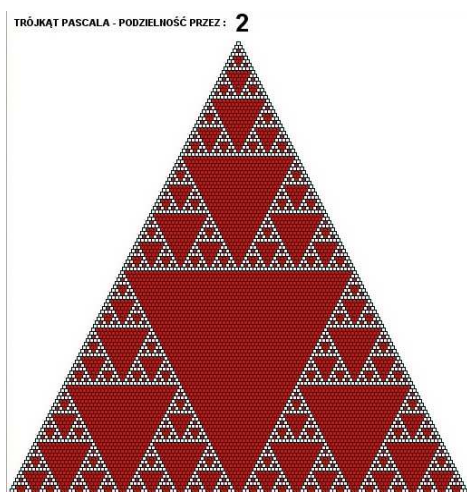
Literatura:

Bobiński Z., Kurlyandchik L., Uscki M.: *Elementarne metody w kombinatoryce*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2002

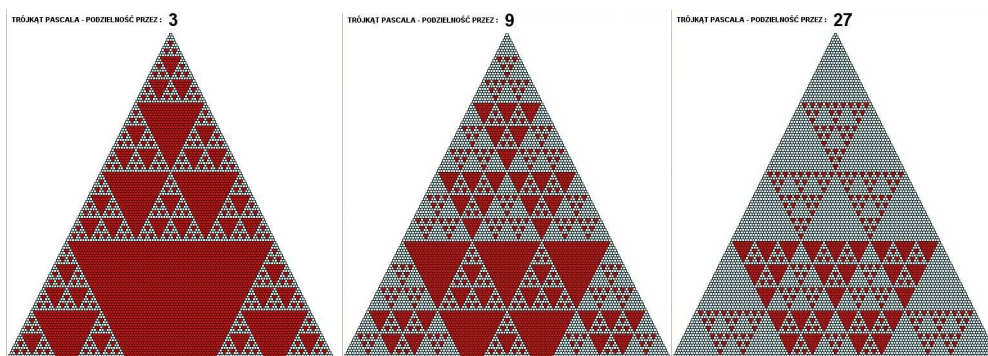
Encyklopedia. Matematyka, Wydawnictwo Greg, 2012

DODATEK DO PRACY

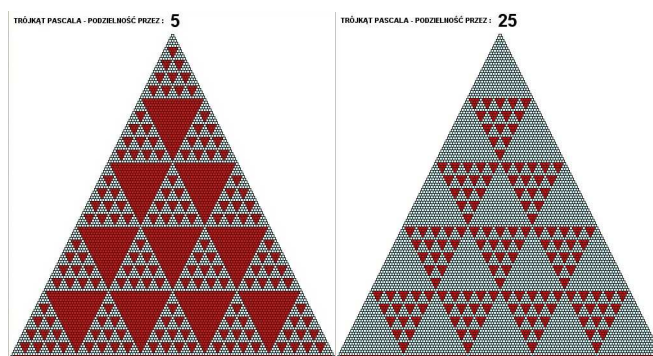
DZIELNIKI BĘDĄCE NATURALNYMI POTĘGAMI LICZBY 2



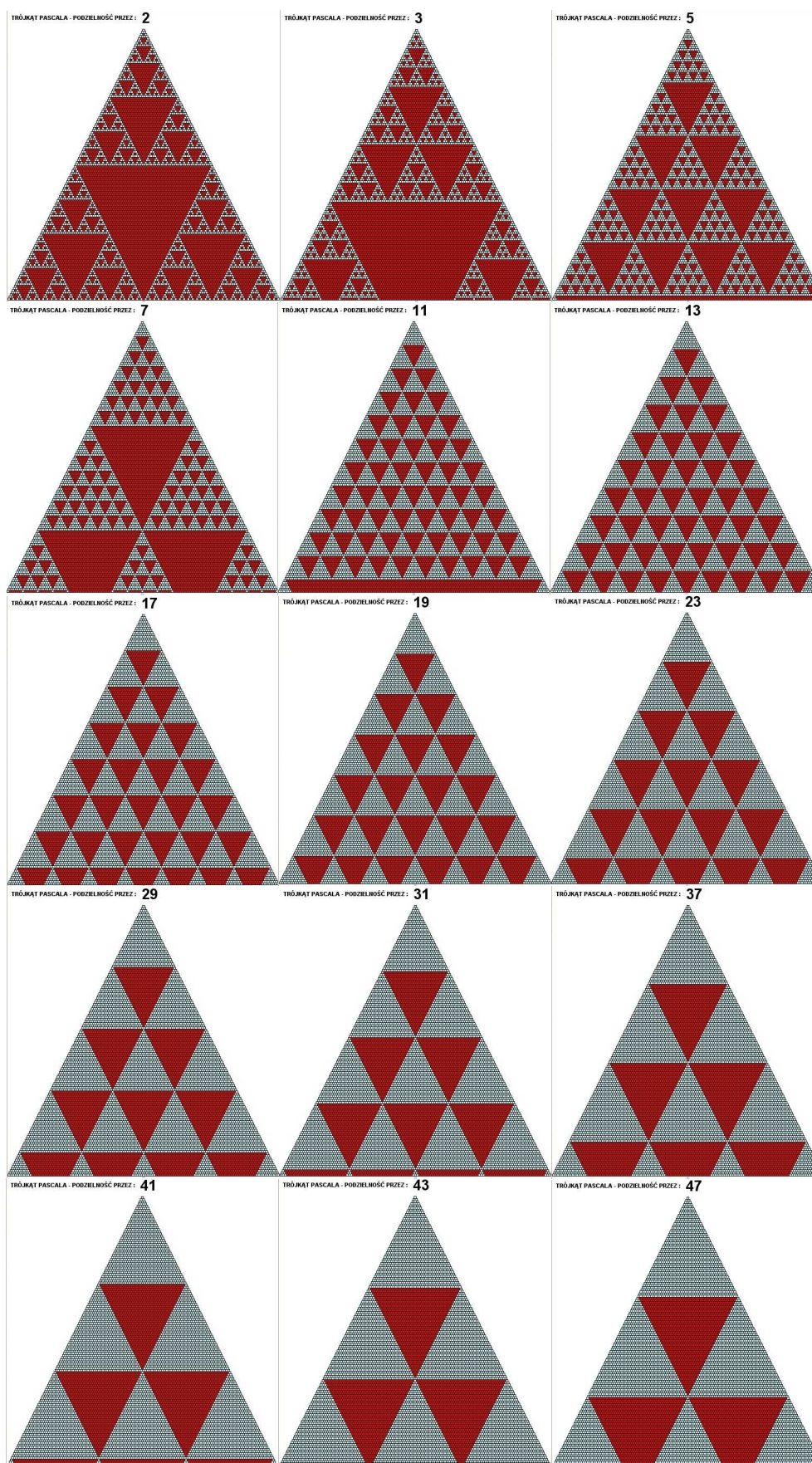
DZIELNIKI BĘDĄCE NATURALNYMI POTĘGAMI LICZBY 3



DZIELNIKI BĘDĄCE NATURALNYMI POTĘGAMI LICZBY 5



DZIELNIKI BĘDĄCE LICZBAMI PIERWSZYMI



DZIELNIKI BĘDĄCE ILUSTRACJĄ DATY FINAŁU KONKURSU

(11. 04. 2013)

