Gimnazjum nr 17 im. Artura Grottgera w Krakowie

ul. Litewska 34,

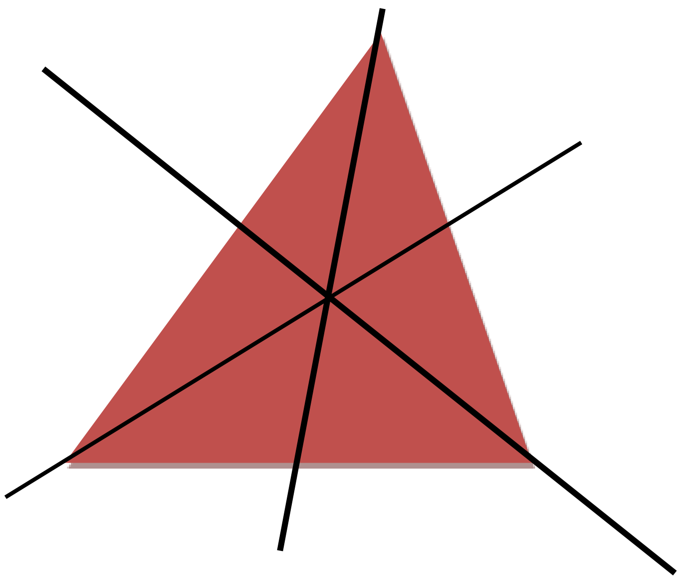
30-014 Kraków,

tel. (12) 633-59-12

Twierdzenie Cevy, odwrotne do niego i ich zastosowania

Ewelina Wszołek, Marcin Kowalski

opiekun pracy: mgr Dorota Szczepańska



Kraków, luty 2013

W tej pracy przedstawimy twierdzenie Cevy, odwrotne do niego, oraz ich zastosowania. Będą to znane twierdzenia matematyki szkolnej mówiące o tym, że środkowe, wysokości i symetralne boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cevy okazało się świetnym uniwersalnym „kluczem” z którego w sposób mniej lub bardziej skomplikowany, można je wszystkie wyprowadzić.

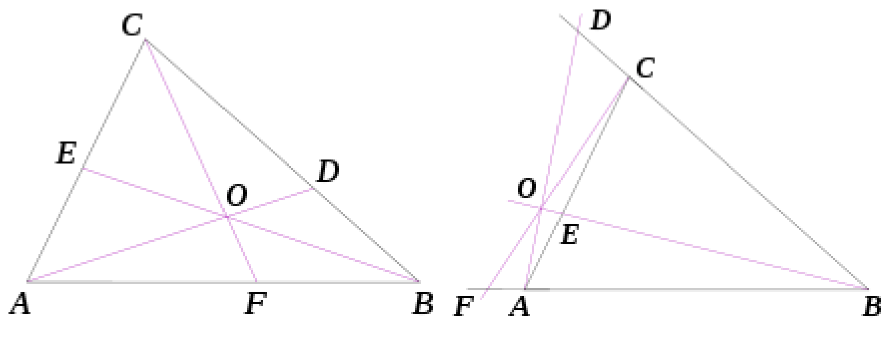
Jest to twierdzenie geometrii płaskiej, które zostało sformułowane i udowodnione przez włoskiego matematyka Giovanniego Cevę w 1678 roku. Twierdzenie odwrotne jest prawdziwe i także zostało udowodnione przez Cevę. Cewa korzystał w dowodzie ze znacznie starszego twierdzenia Menelaosa. My skorzystamy w dowodzie z własności pól trójkątów.

Twierdzenie Cevy

Jeżeli trzy proste AD , BE , CF przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC i nie zawierające żadnego boku trójkąta przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe, to odcinki wyznaczone przez punkty M, N, P (punkty przecięcia prostych odpowiednio z bokami AB, BC i CA lub ich przedłużeniami) spełniają warunek :

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

Na drugim z rysunków będących ilustracjami twierdzenia widać, iż punkt przecięcia się prostych O może leżeć poza trójkątem.



Dowód

Przyjmijmy, że :

$$x = \frac{|BD|}{|DC|},\ y = \frac{|CE|}{|EA|},\ z = \frac{|AF|}{|FB|}$$

wtedy, po rozszerzeniu ułamka (mnożymy licznik i mianownik przez $\frac{1}{2}h$) (gdzie h to wysokość padająca na CB) otrzymujemy:

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{P\Delta ABD}{P\Delta ADC} \quad (1)$$

oraz:

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{P\Delta OBD}{P\Delta ODC} \quad (2)$$

$$P\Delta AOB = P\Delta ADB - P\Delta ODB \quad (3)$$

$$P\Delta AOC = P\Delta ADC - P\Delta ODC \quad (4)$$

Z (1) i (2) wynika, że:

$$\frac{P\Delta ADB}{P\Delta ADC} = \frac{P\Delta ODB}{P\Delta ODC}$$

Co obustronnie pomnożone przez: $P\Delta ADC \cdot P\Delta ODC$ daje:

$$P\Delta ADB \cdot P\Delta ODC = P\Delta ODB \cdot P\Delta ADC \quad (5)$$

$$P\Delta ADB = \frac{P\Delta ODB \cdot P\Delta ADC}{P\Delta ODC}$$

Z (3) i (5):

$$P\Delta AOB = \frac{P\Delta ODB \cdot P\Delta ADC}{P\Delta ODC} - P\Delta ODB = P\Delta ODB\left(\frac{P\Delta ADC}{P\Delta ODC} - 1\right)$$
$$= \frac{P\Delta ADC - P\Delta ODC}{P\Delta ODC} \cdot P\Delta ODB = \frac{P\Delta AOC}{P\Delta ODC} \cdot P\Delta ODB$$

$$P\Delta AOB = \frac{P\Delta AOC \cdot P\Delta ODB}{P\Delta ODC}$$

$$\frac{P\Delta AOB}{P\Delta AOC} = \frac{P\Delta ODB}{P\Delta ODC} = x$$

$$x = \frac{P\Delta AOB}{P\Delta AOC}$$

Analogicznie:

$$y = \frac{P\Delta COB}{P\Delta AOB}$$

$$z = \frac{P\Delta AOC}{P\Delta COB}$$

zatem:

$$xyz = \frac{P\Delta AOB}{P\Delta AOC} \cdot \frac{P\Delta COB}{P\Delta AOB} \cdot \frac{P\Delta AOC}{P\Delta COA}$$

Po skróceniu otrzymujemy

$$xyz = 1$$

ale

$$x \cdot y \cdot z = \frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|}$$

więc

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

Pomysł dowodu zaczerpnęliśmy z Wikipedii (http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Cevy). Szczegóły dopracowaliśmy sami.

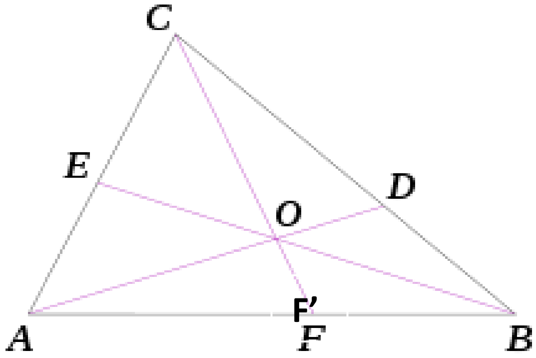
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cevy

Aby twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cevy było prawdziwe trzeba dodatkowo założyć że proste AD BE i CF nie są równoległe.

Jeżeli trzy proste AD , BE , CF przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC i nie zawierające żadnego boku trójkąta wyznaczają odcinki przez punkty M, N, P (punkty przecięcia prostych odpowiednio z bokami AB, BC i CA lub ich przedłużeniami), które spełniają warunek

$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$ **to proste te przecinają się w jednym punkcie.**

Załóżmy, że punkty D, E i F spełniają równanie twierdzenia Cevy. AD i BE przecinają się w punkcie O i prosta CO przecina AB w punkcie F'.



Z udowodnionego powyżej twierdzenia mamy: $\frac{|AF'|}{|F'B|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$

Po porównaniu z równaniem :

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

mamy $$\frac{AF'}{F'B} = \frac{AF}{FB} \qquad |+1$$

$$\frac{AF'}{F'B} + 1 = \frac{AF}{FB} + 1$$

$$\frac{AF'}{F'B} + \frac{F'B}{F'B} = \frac{AF}{FB} + \frac{FB}{FB}$$

$$\frac{AF' + F'B}{F'B} = \frac{AF + FB}{FB}$$

Po dodaniu jedynki do obu stron i wykorzystaniu równości

$$AF' + F'B = AF + FB = AB$$

$$\frac{AB}{F'B} = \frac{AB}{FB}$$

więc

$$F'B = FB$$

Wtedy F’ = F bo nie może być inaczej gdy F i F’ leżą na prostej BA (o początku w punkcie B).

Pomysł dowodu zaczerpnęliśmy z Wikipedii (http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Cevy).

Zastosowanie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy w geometrii szkolnej

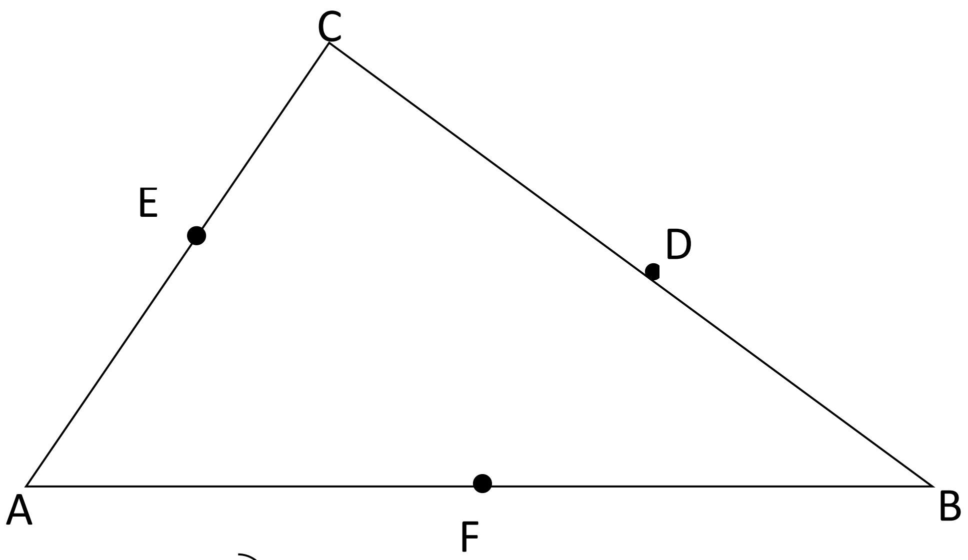
Twierdzenie Cevy i do niego odwrotne mają wiele zastosowań w geometrii. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cevy jest idealne do udowadniania wielu twierdzeń poznawanych w gimnazjum.

Wniosek 1

Wszystkie środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód:

Środkowa to odcinek łącząca środek boku trójkąta z przeciwnym bokiem.



$$\left.\begin{array}{l} \frac{AF}{FB} = 1 \\ \\ \frac{BD}{DC} = 1 \\ \\ \frac{CE}{EA} = 1 \end{array}\right\} \quad więc \quad \frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

Czyli z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy wynika, że odcinki AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

cbdu.

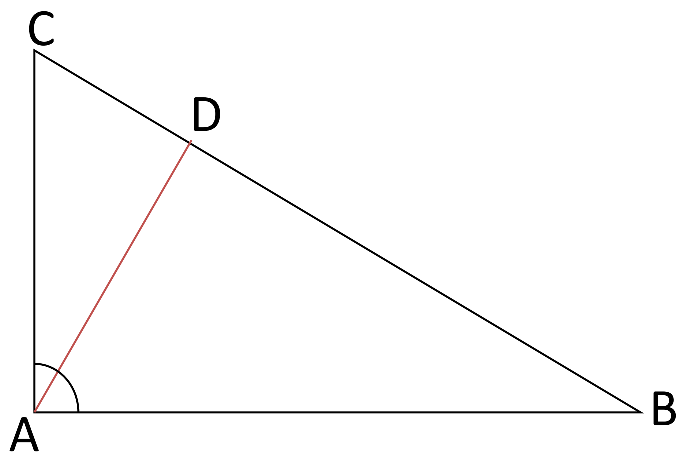
Dowód ten wykonaliśmy samodzielnie.

Wniosek 2

Wszystkie wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

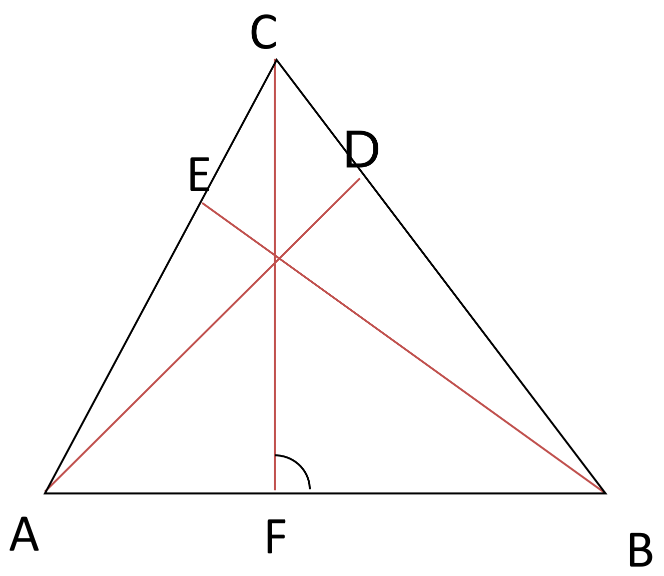
Dowód:

<u>W przypadku trójkąta prostokątnego:</u>



AC i AB są więc one wysokościami i więc jak wysokość AD przecinają się w punkcie A.

<u>W przypadku trójkąta ostrokątnego</u>



Δ ADC jest podobny do Δ ECB (ponieważ mają po kącie prostym i jeden wspólny kąt ACB). Wynika to z cechy kk. (kąt-kąt) podobieństwa trójkątów.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{EC}{CD} \quad (1)$$

Analogicznie Δ ABD i Δ FBC więc: $\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{FB}$ (2)

i Δ ABE, i ΔAFC $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF}$ (3)

Odwracam równość (2): $\frac{BC}{AB} = \frac{FB}{DB}$ (4)

Mnożę stronami (4) i (3): $\frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{FB}{DB} \cdot \frac{AE}{AF}$ (5)

Po uproszczeniu otrzymuję: $\frac{BC}{AC} = \frac{FB}{DB} \cdot \frac{AE}{AF}$ (5)

Porównuję (1) i (5), bo mają taką samą lewą stronę

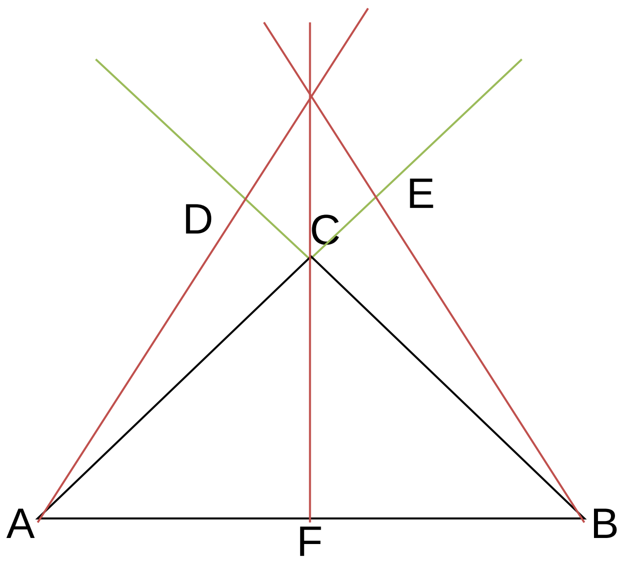
$$\frac{EC}{CD} = \frac{FB}{DB} \cdot \frac{AE}{AF} \quad \Big| : \frac{EC}{CD}$$

$$1 = \frac{FB}{DB} \cdot \frac{AE}{AF} \cdot \frac{CD}{EC}$$

Porządkuję: $\frac{FB}{AF} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{AE}{EC} = 1$

Równość ta pokazuje, że spełnione są założenia twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy, więc wysokości AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Dla trójkąta rozwartokątnego:



Δ ACD jest podobny do Δ CBE (ponieważ kąt ACD i kąt CBE są wierzchołkowe a kąt ADC i kąt CBE proste) więc z cechy kk. podobieństwa trójkątów: $\frac{AC}{CB} = \frac{DC}{CE}$ (6)

ΔABD jest podobny do ΔFBC (ponieważ kąt ABC mają wspólny i każdy z nich ma po kącie prostym) $\frac{AB}{CB} = \frac{DB}{BF}$ (7)

Jak w przypadku dla trójkąta ostrokątnego odwracam (6) mnożę stronami przez (7) :

$$\frac{CB}{AC} \cdot \frac{AB}{CB} = \frac{CE}{DC} \cdot \frac{DB}{BF}$$

Po skróceniu otrzymuje:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CE}{DC} \cdot \frac{DB}{BF}$$

z (8) ponieważ lewe strony są takie same:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{CE}{DC} \cdot \frac{DB}{BF} \quad \Big| \cdot \frac{AF}{AE}$$

$$1 = \frac{CE \cdot DB \cdot AF}{DC \cdot BF \cdot AE}$$

$$1 = \frac{CE}{AE} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{AF}{BF}$$

Znów spełnione są założenia twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cewy, a więc w przypadku trójkąta rozwartokątnego przedłużenia wysokości przecinają się w jednym punkcie.

cbdu.

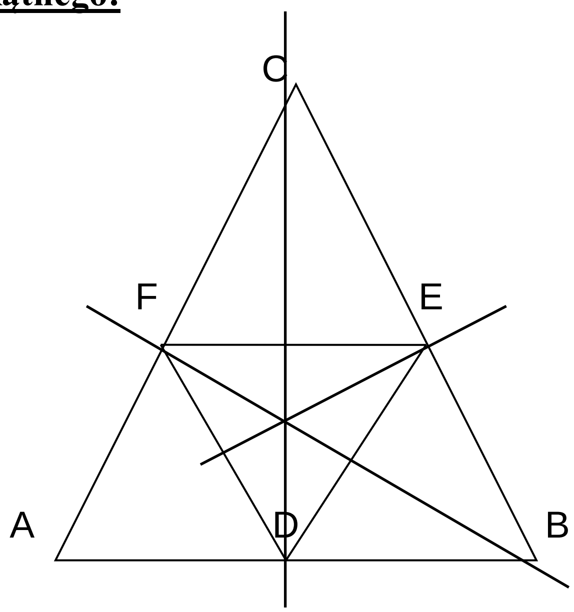
Dowód w przypadku trójkąta ostrokątnego został zaczerpnięty z książki Jarosława Górnickiego ,,Okruchy matematyki'', a pozostałe przypadki uzupełniliśmy sami.

Wniosek 3

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie

Dowód:

<u>Dla trójkąta ostrokątnego:</u>



$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE} = \frac{2}{1}$ (ponieważ D jest środkiem AB)

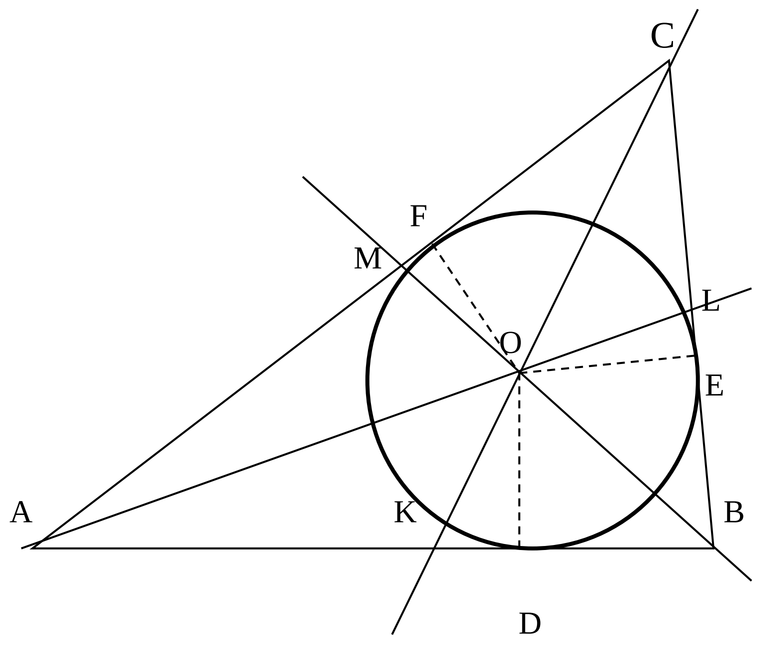
analogicznie $DF = \frac{1}{2}BC$ i $EF = \frac{1}{2}AB.$

W trójkącie DEF symetralne boków trójkąta ABC zawierają wysokości mniejszego trójkąta. Te na podstawie wniosku 2 przecinają się w jednym punkcie.
W przypadku trójkątów prostokątnego i rozwartokątnego dowód się nie zmienia. cbdu.
Pomysł dowodu wniosku 3 zaczerpnęliśmy z książki Jarosława Górnickiego ,,Okruchy matematyki''.

Wniosek 4

Proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt przecinają się w jednym punkcie.

Dowód:
Aby wpisać okrąg w trójkąt należy skonstruować trzy dwusieczne jego kątów:



Ale punkt O to nie punkt Grenne'e (punkt przecięcia prostych z wniosku 4), a punkty K, L, M to nie punkty styczności okręgu do boków. Gdy już mamy skonstruowany okrąg w trójkącie:

$FC = CE = a$ z podobieństwa trójkątów OFC i OEC (cecha kąt-kąt)
$AD = AF = b$
$DB = BE = c$ analogicznie

Czyli :

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Znowu spełnione są założenia tw. odwrotnego do tw. Cevy czyli proste AD, BE i CF muszą się przecinać w jednym punkcie

cbdu.

Dowód przeprowadziliśmy samodzielnie , ale w oparciu o rysunek 7 w artykułu dr Michała Szurka „Antomat do udowadniania twierdzeń ‘’ w czasopiśmie „Delta ‘’ z maja (1983 r.)

Jak widać, wiele faktów, które podawane są nam w szkole można wyprowadzić twierdzenia odwrotnego do tw. Cevy. Uzupełnił on już w erze nowożytnej (1678 r.) geometrię znaną w starożytności, uporządkowaną przez Euklidesa (zwaną dzisiaj geometrią euklidesową). Za około 200 lat okaże się ,że geometria euklidesowa nie musi być jedyną. Geometrię opartą na innych aksjomatach wymyśli Mikołaj Łobaszewski, Rosjanin, syn polskiego zesłańca.

BIBLIOGRAFIA:

- *WIKIPEDIA (http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Cevy)*
- *Jarosław Górnicki „Okruchy matematyki''*
- *dr Michał Szurek „Antomat do udowadniania twierdzeń '' w czasopiśmie „Delta '' z maja (1983 r.)*

Spis treści