# Tajemnice funkcji $\sigma$ oraz $\tau$. Dzielniki liczb naturalnych oraz elementy zaawansowanej teorii liczb.

Bartłomiej Grochal
V Liceum Ogólnokształcące
im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

## Przedmowa

Teoria liczb oraz nierówności to dwa szerokie zagadnienia, z którymi zawsze musi zmierzyć się każdy olimpijczyk. Niniejsza praca łączy je w sobie. Po pierwsze traktuje o funkcji $\sigma$, czyli sumie dzielników całkowitych dodatnich liczby naturalnej. Po drugie parę słów poświęcę funkcji $\tau$ - ilości dzielników całkowitych dodatnich liczby naturalnej. Po trzecie zaś, z wymienionymi funkcjami wiążą się bardzo interesujące fakty dotyczące ograniczeń ich wartości.

Praca ta została przygotowana na Konkurs organizowany przez Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Przyjaciół Nauk i Sztuk, jednak skierowana jest również do wszystkich sympatyków teorii liczb oraz szeroko pojętej matematyki. W poprzednim roku zajmowałem się zagadnieniami algebraicznymi związanymi z nierównością między średnimi oraz związkami między sumą i iloczynem $n$ liczb. Na początku wprowadzę podstawowe pojęcia i przytoczę fakty, których później użyję do wykazywania wspomnianych własności funkcji $\sigma$ oraz $\tau$, a także do rozwiązywania zadań pochodzących z rozmaitych olimpiad matematycznych. W wielu miejscach zamieszczam komentarze wprowadzające w technikę oraz zastosowany schemat rozumowania, aby Czytelnik mógł w pełni poznać sposób rozwiązania danego zadania. Ponadto praca traktuje również o funkcjach arytmetycznych, a w szczególności znanych funkcjach teorioliczbowych. Wykażę między innymi ich multiplikatywność oraz własności w splocie Dirichleta, jak również same własności splotu jako działania grupy abelowej. Praca zawiera w sobie także elementy wiedzy informatyczno - algorytmicznej.

Chciałbym w tym miejscu podziękować mojemu opiekunowi - Prof. Jackowi Dymelowi - za pomoc podczas tworzenia tej oraz innych prac, a także za cenne wskazówki.

*Bartłomiej Grochal*

## Spis oznaczeń użytych w pracy

$\mathbb{P}$ - zbiór liczb pierwszych
$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ - zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Z}_+$ - zbiór liczb całkowitych dodatnich
$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{R}_+$ oraz $\mathbb{Q}_+$ - analogicznie jak powyżej
$\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych
$\lfloor x \rfloor$ - podłoga z liczby $x$
$\lceil x \rceil$ - sufit z liczby $x$
$(x, y) = 1$ - liczby $x$ oraz $y$ są względnie pierwsze
$k|n$ - liczba $k$ dzieli liczbę $n$
$k \nmid n$ - liczba $k$ nie dzieli liczby $n$

# Wstęp

**Definicja** *Funkcją* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *nazywamy taką funkcję, która dowolnej liczbie naturalnej* $n$ *przypisuje ilość jej dodatnich dzielników całkowitych.*

**Twierdzenie** (Wzór jawny na liczbę dzielników) *Jeżeli* $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$*, to:*

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1).$$

**Dowód** Zauważmy na początku, że powyższy rozkład jest jednoznaczny, co wnioskujemy z podstawowego twierdzenia arytmetyki. W dalszej części pracy, stosując ten zapis, ominę tę uwagę.
Przeprowadzimy dowód kombinatoryczny. Zauważmy, że każdy dzielnik liczby $n$ musi zawierać te same (choć oczywiście nie wszystkie) liczby pierwsze $p_1, p_2, \dots, p_k$, co liczba $n$ w wykładnikach nieujemnych oraz nie większych od odpowiednio: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Każdy taki dzielnik możemy więc zapisać w postaci: $p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$, gdzie: $\forall_{i \in \{1,2,\dots,k\}} : \beta_i \in \{0, 1, 2, \dots, \alpha_i\}$. Wynika stąd, że wykładnik liczby $p_1$ możemy dobrać na $\alpha_1 + 1$ sposobów, wykładnik liczby $p_2$ - na $\alpha_2 + 1$ sposobów i tak dalej. Otrzymujemy zatem $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ różnych liczb, które są dzielnikami liczby $n$. Są to oczywiście wszystkie takie liczby, ponieważ rozważyliśmy wszystkie możliwe wartości wykładników $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\dots$, $\alpha_k$.

$\square$

**Definicja** *Sumą dzielników nazywamy liczbę:*

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

*gdzie:* $d, n \in \mathbb{Z}_+$.

**Twierdzenie** (Wzór jawny na sumę dzielników) *Niech* $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$*, gdzie:* $\forall_{i \in \{1,2,\dots,k\}} : p_i \in \mathbb{P}$*. Wówczas:*

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i + 1} - 1}{p_i - 1}.$$

**Dowód**
Wnoiskujemy jak powyżej. Skoro $d$ jest dzielnikiem liczby $n$, to musi zawierać w swoim rozkładzie te same liczby pierwsze w potęgach nie większych,

co liczba $n$. Zatem jest on postaci:

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k},$$

gdzie: $\forall_{i \in \{1,2,\dots,k\}} : \beta_i \in \{0, 1, \dots, \alpha_i\}$. Zatem:

$$\sigma(n) = \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} =$$

$$\left( \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} p_1^{\beta_1} \right) \left( \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} p_2^{\beta_2} \right) \dots \left( \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_k^{\beta_k} \right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Ostatnie przejście otrzymujemy przez wykorzystanie wzoru skróconego mnożenia: $a^n - b^n$.

□

Przyjrzyjmy się teraz innemu algorytmowi obliczania wartości funkcji $\sigma$. Dla człowieka, który wykonuje podane w nim operacje na kartce może być on niepraktyczny i uciążliwy, jednak komputer radzi sobie z nim całkiem dobrze. Stosując go, możemy w bardzo krótkim czasie uzyskać wartości $\sigma(n)$ dla bardzo dużych i złożonych liczb $n$. Przedstawię go w trzech wersjach. Pierwsza z nich to słowny opis działania, druga - zapis w tak zwanym "pseudokodzie", zaś trzecia - implementacja w języku C++.

### Opis słowny działania algorytmu na obliczanie wartości $\sigma(n)$

Idea algorytmu jest bardzo prosta. Bierzemy daną liczbę $n$ i chcemy wyznaczyć sumę dzielników wszystkich liczb mniejszych lub równych od niej w złożoności $O(n\sqrt{n})$. W tym celu, dla każdej z liczb powtórzymy następującą procedurę:

1. Sprawdzamy, czy któraś z liczb ze zbioru: $\{1, 2, \dots, \lfloor\sqrt{n_1}\rfloor\}$ dzieli liczbę $n_1 \leq n$. Jeżeli tak, to dodajemy jej wartość do sumy, jeżeli nie - przechodzimy do kolejnej liczby z tego zbioru.

2. Zauważmy, że jeśli pewna liczba $n_1$ ma dzielnik $p$ mniejszy od $\sqrt{n_1}$, to ma również dzielnik $p_1$ większy od $\sqrt{n_1}$ taki, że: $\frac{n_1}{p} = p_1$.

3. Zatem do naszej sumy możemy dodać również liczbę $\frac{n_1}{p}$, czyli tak zwany dzielnik komplementarny do $p$. Należy jednak pamiętać o tym, że jeżeli liczba $n_1$ jest kwadratem, to dzielnik $\sqrt{n_1}$ dodajemy tylko raz! W ten sposób znaleźliśmy i zsumowaliśmy wszystkie dzielniki pewnej liczby $n_1 \leq n$ w czasie $O(\sqrt{n_1})$, ponieważ wykonaliśmy $\sqrt{n_1}$ iteracji.

Szacunkowo zatem złożoność algorytmu wynosi $O(n\sqrt{n})$, ponieważ dla każdej z $n$ liczb wykonujemy co najwyżej $\sqrt{n}$ operacji.
Zapisy algorytmu w pseudokodzie oraz w języku C++ znajdują się na końcu mojej pracy. Są to algorytmy opatrzone odpowiednio nazwami: Algorithm 1 i Algorithm 2.

## Funkcje arytmetyczne

**Definicja** *Funkcją arytmetyczną nazywamy każdą taką funkcję f, która spełnia warunek:*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}.$$

**Definicja** *Funkcję arytmetyczną $f$ nazywamy multiplikatywną, jeżeli dla wszystkich par (a, b) liczb względnie pierwszych spełniona jest równość:*

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b).$$

**Definicja** *Tocjentem nazywamy taką funkcję $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, która dowolnej dowolnej liczbie naturalnej $n$ przypisuje ilość liczb względnie pierwszych z nią i nie większych od niej samej. Jeżeli $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, to:*

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

**Definicja** *Funkcją $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazywamy taką funkcję, która dowolnej liczbie naturalnej $n$ przypisuje ilość liczb pierwszych nie większych od niej samej.*

**Definicja** *Funkcją $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ nazywamy funkcję określoną dla dowolnej liczby naturalnej $n$ w sposób następujący: $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ jeżeli $n$ jest liczbą podzielną przez kwadrat liczby pierwszej oraz $\mu(n) = (-1)^k$ jeżeli liczba $n$ jest iloczynem $k$ różnych liczb pierwszych.*

**Definicja** *Funkcją $I : \mathbb{N} \to \{1\}$ nazywamy taką funkcję, która dowolnej liczbie naturalnej $n$ przyporządkowuje wartość 1.*

**Definicja** *Funkcją $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazywamy taką funkcję, która dowolnej liczbie naturalnej $n$ przyporządkowuje liczbę $n$.*

**Definicja** *Funkcją* $e : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ *nazywamy taką funkcję, która dowolnej liczbie naturalnej* $n$ *przyporządkowuje liczbę* $0$ *jeżeli* $n \neq 1$ *oraz* $1$, *gdy* $n = 1$. *Funkcję tę definiujemy jako:*

$$e(n) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} \mathit{1}; & n = 1 \\ \mathit{0}; & n > 1 \end{cases} .$$

Od tego momentu powyższe oznaczenia będą odnosić się do przedstawionych funkcji, chyba że zaznaczono inaczej. Ich szczegółowe własności zostaną omówione w dalszej części pracy.

# Splot Dirichleta, multiplikatywność

**Definicja** *Niech $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ będą funkcjami arytmetycznymi. Splotem Dirichleta funkcji $f, g$ nazywamy funkcję $f * g$ określoną dla dowolnej liczby naturalnej $n$ wzorem:*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) g(d_2),$$

*gdzie: $\sum_{d|n}$ oznacza sumowanie po wszystkich dzielnikach liczby $n$, zaś $\sum_{d_1 d_2 = n}$ oznacza sumowanie po parach dzielników komplementarnych.*

Od tego momentu pod pojęciem "dzielniki liczby $n$" używał będę sformułowania: "dodatnie całkowite dzielniki liczby $n$", chyba że zaznaczono inaczej. Poniżej znajduje się omówienie kilku podstawowych własności splotu Dirichleta.

**Twierdzenie** *Zbiór funkcji multiplikatywnych tworzy grupę ze splotem Dirichleta jako działaniem grupowym.*

**Dowód**
Aby wspomniany zbiór był grupą, musimy wykazać następujące własności splotu Dirichleta: łączność, istnienie elementu przeciwnego oraz istnienie elementu neutralnego. Dodatkowo wykażemy, że splot ten jest przemienny, co skutkuje tym, że powyższa grupa będzie w istocie grupą abelową.

Dowód istnienia elementu neutralnego. Niech $f$ będzie dowolną funkcją arytmetyczną. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej $n$:

$$(f * e)(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) e(d_2) = f(n),$$

ponieważ funkcja $e(n)$ przyjmuje wartość różną od zera jedynie dla $n = 1$, co oznacza, że $d_1 = n$ i $d_2 = 1$, zaś pozostałe składniki sumy zerują się.

Dowód łączności. Niech $f_1, f_2, f_3$ będą dowolnymi funkcjami arytmetycznymi. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej $n$:

$$[f_1 * (f_2 * f_3)] = \sum_{d_1 d_4 = n} f_1(d_1)(f_2 * f_3)(d_4) =$$

$$\sum_{d_1 d_4 = n} f_1(d_1) \cdot \sum_{d_2 d_3 = d_4} f_2(d_2) f_3(d_3) = \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f_1(d_1) f_2(d_2) f_3(d_3) =$$

$$\sum_{d_3d_5=n} f_3(d_3)\cdot \sum_{d_1d_2=d_5} f_1(d_1)f_2(d_2) =$$

$$\sum_{d_3d_5=n} f_3(d_3)(f_1 * f_2)(d_5) = [(f_1 * f_2) * f_3](n).$$

Istnienie elementu odwrotnego. Niech $f$ będzie dowolną funkcją arytmetyczną taką, że: $f(1) \neq 0$. Niech $c = \frac{1}{f(1)}$. Niech funkcja $g$, czyli element odwrotny działania splotu Dirichleta będzie określona następująco:

$$g(n) = \begin{cases} \text{c;} & \text{n=1} \\ -c \cdot \sum_{\substack{d_1d_2=n \\ d_1\neq 1}} f(d_1)g(d_2); & \text{n>1} \end{cases}.$$

Oczywiście podana zależność spełnia warunki elementu odwrotnego, to znaczy: $(f * g)(n) = e(n)$, co w bardzo łatwy sposób sprawdzamy za pomocą definicji.

Dowód przemienności splotu. Niech $f, g$ będą pewnymi funkcjami arytmetycznymi. Zanotujmy prostą obserwację - jeżeli przez $d_1, d_2, \ldots, d_k$ oznaczymy dzielniki pewnej liczby naturalnej $n$, to:

$$\{d_1, d_2, \ldots, d_k\} = \left\{\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots, \frac{n}{d_k}\right\}.$$

Wynika stąd zatem, że:

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)g(d) = (g * f).$$

$\square$

Wynika stąd zatem, że splot funkcji multiplikatywnych jest funkcją multiplikatywną. Dowód ten można przeprowadzić również elementarnie, stosując podstawowe własności multiplikatywności funkcji. W ten sposób natychmiast wykażemy następujące twierdzenie:

**Twierdzenie** *Funkcja $\sigma$ jest funkcją multiplikatywną.*

**Dowód** Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$(I * T)(n) = \sum_{d|n} I(d)T\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} T\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} T(d) = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Skoro zaś splot funkcji multiplikatywnych jest funkcją multiplikatywną, to funkcja $\sigma$ jest funkcją multiplikatywną, ponieważ tą własność posiadają funkcje $I$ oraz $T$:

$$\forall_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\(a,b)=1}} : 1 = I(ab) = I(a)\cdot I(b) = 1\cdot 1 = 1,$$

$$\forall_{\substack{a,b\in\mathbb{N}\\(a,b)=1}} : ab = T(ab) = T(a)\cdot T(b) = a\cdot b = ab.$$

□

Przedstawiona powyżej własność nie jest jedyną, która charakteryzuje splot Dirichleta dla wcześniej przedstawionych funkcji teorioliczbowych. Przyjrzyjmy się zatem innym, równie ciekawym tożsamościom, które udało mi się wykazać. Prezentuję cztery sposoby podejścia do dowodzenia zależności splotowych. Pierwszy z nich to wykorzystanie własności funkcji dla dowolnej liczby naturalnej (dowód multiplikatywności funkcji $\sigma$ za pomocą splotu $I * T$). Drugi z nich to wykorzystanie multiplikatywności funkcji, co znacznie upraszcza przebieg dowodu (większość z przeprowadzonych rozumowań). Trzeci z nich to wykorzystanie zależności splotowych między innymi funkcjami, z czego skorzystamy dowodząc Tożsamość 6. Ostatnim, czwartym sposobem jest przekształcenie obu stron splotu w taki sposób, aby otrzymać to samo wyrażenie. Ten rodzaj dowodu prezentuję przede wszystkim w dwóch ostatnich przykładach.

**Tożsamość 1:** $(\varphi * I) = T$.
Wykażemy najpierw, że funkcja $\varphi$ jest multiplikatywna. Weźmy dwie względnie pierwsze liczby o rozkładach na czynniki pierwsze: $a = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ oraz $b = q_1^{\beta_1}\dots p_l^{\beta_l}$. Wówczas zachodzi:

$$\varphi(ab) = ab\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{q_l}\right) =$$

$$\left[a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\right]\cdot\left[b\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{q_l}\right)\right] = \varphi(a)\varphi(b).$$

Funkcje $I$ oraz $T$ również są multiplikatywne, co wykazaliśmy wcześniej, zatem również funkcja $\varphi * I$ jest multiplikatywna. Skoro tak, to równość $(\varphi * I)(n) = T(n)$ wystarczy sprawdzić wyłącznie wtedy, gdy $n = p^k$, gdzie: $p\in\mathbb{P}$. Wówczas:

$$(\varphi * I)(p^k) = \sum_{d|n}\varphi(d)I\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n}\varphi(d) = \sum_{i=0}^{k}\varphi(p^k) =$$

$$1 + (p-1) + (p^2 - p) + \ldots + (p^k - p^{k_1}) = p^k = T(p^k).$$

**Tożsamość 2:** $\varphi = (\mu * T)$.
Wykażemy, że $I^{-1} = \mu$, gdzie: $I^{-1}$ jest funkcją odwrotną do $I$ względem splotu Dirichleta. Aby to zrobić pokażemy również, że funkcja $\mu$ jest multiplikatywna.
Weźmy dwie liczby względnie pierwsze o rozkładach na czynniki pierwsze: $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ oraz $b = q_1^{\beta_1} \ldots q_l^{\beta_l}$. Wówczas, jeżeli jedna z nich jest jedynką, to zachodzi w sposób oczywisty: $\mu(ab) = \mu(b)$ oraz $\mu(a)\mu(b) = 1 \cdot \mu(b) = \mu(b)$, czyli $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$. Załóżmy więc, że $a, b \geq 2$ i rozpatrzmy przypadki:
Jeżeli co najmniej jedna z liczb $a, b$ jest podzielna przez kwadrat liczby pierwszej, to również liczba $ab$ jest przez niego podzielna. Oznacza to, że $\mu(ab) = 0$ oraz $\mu(a) = 0$ lub $\mu(b) = 0$, czyli $\mu(a)\mu(b) = 0 = \mu(ab)$.
Jeżeli żadna z liczb $a, b$ nie jest podzielna przez kwadrat liczby pierwszej, to również liczba $ab$ nie jest podzielna przez każdą liczbę pierwszą w potędze większej od 1, gdyż liczba $ab$ składa się z dokładnie tych samych czynników, co liczby $a, b$, gdyż są one względnie pierwsze. Oznacza to, że: $\mu(ab) = (-1)^{k+l}$, $\mu(a) = (-1)^k$ oraz $\mu(b) = (-1)^l$, skąd: $\mu(a)\mu(b) = (-1)^{k+l} = \mu(ab)$, co kończy dowód multiplikatywności.
Wykażemy teraz część drugą twierdzenia mówiącą o odwrotności funkcji $I$ oraz $\mu$ względem splotu Dirichleta. Musimy zatem wykazać, że: $(\mu * I) = e$. Oczywiście funkcja $\mu * I$ jest multiplikatywna, gdyż obie te funkcje są multiplikatywne. Zatem wykazujemy, że dla dowolnej liczby pierwszej $p$ zachodzi: $(\mu * I)(p^k) = e(p^k) = 0$. Mamy zatem:

$$(\mu * I)(p^k) = \sum_{d|p^k} \mu(d) I\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|p^k} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \ldots + \mu(p^k) =$$

$$1 + (-1) + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

Mamy więc, że: $I^{-1} = \mu$. Z Tożsamości 1 mamy również: $(\varphi * I) = T$. Wynika stąd łatwo, że:

$$\varphi = (T * I^{-1}) = (T * \mu),$$

co kończy dowód.

**Tożsamość 3:** $\tau = (I * I)$.
Wykażemy najpierw, że funkcja $\tau$ jest multiplikatywna. Weźmy dwie względnie pierwsze liczby o rozkładach kanonicznych: $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ oraz $b =$

$q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}$. Wówczas oczywiście: $ab = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}$. Stąd mamy:

$$\tau(ab) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1)(\beta_1 + 1) \dots (\beta_l + 1),$$

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1),$$
$$\tau(b) = (\beta_1 + 1) \dots (\beta_l + 1).$$

Stąd faktycznie dostajemy, że: $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$.
Skoro więc funkcje: $I$, $(I * I)$ oraz $\tau$ są multiplikatywne, to wystarczy sprawdzić tożsamość dla $n = p^k$. Zatem:

$$(I * I)(p^k) = \sum_{d|p^k} I(d) I\left(\frac{p^k}{d}\right) = \sum_{d|p^k} 1 = k + 1 = \tau(p^k),$$

ponieważ dzielnikami liczby $p^k$ są liczby: $1, p, p^2, \dots, p^k$.

**Tożsamość 4:** $(\mu * I) = e$.
Na początek wykażemy multiplikatywność funkcji $e$. Weźmy dwie względnie pierwsze liczby $a, b$. Zauważmy, że jeżeli $a = b = 1$, to: $e(ab) = e(1) = 1 = 1 \cdot 1 = e(a) \cdot e(b)$. W każdym z pozostałych wypadków (czyli gdy ab $> 1$) mamy: $e(ab) = 0$, zaś co najmniej jedna z liczb $a, b$ jest większa od 1. Załóżmy bez straty ogólności, że jest to liczba $a$, wówczas: $e(a) = 0$, czyli $e(a)e(b) = 0 = e(ab)$, co kończy dowód.
Ponownie zatem równość splotową sprawdzamy wyłącznie dla $n = p^k$, gdyż funckje: $\mu$, $I$, $\mu * I$, $e$ są multiplikatywne. Mamy zatem:

$$(\mu * I)(p^k) = \sum_{d|p^k} \mu(d) I\left(\frac{p^k}{d}\right) = \mu(1) + \mu(p) = 1 + (-1) = 0 = e(ab).$$

Oczywiście dla $k = 0$ otrzymujemy: $\mu(1) = 1 = e(1)$, co kończy dowód.

**Tożsamość 5:** $(\mu * \tau) = I$.
Wiemy, że funkcje: $\mu$, $\tau$, $(\mu * \tau)$ oraz $I$ są multiplikatywne, więc zależność sprawdzamy wyłącznie dla $n = p^k$. Zatem:

$$(\mu * \tau)(p^k) = \sum_{d|p^k} \mu(d) \tau\left(\frac{p^k}{d}\right) = \mu(1)\tau(p^k) + \mu(p)\tau(p^{k-1}) =$$

$$k + 1 - k = 1 = I(p^k).$$

**Tożsamość 6:** $\tau^{-1} = (\mu * \mu)$.
Korzstając z wczesniej udowodnionych tożsamości oraz łączności splotu mamy:

$$(\mu * \mu) * \tau = \mu * (\mu * \tau) = \mu * I = e.$$

**Tożsamość 7:** $\sigma = (\varphi * \tau)$.
Na podstawie wcześniej stwierdzonych multiplikatywności mamy, że dla dowolnego $p \in \mathbb{P}$:

$$(\varphi * \tau)(p^k) = \sum_{d|p^k} \varphi(d)\tau\left(\frac{p^k}{d}\right) = \varphi(1)\tau(p^k) + \varphi(p)\tau(p^{k-1}) + \ldots + \varphi(p^k)\tau(1) =$$

$$1 \cdot (k+1) + (p-1)k + \ldots + (p^k - p^{k-1}) \cdot 1 =$$
$$k + 1 - k + kp - (k-1)p + (k-1)p^2 - \ldots - p^{k-1} + p^k =$$
$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{k-1} + p^k = \sigma(p^k).$$

**Tożsamość 8:** $(\mu * \sigma) = T$.
Ponownie stwierdzamy multiplikatywność funkcji oraz złożeń i dla dowolnej liczby pierwszej $p$ zachodzi:

$$(\mu * \sigma)(p^k) = \mu(1)\sigma(p^k) + \mu(p)\sigma(p^{k-1}) = \sigma(p^k) - \sigma(p^{k-1}) = p^k = T(p^k),$$

ponieważ pozostałe składniki zerują się (kolejne argumenty funkcji $\mu$ są podzielne przez $p^2$).

**Tożsamość 9:** $(\sigma * I) = (\tau * T)$.
Udowodniliśmy wcześniej, że wszystkie funkcje będące składnikami złożeń są multiplikatywne. Stąd dla dowolnego $p \in \mathbb{P}$:

$$(\sigma * I) = \sum_{d_1 d_2 = n} \sigma(d_1)I(d_2) = \sum_{d|p^k} \sigma(d) = \sigma(1) + \sigma(p) + \ldots + \sigma(p^k) =$$

$$\underbrace{(1) + (1+p) + \ldots + (1 + p + \ldots + p^k)}_{k+1} = k + 1 + kp + (k-1)p^2 + \ldots + p^k.$$

Natomiast prawą stronę równości możemy rozpisać jako:

$$(\tau * T) = \sum_{d|p^k} \tau(d)T\left(\frac{p^k}{d}\right) = \tau(1)T(p^k) + \tau(p)T(p^{k-1}) + \ldots + \tau(p^k)T(1) =$$

$$p^k + 2p^{k-1} + \ldots + kp + k + 1 = (\sigma * I).$$

**Tożsamość 10:** $(\sigma * T) = (T\tau * I)$.
Wyrażenie $T\tau(x)$ oznacza $T(x) \cdot \tau(x)$. Oczywiście funkcja $T\tau$ jest multiplikatywna, gdyż dla dowolnych względnie pierwszych liczb $a$, $b$ zachodzi:

$$T\tau(ab) = T(ab)\tau(ab) = T(a)T(b)\tau(a)\tau(b) =$$

$$T(a)\tau(a) \cdot T(b)\tau(b) = T\tau(a)T\tau(b).$$

Skoro wszystkie funkcje i ich złożenia są multiplikatywne, to dla dowolnej liczby pierwszej $p$ mamy:

$$(\sigma * T)(p^k) = \sum_{d|p^k} \sigma(d) T\left(\frac{p^k}{d}\right) =$$

$$\sigma(1)T(p^k) + \sigma(p)T(p^{k-1}) + \ldots + \sigma(p^k)T(1) =$$

$$\underbrace{(p^k) + (p^k + p^{k-1}) + \ldots + (p^k + p^{k-1} + \ldots + 1)}_{k+1} =$$

$$(k+1)p^k + kp^{k-1} + \ldots + 2p + 1.$$

Drugą stronę równania rozpisujemy następująco:

$$(T\tau * I) = \sum_{d|p^k} T\tau(d) I\left(\frac{p^k}{d}\right) = \sum_{d|p^k} T\tau(d) =$$

$$T(1)\tau(1) + T(p)\tau(p) + \ldots + T(p^k)\tau(p^k) =$$

$$1 + 2p + \ldots + p^k(k+1) = (\sigma * T).$$

Tym samym zakończyliśmy dowodzenie zależności spolotowych funkcji arytmetycznych. Na koniec wykażemy jeszcze jedną, bardzo ciekawą własność zachodzącą dla dowolnej funkcji arytmetycznej $f$ oraz pokażemy, w jaki sposób prezentuje się ona dla funckji: $\sigma$ i $\tau$ wraz ze szkicami dowodów.

**Twierdzenie** *Dla dowolnej funkcji arytmetycznej $f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{C}$ oraz liczby naturalnej $n$ zachodzi:*

$$\sum_{i=1}^{n} (f * I)(i) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor f(i).$$

**Dowód**
Zauważmy, że dla dowolnych liczb naturalnych $k$, $n$ zachodzi:

$$k|n \implies \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor = 1;$$

$$k \nmid n \implies \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor = 0.$$

Przyjmijmy, że:

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor f(i),$$

$$G(n) = (f * I)(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Wówczas zachodzą następujące związki:

$$F(n) - F(n-1) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor f(i) - \sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{n-1}{i} \right\rfloor f(i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor f(i) - \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n-1}{i} \right\rfloor f(i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{i} \right\rfloor \right) f(i) = \sum_{d|n} f(d) = G(n).$$

Stąd mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} (f * I)(i) = \sum_{i=1}^{n} G(i) =$$

$$F(1) + (F(2) - F(1)) + (F(3) - F(2)) + \ldots + (F(n) - F(n-1)) =$$

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor f(i).$$

□

Niech zatem funkcją arytmetyczną $f$ będzie funkcja $\sigma$. Skorzystamy z udowodnionej wcześniej zależności: $(T * I) = \sigma$. Mamy wówczas:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} (T * I)(i) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor T(i) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \cdot i.$$

Niech teraz $f = \tau$. Wykorzystamy udowodnioną tożsamość: $\tau = (I * I)$. Wtedy:

$$\sum_{i=1}^{n} \tau(i) = \sum_{i=1}^{n} (I * I)(i) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor I(i) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

UWAGA! Korzystając z udowodnionych splotów oraz poprzedniego twierdzenia możemy bardzo łatwo wykazać, że:

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \mu(i) = 1;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \varphi(i) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

# Problemy ogólne

W tym rozdziale zajmiemy się kilkoma problemami teorioliczbowymi związanymi z przedstawionymi funkcjami arytmetycznymi. Pochodzą one oczywiście z olimpiad matematycznych z różnych zakątków świata, w tym także i z Polski. W każdym przypadku omówię szczegółowo schemat rozwiązania oraz tok rozumowania, który doprowadził mnie do rozwiązania omawianego problemu. Niektóre pomysły zgodne są z rozwiązaniami firmowymi, jednak znajdują się tu także rozwiązania nieszablonowe rzucające nowe światło na tenże problem.

**Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie $n$, mające dokładnie $\sqrt{n}$ dzielników dodatnich.**
Oczywistym jest, że liczba $n = 1$ jest rozwiązaniem. Przyjmijmy zatem $n > 1$. Oznaczmy jako $n_1$ liczbę $\sqrt{n}$. Z warunków zadania wiemy, że $n_1 \in \mathbb{Z}_+$, zatem liczba $n$ jest kwadratem liczby całkowitej $n_1$. Skorzystajmy z poprzedniej obserwacji: jeżeli liczba $n$ ma dzielnik $d_1 < n_1$, to posiada również dzielnik komplementarny $d_2 > n_1$ równy $\frac{n}{d_1}$. Dzielniki te możemy zatem połączyć w takie pary, a ponadto $n_1|n$. Wynika stąd, że liczba dzielników liczby $n$ jest nieparzysta (pary dzielników komplementarnych oraz liczba $n_1$, która dzielnika komplementarnego nie ma). Skoro tak, to $n_1 \equiv 1 \pmod 2$, a więc również $n_1^2 = n \equiv 1 \pmod 2$.
Szukamy zatem takich liczb $n = n_1^2$, dla których liczba dzielników mniejszych od $n_1$ jest równa $\frac{n_1-1}{2}$. Zauważmy, że w zbiorze: $\{1, 2, \ldots, n_1 - 1\}$ jest dokładnie $\frac{n_1-1}{2}$ liczb parzystych oraz dokładnie tyle samo liczb nieparzystych (bo $n_1$ jest liczbą nieparzystą). Oczywiście żadna liczba parzysta nie jest dzielnikiem liczby $n$, ponieważ jest ona nieparzysta. Wynika stąd, że każda liczba nieparzysta mniejsza od $n_1$ musi dzielić $n$. W szczególności zatem $n_1 - 2|n_1^2$. Skoro jednak $n_1^2 = (n_1 - 2)(n_1 + 2) + 4$, to liczba $n_1 - 2$ musi być nieparzystym dzielnikiem liczby 4. Stąd otrzymujemy, że $n_1 - 2 = 1$, czyli $n_1 = 3$. Oczywiście liczba $n = 3^2 = 9$ spełnia warunki zadania.

**Dana jest liczba całkowita $n$ posiadająca 16 dzielników: $d_1 = 1 < d_2 < \ldots < d_{16} = n$. Wyznaczyć wszystkie takie liczby $n$, jeżeli $d_6 = 18$ oraz $d_9 - d_8 = 17$.**
Przeanalizujmy kolejno dane założenia. Skoro $18|n$, to oczywiście $2|n$ oraz $9|n$, co implikuje $3|n$ i $6|n$. Dostajemy zatem: $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 6$, $d_5 = 9$ oraz $d_6 = 18$. Możemy zatem zapisać, że $n = 2 \cdot 3^2 \cdot k$ dla pewnej liczby całkowitej $k$. Zauważmy, że w tym iloczynie trójka musi występować

w nieparzystej potędze. Gdyby tak nie było, to znaczy gdyby trójka występowała w wykładniku $2l$, to $(2l+1)|\tau(n) = 16$, co daje oczywiście sprzeczność. Ponadto wykładnik trójki nie jest równy 5, gdyż wtedy $6|\tau(n) = 16$. Gdyby natomiast trójka występowała w wykładniku 7, to $n = 2 \cdot 3^7$. Wówczas jednak niemożliwy jest warunek: $d_9 = d_8 + 17$. Oczywiście w wyższych wykładnikach trójka występować nie może, ponieważ dawałaby zbyt dużą liczbę $\tau(n)$. Wynika stąd, że $n = 2 \cdot 3^3 \cdot p$, gdzie: $p$ jest pewną liczbą pierwszą występującą w pierwszej potędze. Wówczas $\tau(n) = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$. Wynika stąd, że: $3^3 = 27|n$ oraz $3^3 \cdot 2 = 54|n$. Udowodnimy teraz, że liczba pierwsza $p$ nie należy do zbioru $\{19, 20, \dots, 26\}$. Rozpatrzmy następujące przypadki:

1. Niech $p = 19$. Wówczas: $d_7 = 19$, $d_8 = 27$, $d_9 = 38$ i otrzymujemy sprzeczność z $d_9 = d_8 + 17$.

2. Niech $p = 23$. Wówczas: $d_7 = 23$, $d_8 = 27$, $d_9 = 46$ i znów sprzeczność jak wyżej.

Wynika stąd, że $d_7 = 27$ i zachodzi jeden z dwóch warunków:

1. Jeżeli $d_8 = p$ oraz $d_9 = 54$, to $p = 37$.

2. Jeżeli $d_8 = 54$ oraz $d_9 = p$, to $p = 71$.

Nie może zajść oczywiście przypadek: $d_8 = p$ oraz $d_9 = 2p$, gdyż $p > 27$, skąd $2p > 54$. Otrzymujemy zatem, że rozwiązaniami są: $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ oraz $n = 2 \cdot 3^3 \cdot 71$.

Podczas pracy nad zagadnieniami związanymi z funckją $\tau$ postawiłem sobie następujący problem: **Niech $k$ będzie pewną liczbą naturalną dodatnią. Która z liczb należących do zbioru: $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ posiada najwięcej dzielników całkowitych dodatnich?**
W tej części pracy zaprezentuję algorytm, za pomocą którego można znaleźć rozwiąnie tego problemu dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $k$. Pomysł opiera się przede wszystkim na prostym, ale efektywnym oszacowaniu oraz optymalizacji wartości. Niech $p_1, p_2, \dots, p_l, p_{l+1}$ będą kolejnymi najmniejszymi liczbami pierwszymi (to znaczy $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ i tak dalej), które spełniają jednocześnie poniższe warunki:

$$p_1 p_2 \dots p_l \leq k,$$

$$p_1 p_2 \dots p_l p_{l+1} > k.$$

Skoro spełniony jest taki warunek, to wiemy, że dowolna liczba mniejsza lub równa $k$ w rozkładzie kanonicznym ma co najwyżej $l$ różnych liczb pierwszych, ponieważ iloczyn $l+1$ najmniejszych liczb pierwszych jest większy od maksymalnej wartości tego zbioru. Oznaczmy szukaną liczbę posiadającą najwięcej dzielników przez $t$. Zauważmy, ze liczba $t$ w rozkładzie kanonicznym nie posiada liczby pierwszej $q$ większej od $p_l$. Jest to oczywiście nieopłacalne, gdyż z pewnością liczbę tą będziemy mogli zastąpić przez taką potęgę liczby $p_i$, która jest mniejsza od $q$, zaś iloczyn wykładników powiększonych o 1 (czyli wartość $\tau(n)$) na pewno wzrośnie. Wystarczy zatem sprawdzić przypadki, gdy liczba $n$ w rozkładzie ma odpowiednio jeden, dwa, trzy (i tak dalej...) dzielniki pierwsze. Oczywiście znów możemy odnotować proste obserwacje:

1. Jeżeli liczba $n$ ma jeden dzielnik pierwszy, to największy wykładnik otrzymamy dla liczby $p_1$, ponieważ jest najmniejsza wśród wszystkich liczb pierwszych, więc możemy ją "domnażać" największą ilość razy.

2. Jeżeli liczba $n$ ma dwa dzielniki pierwsze, to optymalnym rozwiązaniem jest wziąć iloczyn $p_1p_2$ (dwóch najmniejszych liczb pierwszych), a następnie przemnożyć go przez takie potęgi liczb $p_1, p_2$, aby wartość końcowa $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ była największa możliwa i jednocześnie mniejsza lub równa $k$.

3. Dla dowolnych $i \leq l$ dzielników pierwszych liczby $l$ postępujemy w ten sam sposób: iloczyn $p_1p_2 \dots p_i$ mnożymy przez takie potęgi liczb $p_1, p_2, \dots, p_i$, aby iloczyn $p_1^{\alpha_1} \dots p_i^{\alpha_i}$ był największy możliwy, podobnie jak iloczyn $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_i + 1)$. Wystarczy rozważyć odpowiednie przypadki.

Na koniec pozostaje już tylko wyznaczenie takiej liczby $n$, która w opisanych przypadkach osiągnęła największą wartość $\tau(n)$.

Okazało się również, że moje rozumowanie mogę efektywnie wykorzystać do rozwiązywania pewnej klasy zadań, które powszechnie uznawane są za trudne, gdyż pojawiają się na międzynarodowych olimpiadach matematycznych. Spójrzmy na dwa przykłady:

**Która spośród liczb:** $1, 2, \dots, 1983$ **ma największą liczbę dzielników całkowitych dodatnich?** (IMO 1983 Longlisted Problems)
Niech $n$ będzie szukaną liczbą posiadającą najwięcej dzielników. Wzorując się na przedstawionych przeze mnie obserwacjach pozostaje rozpatrzyć następujące przypadki:

1. Liczba $n$ ma w rozkładzie jedną liczbę pierwszą. Zgodnie z tym, co pokazaliśmy wcześniej, liczbą tą jest $2^{10} = 1024$, dla której $\tau(n) = 11$.

2. Liczba $n$ ma w rozkładzie dwie liczby pierwsze. Zatem największą liczbę dzielników otrzymamy wtedy, gdy liczbę $2 \cdot 3$ pomnożymy przez przez $2^5 \cdot 3^2$. Otrzymamy wówczas liczbę $2^6 \cdot 3^3$, która ma dokładnie $7 \cdot 4 = 28$ dzielników. Rozważanie pozostałych przypadków omijam i pozostawiam jako ewentualne ćwiczenie dla Czytelnika.

3. Liczba $n$ ma w rozkładzie trzy liczby pierwsze. Wynika stąd, że optymalną strategią jest pomnożenie liczby $2 \cdot 3 \cdot 5$ przez $2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Wówczas liczba $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ ma $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ dzielników.

4. Liczba $n$ ma w rozkładzie cztery liczby pierwsze. Postępując jak wcześniej otrzymujemy, że liczbę $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ możemy pomnożyć przez $2^3$ i otrzymamy największą możliwą w tym przypadku liczbę dzielników. Stąd liczba $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ma 40 dzielników. Jest to szukana wartość maksymalna.

**Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba nieparzysta mająca tyle samo dzielników co liczba 360?** (Baltic Way 2001)
Powyższe zadanie rozwiążemy przez analogię do poprzedniego. Zauważmy najpierw, że: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Wynika stąd następująca własność: $\tau(360) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Bardzo łatwo również sprawdzić, że: $24 = 3 \cdot 2^3$. Wynika stąd, że poszukiwana liczba będzie iloczynem czterech najmniejszych liczb pierwszych nieparzystych o wykładnikach: $2, 1, 1, 1$. Na tej podstawie wnioskujemy, że szukaną liczbą jest: $3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Przejdźmy do zadań związanych z funkcją $\sigma$. Pierwsze z nich pochodzi z białoruskiej olimpiady matematycznej. Przedstawię dwa sposoby rozwiązania. Pierwszy z nich, firmowy, uczy zastosoawnia ważnych twierdzeń algebraicznych oraz teorioliczbowych. Dowód ten wymaga jednak sporej wiedzy, którą prawdopodobnie posiada większość olimpijczyków w wieku licealnym. Dla osób, które nie znają tak dużej bazy twierdzeń zaproponuję moje autorskie rozwiązanie. Jego dodatkową zaletą jest to, że dowodzi lepszego ograniczenia! Treść problemu jest następująca:

**Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność: $\sum_{i=1}^{\tau(n)} d_i < n\sqrt{2\tau(n)}$.**

Rozwiązanie firmowe. Z nierówności Cauchy'ego między średnimi (kwadratową i arytmetyczną, lub inaczej - z nierówności między średnimi potęgowymi rzędu 1 i 2) otrzymujemy:

$$\frac{\sum_{i=1}^{\tau(n)} d_i}{\tau(n)} = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\tau(n)} d_i^2}{\tau(n)}},$$

$$\sigma(n) \leq \sqrt{\tau(n) \cdot \sum_{i=1}^{\tau(n)} d_i^2}.$$

Z drugiej strony mamy również:

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{\tau(n)} d_i^2\right) = \sum_{i=1}^{\tau(n)} \frac{1}{d_i^2},$$

ponieważ dla dowolnego $d_i^2$: $n^2 = d_i^2 d_j^2$, gdzie: $d_j$ jest dzielnikiem komplementarnym do $d_i$. Skoro sumowanie po lewej stronie odbywa się po wszystkich dzielnikach, to po prawej stronie otrzymujemy odwrotności wszystkich dzielników komplementarnych do nich. Wiemy, że takie przyporządkowanie jest jednoznaczne, więc po prawej stronie znajdują się odwrotności wszystkich dzielników liczby $n$. Dalej dokonujemy prostego szacowania:

$$\sum_{i=1}^{\tau(n)} \frac{1}{d_i^2} \leq \sum_{j=1}^{\tau(n)} \frac{1}{j^2} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Zatem otrzymujemy zależność:

$$\sum_{i=1}^{\tau(n)} d_i^2 < \frac{\pi^2}{6} n^2.$$

Wstawiając ją do nierówności otrzymanej na początku mamy:

$$\sigma(n) \leq \sqrt{\tau(n) \cdot \sum_{i=1}^{\tau(n)} d_i^2} < \sqrt{\tau(n) \cdot \frac{\pi^2}{6}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} n\sqrt{\tau(n)} < n\sqrt{2\tau(n)}.$$

Moje rozwiązanie opiera się na dwóch nierównościach. Spróbujmy zapisać w inny sposób obie strony nierówności. Oczywiście naturalnym skojarzeniem jest rozkład kanoniczny liczby $n$. Jeśli $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, to oczywiście:

$$\sigma(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{\alpha_k}),$$

ponieważ po rozwinięciu nawiasów otrzymamy sumę liczb będących iloczynami liczb pierwszych dzielących $n$ we wszystkich potęgach mniejszych lub równych $\alpha_i$. Liczbę $\sqrt{\tau(n)}$ możemy przedstawić jako: $\sqrt{(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_k+1)}$, ponadto prawa strona jest przemnożona przez stałą równą $\sqrt{2}$. Mając tak rozpisaną nierówność od razu nasuwa się hipoteza, że dla dowolnego $p \in \mathbb{P}$, $p \geq 3$:

$$\sum_{i=0}^{\alpha} p^i < p^\alpha \sqrt{\alpha+1},$$

zaś dla $p = 2$:

$$\sum_{i=0}^{\beta} 2^i < 2^\beta \sqrt{2(\beta+1)}.$$

Jeżeli nierówności te będą prawdziwe, to po przemnożeniu ich dla wszystkich $p_1, p_2, \ldots, p_k$ otrzymamy tezę zadania. **Udało mi się wykazać ograniczenie mocniejsze. Wystarczy, że w drugiej nierówności stałą** 2 **zamienimy na $\frac{9}{8}$. Ograniczenie to jest również mocniejsze, niż $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ i otrzymujemy nierówność słabą (najbardziej efektywne ograniczenie)!**. Obie nierówności w bardzo prosty sposób dowodzimy przez indukcję po wartości wykładnika. Poniżej przedstawiam szkice dowodów:

Weźmy nierówność dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej $p$. Jeśli $\alpha = 1$, to:

$$1 + p < p\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{3} < \frac{4}{10} < \sqrt{2} - 1.$$

Załóżmy, że dla pewnego $\alpha$ teza jest prawdziwa. Wówczas:

$$\sum_{i=0}^{\alpha+1} p^i = \sum_{i=0}^{\alpha} p^i + p^{\alpha+1} < p^\alpha\sqrt{\alpha+1} + p^{\alpha+1} = p^{\alpha+1}\left(\frac{\sqrt{\alpha+1}}{p} + 1\right).$$

Zakładamy hipotetycznie, że:

$$p^{\alpha+1}\left(\frac{\sqrt{\alpha+1}}{p} + 1\right) < p^{\alpha+1}\sqrt{\alpha+2}.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejno:

$$\frac{\sqrt{\alpha+1}}{p} + 1 < \sqrt{\alpha+2},$$

$$\sqrt{\alpha+1} < p(\sqrt{\alpha+2} - 1),$$

$$\frac{\sqrt{\alpha+1}}{\sqrt{\alpha+2} - 1} < p.$$

Ostatnia równość jest oczywiście prawdziwa, gdyż: $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-1} < 3$ już dla $k \geq 1$.

Nierówność dla liczby $p = 2$ dowodzimy dokładnie w ten sam sposób, co powyżej. Otrzymujemy zależność:

$$\frac{\sqrt{\frac{9}{8}(\alpha+1)}}{\sqrt{\frac{9}{8}(\alpha+2)}-1} < 2,$$

która jest prawdziwa już dla $\alpha = 1$ (obydwa powyższe wnioski wyciągamy chociażby z badania przebiegu zmienności funkcji, którego nie zawarłem w tej pracy), co kończy dowód. Równość zachodzi wyłącznie dla $\alpha = 2$.

Ostatni problem pochodzi z Olimpiady Matematycznej z Sankt Petersburga. Na pierwszy rzut oka wydaje się on trudny do rozwiązania, jednak dowód jest bardzo przyjemny i prosty. **Niech $m$, $n$, $k$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi, a dodatkowo $n > 1$. Wykazać, że:**

$$\sigma^k(n) \neq n^m.$$

Niech $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_i^{\alpha_i}$. Załóżmy przeciwnie, że $\sigma^k(n) = n^m$. Skoro zachodzi równość, to liczba $\sigma(n)$ musi mieć w rozkładzie te same czynniki pierwsze, co liczba $n$. Oczywiście $\sigma(n) > n$, ponieważ liczby: 1 oraz $n$ są dzielnikami $n$. Powyższe dwie informacje oznaczają, że:

$$\sigma(n) = p_1^{\beta_1} \dots p_i^{\beta_i},$$

gdzie: $\beta_j > \alpha_j \implies \beta_j \geq \alpha_j + 1$ dla dowolnego $j = 1, 2, \dots, i$. Na tej podstawie wnioskujemy, że:

$$\sigma(n) \geq p_1^{\alpha_1+1} \dots p_i^{\alpha_i+1} > (1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \dots (1 + p_i + \dots + p_i^{\alpha_i}) =$$

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \dots \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1} = \sigma(n),$$

co oznacza sprzeczność, gdyż nie może zajść nierówność: $\sigma(n) > \sigma(n)$. Z własności dowodu nie wprost - teza prawdziwa.

# Nierówności

Poniżej przedstawiam kilka problemów związanych z nierównościami zawierającymi funkcje $\sigma$ oraz $\tau$. Niektóre z nich pochodzą również z olimpiad matematycznych z całego świata. Zachęcam do zapoznania się z nimi oraz z ich dowodami, ponieważ zawierają one wiele interesujących faktów teorioliczbowych często wykorzystywanych do rozwiązywania zadań związanych z dzielnikami liczb całkowitych.

**Jednym z problemów, nad którymi pochyliłem się podczas tworzenia pracy było efektywne ograniczenie wartości funkcji $\tau(n)$ dla dowolnej liczby naturalnej $n$. Bardzo łatwo jest domyślić się ograniczeń: $\tau(n) \leq \frac{3}{4}n$ oraz $\tau(n) < 2\sqrt{n}$. Udało mi się jednak wskazać ograniczenie mocniejsze: $\tau(n) \leq \sqrt{3n}$.**

Wykażemy najpierw pierwsze, intuicyjne ograniczenie. Oczywistym jest fakt, że wszystkie dzielniki liczby $n$ mniejsze od niej samej są mniejsze lub równe $\frac{n}{2}$, co wynika z definicji dzielników komplementarnych. Przyjmijmy, że wszystkie liczby całkowite z przedziału $[1; \frac{n}{2}]$ dzielą $n$. Wówczas:

$$\tau(n) \leq \frac{n}{2} + 1.$$

Jeśli $n = 3$, to $\tau(n) = 2 \leq \frac{3}{4} \cdot 3$. Jeżeli zaś $n > 3$, to:

$$\tau(n) \leq 1 + \frac{n}{2} \leq \frac{3n}{4}.$$

Spójrzmy na drugie ograniczenie. Jak wskazaliśmy wcześniej - jeżeli liczba $n$ posiada dzielnik $d$ mniejszy od $\sqrt{n}$, to posiada również dzielnik komplementarny $\frac{n}{d}$ większy od $\sqrt{n}$. Przyjmijmy więc, że wszystkie liczby mniejsze lub równe $\sqrt{n}$ dzielą liczbę $n$. Wówczas mamy $\sqrt{n}$ dzielników mniejszych lub równych $\sqrt{n}$, a zatem także $\sqrt{n} - 1$ dzielników komplementarnych. Jak wiemy z poprzednich rozważań, są to wszystkie dzielniki liczby $n$. Wynika stąd, że:

$$\tau(n) \leq \sqrt{n} + \sqrt{n} - 1 < 2\sqrt{n}.$$

Przyjrzymjmy się zatem trzeciej, ostatniej nierówności. Załóżmy, że liczba $n$ posiada dzielnik pierwszy $p$ będący liczbą nieparzystą i występujący w rozkładzie kanonicznym liczby $n$ w potędze $\alpha \geq 2$. Z nierówności Bernoulliego mamy:

$$p^{\frac{\alpha}{2}} = (1 + p - 1)^{\frac{\alpha}{2}} \geq 1 + \frac{\alpha}{2}(p - 1) \geq 1 + \alpha,$$

ponieważ $p-1 \geq 2$. Zauważmy, że dla $\alpha = 1$ i liczby pierwszej $p \geq 5$ mamy:

$$\sqrt{p} \geq \alpha + 1 = 2.$$

Niech również liczba 2 występuje w rozkładzie kanonicznym $n$ w potędze $a \geq 4$. Wówczas prawdziwa jest nierówność:

$$2^a \geq a^2.$$

Mamy stąd:

$$2^{a+1} + 2^a \geq (a+1)^2 + a^2 \geq (a+1)^2,$$
$$\sqrt{2^a(2+1)} \geq a+1,$$
$$\sqrt{3 \cdot 2^a} \geq 1 + a.$$

Mnożąc zatem stronami powyższą nierówność z nierównością: $\sqrt{p^\alpha} \geq 1 + \alpha$ dla wszystkich liczb pierwszych nieparzystych $p_1, p_2, \ldots, p_k$ występujących w potęgach odpowiednio: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ i dzielących $n$ otrzymujemy:

$$\sqrt{3 \cdot 2^a \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}} \geq (1+a)(1+\alpha_1)\ldots(1+\alpha_k) = \tau(2^a p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}) = \tau(n).$$

Pozostaje zatem sprawdzić przypadki, kiedy $n$ w rozkładzie kanonicznym ma dwójkę w potędze trzeciej, drugiej, pierwszej oraz zerowej, a także gdy liczba $n$ jest potęgą dwójki.
Pierwsze cztery przypadki otrzymujemy rozważając kolejno zadane nierówności:

$$\sqrt{3 \cdot 2^3} = \sqrt{24} \geq 1 + 3 = 4 = \sqrt{16},$$
$$\sqrt{3 \cdot 2^2} = \sqrt{12} \geq 1 + 2 = 3 = \sqrt{9},$$
$$\sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6} \geq 1 + 1 = 2 = \sqrt{4},$$
$$\sqrt{3} \geq 1.$$

Otrzymujemy zatem, że w każdym z przypadków:

$$\sqrt{3 \cdot 2^a} \geq 1 + a.$$

Zatem mnożąc przez potęgi pozostałych liczb pierwszych jak wyżej otrzymujemy tezę.

Rozpatrzmy zatem przypadek, gdy $n = 2^q$. Wykazaliśmy powyżej, że dla dowolnej liczby całkowitej $q \geq 0$ zachodzi:

$$\sqrt{3 \cdot 2^q} \geq 1 + q = \tau(2^q),$$

co dowodzi poprawności tego przypadku i kończy dowód.

Pozostańmy jeszcze przez chwilę przy potęgach dwójki. Istnieje bardzo prosta, ale jednocześnie ciekawa zależność, której dowód podpowiada uogólnienie prowadzące do ważnego twierdzenia teorioliczbowego. Przyjrzyjmy się jej bliżej. Wykażemy, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$: $\tau(2^n - 1) \geq \tau(n)$.

Załóżmy, że liczba całkowita dodatnia $d$ dzieli $n$. Wykażemy, że: $2^d - 1 | 2^n - 1$. Skoro $d|n$, to istnieje taka liczba $k \in \mathbb{Z}_+$, że: $n = kd$. Wykorzystując wzór skróconego mnożenia $(a^n - b^n)$ dostajemy:

$$2^n - 1 = 2^{kd} - 1 = \left(2^d\right)^k - 1^k = \left[2^d - 1\right]\left[\sum_{i=0}^{k-1} 2^{di}\right].$$

Widzimy zatem, że w rozkładzie liczby $2^n - 1$ występuje liczba $2^d - 1$, co kończy dowód podzielności. Zatem, jeżeli liczba $n$ ma dzielniki: $d_1, d_2, \ldots, d_l$, to liczba $2^n - 1$ ma dzielniki: $2^{d_1} - 1, 2^{d_2} - 1, \ldots, 2^{d_l} - 1$. Oczywiście nie muszą być to wszystkie dzielniki liczby $2^n - 1$, stąd uzyskujemy wskazaną nierówność.

**Jak wspomniałem wcześniej, udało mi się wykazać wniosek ogólniejszy.** Niech $x, a, b$ będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że $a|b$. Wykażemy, że $x^a - 1 | x^b - 1$. Postępujemy dokładnie w taki sam sposób, jak powyżej. Skoro $a|b$, to istnieje taka liczba całkowita dodatnia $k$, że $b = ka$. Następnie ze wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy:

$$x^b - 1 = [x^a - 1]\left[\sum_{i=0}^{k-1} x^{ai}\right].$$

Stąd: $x^a - 1$ dzieli $x^b - 1$, co kończy dowód.

Zauważmy, że powyższe uogólnienie pozwala nam stwierdzić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $x \geq 2$ zachodzi:

$$\tau(x^n - 1) \geq \tau(n).$$

Dowód przebiega oczywiście w sposób analogiczny, jak dla przykładu $x = 2$. Bierzemy kolejno wszystkie dzielniki $d$ liczby $n$ i stwierdzamy na mocy przytoczonego powyżej lematu, że $x^d - 1 | x^n - 1$.

Tematy związane z potęgami liczby 2 zakończymy zadaniem z Bałtyckiej Olimpiady Matematycznej (Baltic Way). Dane są liczby całkowite: $a > 1$ oraz $n > 0$ takie, że $a^n + 1$ jest liczbą pierwszą. Wykazać, że: $\tau(a^n - 1) \geq n$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy liczba $n$ w rozkładzie kanonicznym posiada liczbę pierwszą nieparzystą $p$. Niech wówczas $n = kp$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej $k$. Mamy wówczas:

$$a^n + 1 = a^{kp} + 1 = (a^k + 1)(a^{k(p-1)} - a^{k(p-2)} + \ldots - a + 1),$$

co prowadzi do sprzeczności, gdyż: $a^k + 1 | a^n + 1$. Wynika stąd, że $n$ jest postaci $2^q$. Za pomocą indukcji po wartości $q$ bardzo łatwo dowodzimy zadanej nierówności.
Jeśli $q = 0$, to $\tau(a - 1) \geq 1$, co jest oczywiście prawdą. Zauważmy bardzo prostą zależność wynikającą ze wzoru skróconego mnożenia:

$$a^{2^q} - 1 = \left(a^{2^{q-1}} - 1\right)\left(a^{2^{q-1}} + 1\right).$$

Z założenia indukcyjnego oraz powyższego warunku otrzymujemy, że każdy dzielnik $d$ liczby $a^{2^{q-1}} - 1$ dzieli liczbę $a^{2^q} - 1$, zaś takich dzielników jest co najmniej $2^{q-1}$. Ponadto z otrzymanej zależności mamy również, że każdy wspomniany dzielnik $d$ pomnożony przez $a^{2^{q-1}} + 1$ dzieli liczbę $a^{2^q} - 1$. Oczywiście: $d \cdot a^{2^{q-1}} + 1 > a^{2^{q-1}} - 1$, więc wszystkie te dzielniki z założenia są różne i wraz ze wzrostem wartości liczby $q$ o jeden, liczba tychże dzielników wzrasta co najmniej dwukrotnie, więc jest ich co najmniej: $2 \cdot 2^{q-1} = 2^q$, co było do udowodnienia.

Zajmijmy się teraz ograniczeniami wartości funkcji $\sigma(n)$ przez wartość $n$. Pierwszym z nich będzie dość intuicyjne, proste w dowodzie ograniczenie dolne. Otóż, dla dowolnej liczby naturalnej złożonej $n$ zachodzi:

$$\sigma(n) \geq n + \sqrt{n} + 1.$$

Wykażmy to twierdzenie. Jak pokazaliśmy wcześniej, skoro $n$ jest liczbą złożoną, to istnieją takie dwa dzielniki $d_1, d_2$, że: $n = d_1 d_2$. Spośród nich jeden jest większy lub równy $\sqrt{n}$, drugi jest mniejszy lub równy tej liczbie. Załóżmy bez straty ogólności, że: $d_1 \geq \sqrt{n}$. Dzielnikami liczby $n$ są oczywiście liczby: 1 oraz $n$, zatem prawdziwe jest szacowanie:

$$\sigma(n) \geq n + 1 + d_1 \geq n + 1 + \sqrt{n} > n + \sqrt{n}.$$

Jeśli liczba $n$ jest postaci $p^\alpha$, gdzie: $p$ jest liczbą pierwszą, to oczywiście:

$$\sigma(n) = 1 + p + p^2 + \ldots + p^\alpha.$$

Teraz postaramy się wyznaczyć ograniczenie górne wartości funkcji $\sigma$. Pierwsze z nich zachodzi dla dowolnej liczby naturalnej $n > 2$ i przedstawia się następująco:

$$\sigma(n) < n\sqrt{n}.$$

Jako *$n$-tą liczbę harmoniczną* zdefiniujmy następującą liczbę:

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Wykażemy najpierw, że dla dowolnej liczby harmonicznej większej lub równej $H_5$ zachodzi szacowanie:

$$H_n \leq \log_2(n).$$

Dowód przeprowadzimy w sposób indukcyjny. Dla $n = 5$ powyższa zależność jest prawdziwa. Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}, n > 5$ zachodzi dowodzona nierówność. Wówczas:

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} \leq \log_2(n) + \frac{1}{n+1}.$$

Należy pokazać, że:

$$\log_2(n) + \frac{1}{n+1} < \log_2(n+1).$$

Przekształcając równoważnie i korzystając z własności logarytmu:

$$\frac{1}{n+1} < \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right),$$

$$1 < (n+1)\log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$1 < \log_2\left(\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n+1}\right).$$

Oczywiście zachodzi również:

$$\left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n+1} > 2,$$

ponieważ ciąg ten jest malejący, a jego granicą jest liczba $e$. Ograniczenie jest zatem prawdziwe. Zauważmy zatem, że dla dzielników $d_1, d_2, \ldots, d_k$ liczby $n$ zachodzi:

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_k}{n} = \frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n} + \ldots + \frac{d_k}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}.$$

Zależność tą pokazaliśmy już wcześniej. Sumowanie odbywa się po wszystkich dzielnikach, zatem ułamek $\frac{d_i}{n}$ wyznacza nam jednoznacznie dzielnik komplementarny do $d_i$. Z każdego składnika otrzymujemy zatem odwrotność jednoznacznie wyznaczonego dzielnika komplementarnego, a skoro sumowanie odbywa się po wszystkich dzielnikach, to dostajemy sumę odwrotności wszystkich dzielników (gdyż dla każdego dzielnika istnieje dokładnie jeden do niego komplementarny i dwa różne dzielniki nie mają tego samego dzielnika komplementarnego). Szacując dalej:

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} \leq H_k \leq H_n \leq \log_2(n) < \sqrt{n}.$$

Ostanie szacowanie prawdziwe jest dla $n > 16$. Dla mniejszych wartości $n$ sprawdzamy ręcznie.

Zauważmy, że powyższe szacowanie jest dość "grube" dla odpowiednio dużych liczb. **Postawiłem sobie zatem pytanie - czy w powyższym dowodzie można dokonać optymalizacji? Udało mi się wskazać dużo mocniejsze ograniczenie, które zachodzi dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 7$. Wówczas:**

$$\sigma(n) < n \ln(n).$$

Przyjmując oznaczenia jak wcześniej mamy, że: $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\} = \{\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots, \frac{n}{d_k}\}$. Możemy zatem zapisać:

$$\sigma(n) = n\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k}\right) \leq n \cdot H_k,$$

ponieważ $\frac{1}{x} \to 0$ przy $x \to +\infty$, zatem szacujemy przez $k$ największych składników. Podobnie jak wyżej wykazujemy indukcyjnie, że dla dowolnej liczby $n \geq 2$ zachodzi:

$$H_n \leq 0,81 + \ln(n).$$

Dowód zachodzi analogicznie, jak powyżej. Zostawiam go jako proste ćwiczenie dla Czytelnika. Teraz, używając nierówności: $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$ dostajemy:

$$n \cdot H_k < n(0,81 + \ln(k)) \leq n(0,81 + \ln(2\sqrt{n})) =$$

$$n\left(0,81+\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(n)\right)<n\left(1,51+\frac{1}{2}\ln(n)\right).$$

Dla $n \geq 21$ mamy: $\ln(n) > 1,51+\frac{1}{2}\ln(n)$. Sprawdzając dla liczb mniejszych dostajemy w efekcie zależność: $n \geq 7$.

Wartości funkcji $\sigma$ możemy ograniczać również poprzez wartości innych funkcji teorioliczbowych. Nas szczególnie interesują związki z funkcją $\tau$. Wykazaliśmy już nierówność: $\sigma(n) < n\sqrt{2\tau(n)}$. Okazuje się, że związane jest z nią ściśle również ograniczenie dolne postaci:

$$\sigma(n) \geq \sqrt{n}\tau(n).$$

Analogicznie jak poprzednio użyjemy zależności: $\{d_1, d_2, \ldots, d_k\} = \{\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots, \frac{n}{d_k}\}$, gdzie: $\tau(n) = k$. Wówczas zachodzi zależność:

$$\sigma^2(n)=\left(\sum_{d|n}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{k}d_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{k}d_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{d_i}\right)=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}d_i\right)\left(n\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{d_i}\right)=n\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}d_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{d_i}\right)\geq n\cdot\left(\sum_{d|n}1\right)^2=n\tau^2(n).$$

Stąd uzyskujemy natychmiast:

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geq \sqrt{n}.$$

Zajmijmy się przez chwilę bardziej zaawansowanymi technikami teorioloczbowymi. Zastanowimy się, ile razy pewne interesujące nas składniki pojawiają się w specyficznych sumach. W tym celu udowodnimi nierówność zachodzącą dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma(i) \leq n^2.$$

Zauważmy, że $i$-ty składnik sumy po lewej stronie nierówności jest sumą wszystkich dzielników liczby $i$. Jeśli rozpiszemy wszystkie te składniki w sposób jawny, to otrzymamy, że każdy dzielnik $1 \leq d \leq n$ pojawia się w sumie dokładnie $\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor$ razy. Dzieje się tak wówczas, gdy pewna liczba $1 \leq i \leq n$ jest wielokrotnością $d$. Jak łatwo stwierdzić, takich wielokrotności jest dokładnie $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ (pewna liczba $d$ "mieści się" w $n$ co najwyżej $\frac{n}{d}$ razy, bo: $d \cdot \frac{n}{d} = n$). Zatem lewą stronę nierówności możemy zapisać jako:

$$\sum_{i=1}^{n} \left( i \cdot \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \left( i \cdot \frac{n}{i} \right) = \underbrace{n + n + \ldots + n}_{n} = n^2,$$

co pociąga za sobą tezę.

Ostatnia nierówność podsumowuje pokazane podczas dowodzenia poprzednich zależności techniki. Wykażemy, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n$ zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma(i)}{i} \leq 2n.$$

Jak wykazaliśmy wcześniej (przy okazji liczb harmonicznych $H_n$), dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $i$ zachodzi:

$$\frac{\sigma(i)}{i} = \sum_{d|i} \frac{1}{d}.$$

Oznacza to, że dowodzona nierówność przyjmuje postać:

$$\sum_{d|1} \frac{1}{d} + \sum_{d|2} \frac{1}{d} + \ldots + \sum_{d|n} \frac{1}{d} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} \frac{1}{d} \leq 2n.$$

Jak pokazaliśmy w poprzednim przykładzie, każda liczba $1 \leq d \leq n$ pojawia się w sumie dokładnie $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ razy. Wykorzystując ten fakt nierówność z tezy możemy zapisać jako:

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{1}{i} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \right) < 2n.$$

Zachodzi również oczywisty związek dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej $i$:

$$\frac{1}{i} \cdot \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor < \frac{1}{i} \cdot \frac{n}{i} = \frac{n}{i^2}.$$

Musimy więc pokazać, że:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i^2} < 2n.$$

Przekształcając równoważnie dostajemy:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2,$$

co kończy dowód.

**Algorithm 1** Obliczanie $\sigma(n)$

```
function DIVIDE(p, k)
    if p mod k = 0 then
        return true
    end if
    return false
end function


function MAIN( )
    n, sum
    for i = 1 → n do
        sum ← 0
        for j = 1 → j · j ≤ i do
            if DIVIDE(i, j) = true then
                sum ← sum + j
                if j · j ≠ i then
                    sum ← sum + i/j
                end if
            end if
        end for
        print(sum)
    end for
end function
```

**Algorithm 2** Obliczanie $\sigma(n)$

```
#include <cstdio>
#include <iostream>

using namespace std;

int n;
unsigned long long int sum;


bool divide(int p, int k)
{
   if(p % k == 0)
      return true;
   return false;
}


int main()
{
   scanf("%d", &n);
   for(int i=1; i <= n; i++)
   {
      sum = 0;
      for(int j=1; j*j <=i; j++)
      {
         if(divide(i, j) == true)
         {
            sum += j;
            if(j*j != i)
               sum += i/j;
         }
      }
      printf("%d: %lld\n", i, sum);
   }
   system("pause");
}
```