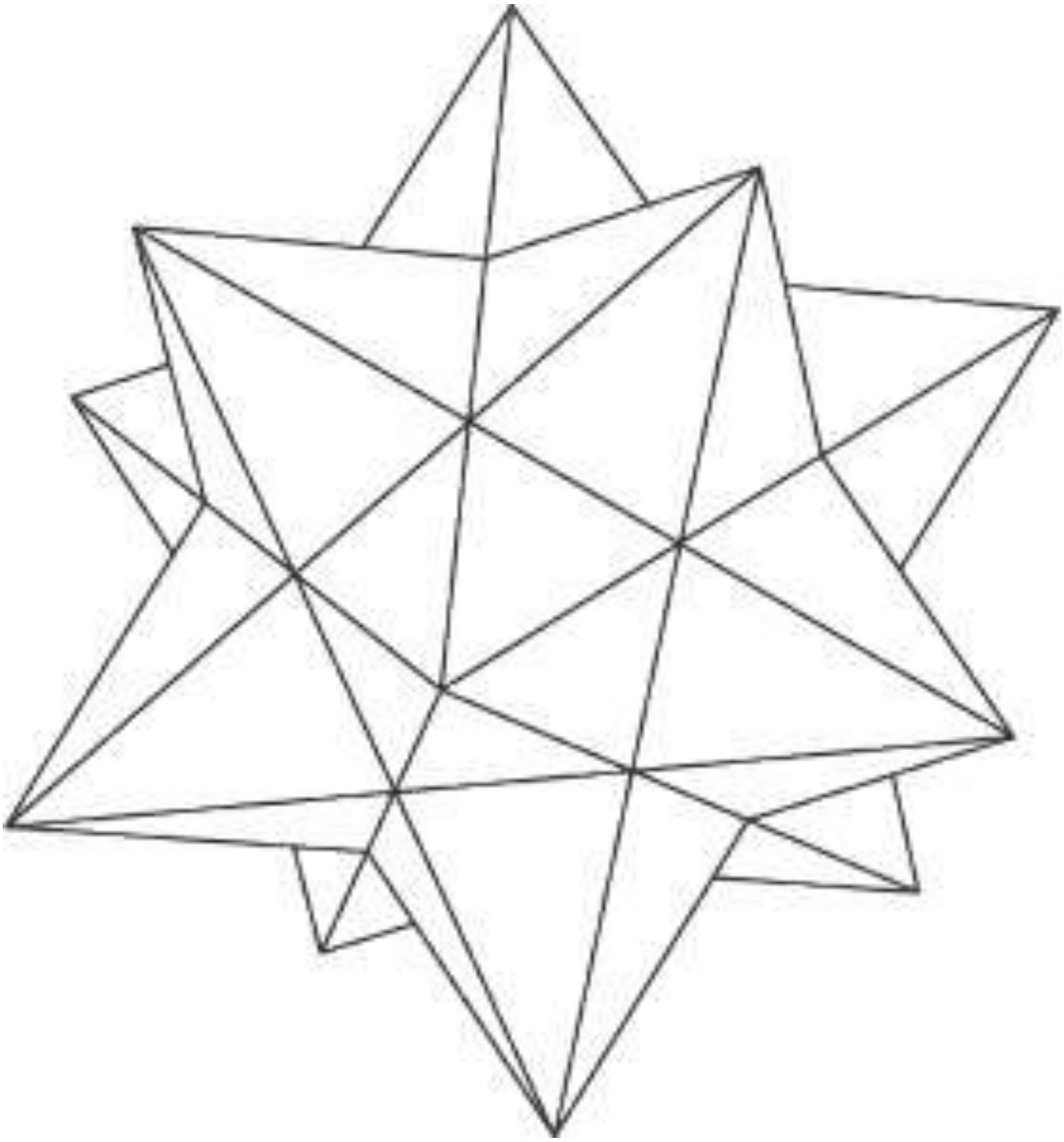
Gimnazjum nr 16 im. Króla Stefana Batorego w Krakowie
ul. Konarskiego 2, 30-049 Kraków
tel. 12 633 13 83 lub 12 633 02 47

Wielościany gwiaździste

Arkadiusz Biel

Julia Strumińska



Kraków 2013

Historia odkrywania wielościanów.

Wielościany foremne były znane już w antyku; od czasów Pitagorasa posiadano wiedzę na temat trzech pierwszych brył foremnych. Lecz to Platon jako pierwszy uszeregował je według liczb i kształtów w swoim dialogu *Timajos*. Nie wspomniał w nim jednak o dwunastościanie foremnym, który został odkryty przez jego ucznia Teaitetosa.

Wielościany gwiaździste były stopniowo odkrywane w późniejszych czasach. W wydanej w 1619 roku „Harmonii świata" Johannes Kepler nie tylko jako pierwszy w czasach nowożytnych opisał wszystkie istniejące wielościany archimedesowe, ale także po raz pierwszy rozważał wielościany gwiaździste. Odkrytym przez siebie wielościanom nadał nazwy, które na język polski można przetłumaczyć jako „jeż dwudziestościenny mniejszy" oraz „jeż dwudziestościenny większy". Niemal dwa wieki później - w roku 1810 - Louis Poinsot niezależnie odkrył te dwa wielościany ponownie, a także opisał dwa inne, nieznane dotychczas. Rok później 22-letni A.L. Cauchy wykazał, że nie istnieją inne niewypukłe wielościany foremne. Tak więc lista wielościanów foremnych zawiera 9 pozycji – 5 wypukłych i 4 niewypukłe. W połowie XIX wieku A. Cayley nadał wielościanom Keplera-Poinsota obowiązujące po dziś dzień nazwy – dwunastościan gwiaździsty mały, dwunastościan gwiaździsty wielki.

Kepler i Poinsot byli pierwszymi, którzy badali własności wielościanów nazwanych obecnie ich imieniem. Jednakże ilustracje przedstawiające niektóre z nich pojawiały się już dużo wcześniej. Dwunastościan gwiaździsty mały został przedstawiony na posadzce bazyliki św. Marka w Wenecji. Najprawdopodobniej pochodzi z początku XV wieku (ok. 1425) i do dziś można ją tam podziwiać. Przypuszczalnie autorem tej wspaniałej mozaiki jest jeden z najwybitniejszych przedstawicieli włoskiego quatrocenta - Paolo Uccello.

Wielościany gwiaździste podobnie do swoich dwuwymiarowych odpowiedników, czyli wielokątów gwiaździstych, są ciekawym przypadkiem wielościanów, gdyż posiadają różne kształty przy tej samej liczbie boków i kątów.

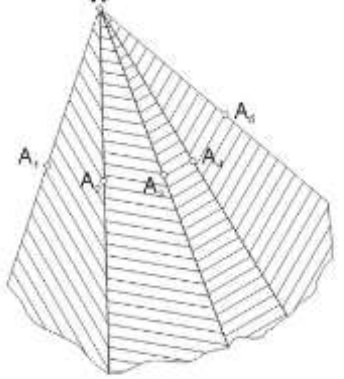
W refleksjach na ich temat będziemy nawiązywać do rodzajów i własności brył, dlatego na początek przytaczamy odpowiednie definicje.

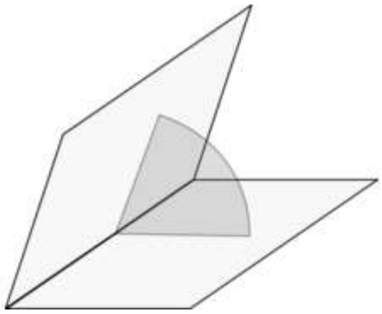
Definicja 1

Bryła jest to figura przestrzenna spełniająca następujące warunki:
1) jest ograniczona,
2) jest domknięta,
3) do każdej kuli, której środek należy do tej figury, należy przynajmniej jeszcze jeden punkt wewnętrzny tej kuli,
4) każde dwa punkty tej figury można połączyć linią łamaną w niej zawartą.

Najczęściej spotykane bryły geometryczne to wielościany i bryły obrotowe. Nie wszystkie figury przestrzenne są bryłami, przykładem może być kąt wielościenny (rys. 1-2).

Rys. 1[1],2[2]





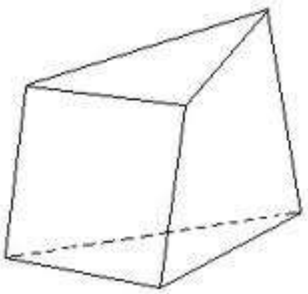
Definicja 2

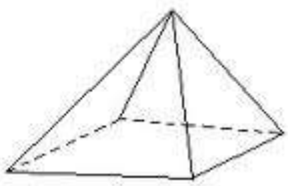
Wielościan - bryła ograniczoną powierzchnią będąca sumą skończonej liczby wielokątów. Wielokąty te są ścianami wielościanu, a ich boki jego krawędziami. Jeżeli wielościan w całości znajduje się po jednej stronie płaszczyzny wyznaczonej przez każdą z jego ścian, nazywamy go wypukłym.

Przykładami wielościanów są figury przedstawione na rys. 3-7.

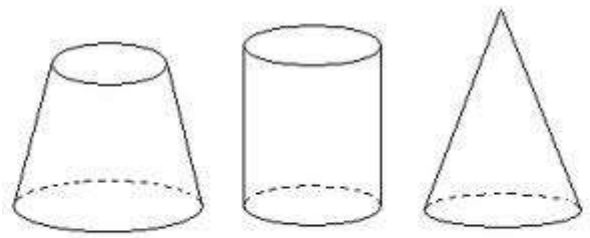
Rys.3[3], 4[3], 5[3]

Rys. 6[3], 7[3]





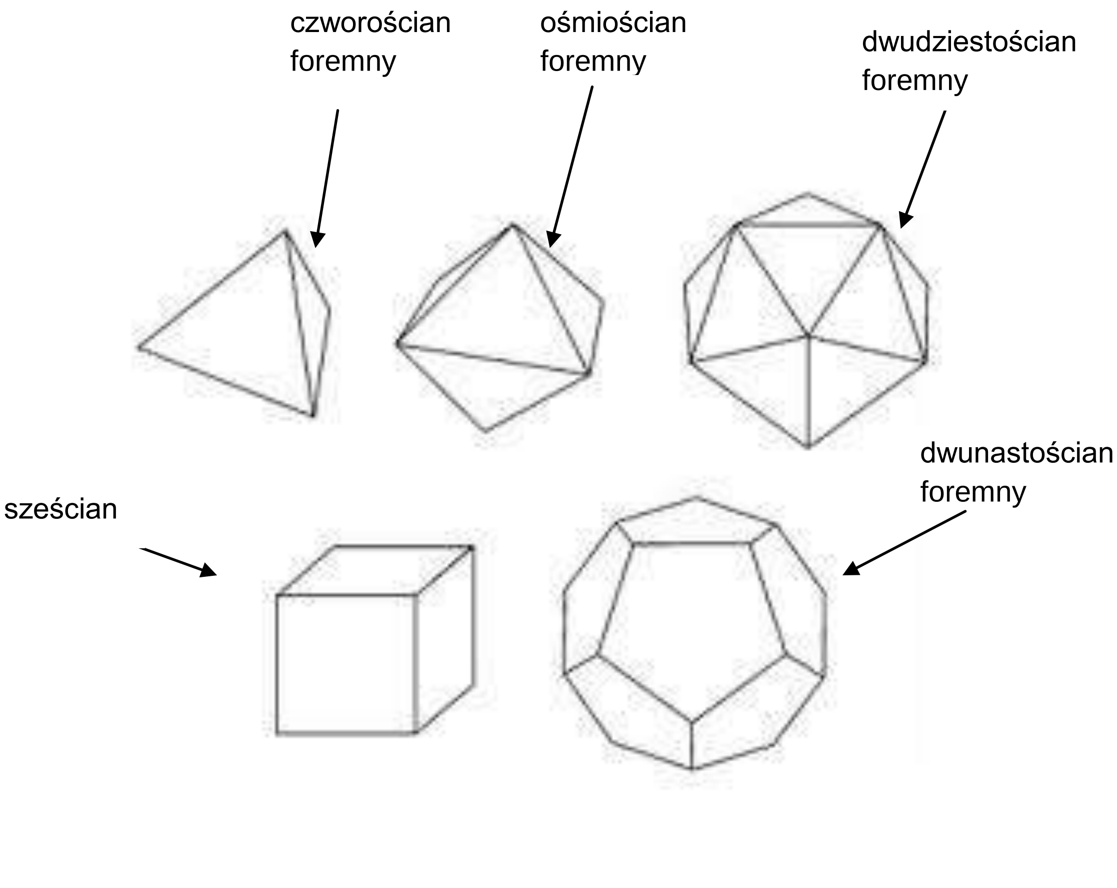
Rys. 8[3], 9[3], 10[3]



Definicja 3

Wielościan foremny - zwany inaczej bryłą platońską jest to wielościan wypukły, którego ścianami są przystające wielokąty foremne, i w którego wierzchołku zbiega się taka sama liczba ścian.
Istnieje pięć wielościanów foremnych – czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan.

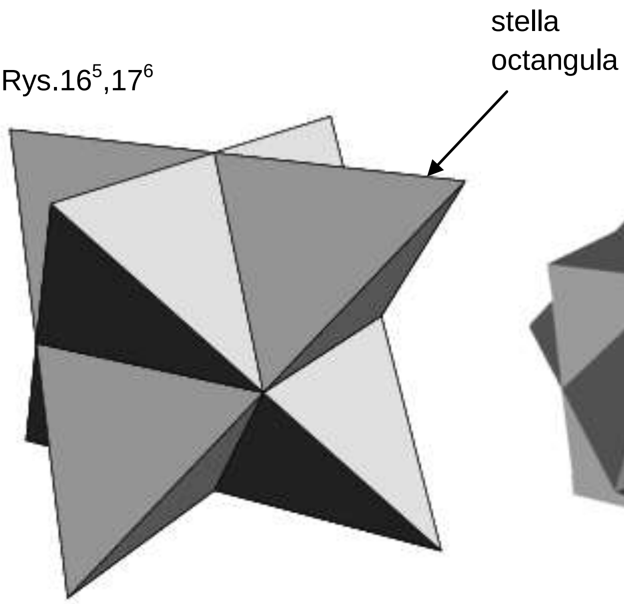
Rys. 11[4],12[4],13[4], 14[4], 15[4]



Julia Strumińska i Arkadiusz Biel

Co się stanie gdy nałożymy na siebie dwa lub większą liczbę wielościanów, na przykład czworościany foremne lub ośmiościan foremny i sześcian? W ten sposób otrzymamy wielościan gwiaździsty. Przykłady skonstruowanych tak figur ilustrują rys. 16 i rys. 17.

Rys.16[5],17[6]



Pole powierzchni stelli octanguli o krawędzi a składa się z 24 trójkątów równobocznych o boku $\frac{1}{2}a$.

Pole jednego trójkąta równobocznego jest równe $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$, zatem pole całej bryły równe jest $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.

Definicja 4

Wielościan gwiaździsty - wielościan, którego ściany można przedstawić jako wielokąty gwiaździste przenikające się, względnie wielościan przedstawiający formy gwiaździste. Często mianem wielościanów gwiaździstych określa się cztery wielościany: dwunastościan gwiaździsty mały, dwunastościan wielki, dwunastościan gwiaździsty wielki, dwudziestościan wielki. Do wielościanów gwiaździstych zalicza się również kompozycje wielościenne i inne obiekty spełniające warunki definicji wielościanu.

Kolejnym etapem naszych rozważań było zadanie pytania czy jest inny sposób na uzyskanie wielościanu gwiaździstego. Podczas przeszukiwania książek i Internetu natknęliśmy się na proces polegający na wydłużaniu ścian wielościanów foremnych. Zabieg ten nazywa się powszechnie stellacją, czyli rozgwieżdżeniem. Nie wszystkie jednak wielościany można poddać rozgwieżdżeniu, ponieważ przedłużanie boków może nie dać nowych przecięć. Bryłami platońskimi których nie można poddać stellacji są sześcian i czworościan foremny.

Przykładem wielościanu gwiaździstego uzyskanego przez stellację może być gwiazda utworzona przez przedłużanie krawędzi ścian dwunastościanu foremnego. Powstała w ten sposób bryła nazywana jest dwunastościanem gwiaździstym małym.

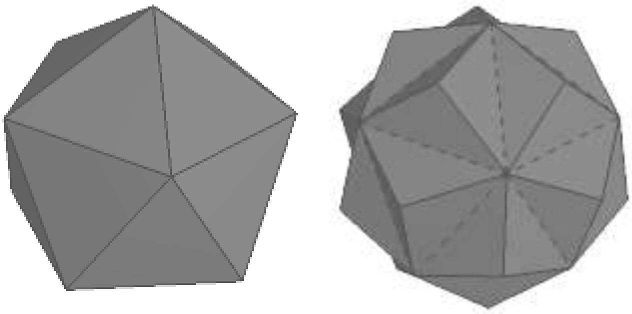
Rys. 18[7]

dwunastościan gwiaździsty mały

Podobnemu procesowi został poddany dwudziestościan foremny, który po stellacji utworzy wielościan gwiaździsty (rys. 18). Ostrosłupy tworzące jego powierzchnię są dosyć płaskie, ponieważ kąt nachylenia między dwiema ścianami jest dość duży(*138,19°*), tak więc nachylenie ściany do podstawy wynosi *41,81°*.
Ma kształt pokazany na rys. 20.

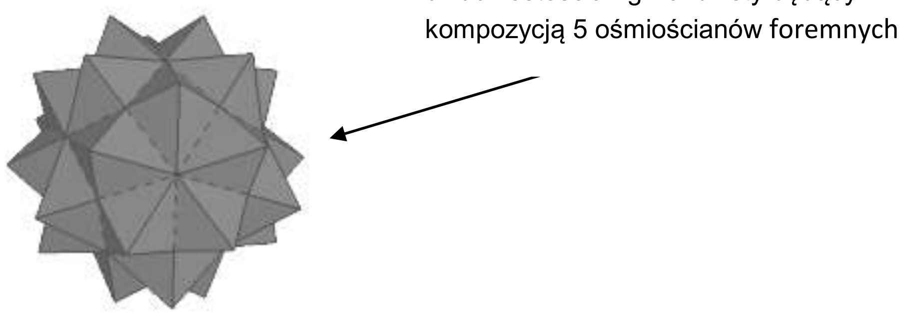
dwudziestościan gwiaździsty

Rys. 19[7],20[7]



W kolejnym etapie rozważań postanowiliśmy sprawdzić czy powtarzanie procesu na powstałej figurze, utworzy kolejny wielościan gwiaździsty. Dzięki odpowiedniemu rozgwieżdżeniu powstał dwudziestościan(rys. 20), którego ścianami są trójkąty równoboczne, a cała ta kompozycja opiera się na pięciu ośmiościanach foremnych.

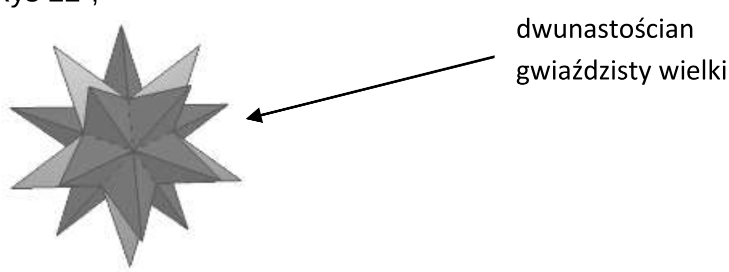
Rys. 21[7]



Wielościany gwiaździste foremne

Następnie zaczęliśmy się zastanawiać czy, jeśli z warunku foremności usunąć wypukłość, wielościan gwiaździsty będzie foremny. Figurę przedstawioną na rys. 18 można uznać za foremną w rozszerzonej definicji, ponieważ jego ścianami są przystające wielokąty foremne, a w każdym wierzchołku schodzi się taka sama liczba ścian. Inne wielościany gwiaździste które można uznać za foremne to dwunastościan gwiaździsty wielki(rys. 21) oraz ośmiościan gwiaździsty(rys. 16).

Rys 22[7],



Aby zbudować model dwunastościanu gwiaździstego wielkiego, wystarczy złożyć siatkę dwudziestościanu i do każdej ściany dokleić ostrosłup prawidłowy trójkątny. Siatki tych figur przedstawione są w załącznikach 1 i 2. Podobnie można złożyć dwunastościan gwiaździsty mały opierając konstrukcję modelu na siatce dwunastościanu i ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego.

Postanowiliśmy sprawdzić czy w wielościanach gwiaździstych zachodzi wzór Eulera o wielościanach.

Twierdzenie Eulera o wielościanach

Między liczbą wierzchołków wielościanu prostego (W), liczbą jego krawędzi (K) oraz liczbą jego ścian (S) zachodzi następujący związek: W – K + S = 2.

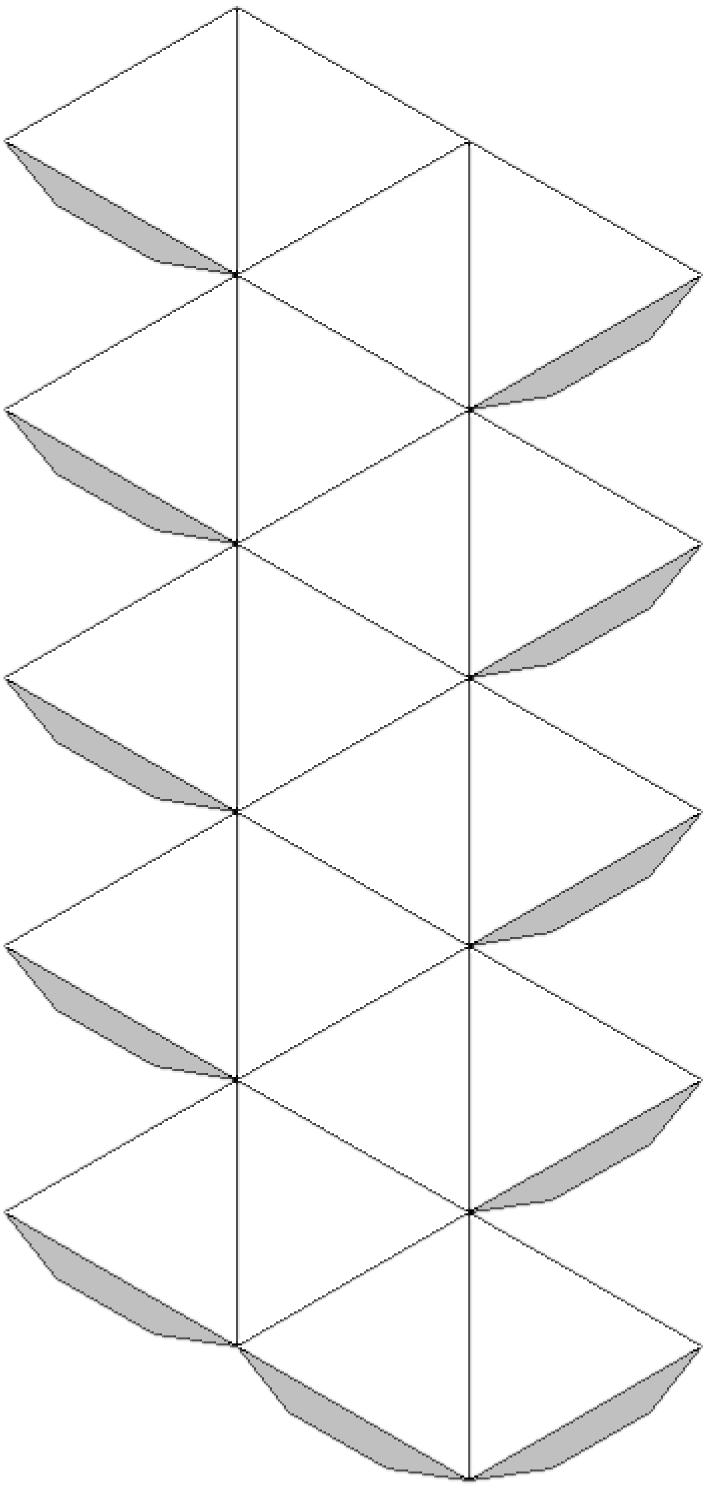
Po przekształceniu równości otrzymujemy taki wzór:

$$W + S = K + 2$$

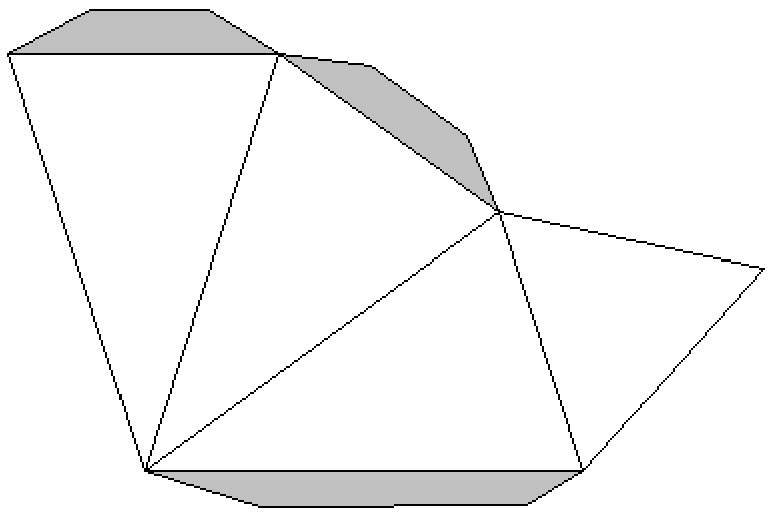
Dla stelli octanguli S=8, W=8, K=12.

Z prostego rachunku 8+8 ≠ 12+2 wynika, że ta figura nie spełnia wzoru Eulera.

Załącznik 1[9]



Załącznik 2[8]



Bibliografia

1. Zdzisław Pogoda, *Galeria Wielościanów,* WUW
2. Praca zbiorowa, *Encyklopedia Matematyka*, GREG
3. http://mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta0406/wielosciany.pdf
4. http://www.charakteryzacja.pl/wp-content/uploads/2012/10/4-ST-wielo%C5%9Bciany-foremne.pdf
5. http://www.interklasa.pl/portal/dokumenty/pabich/s5k.html
6. http://polyhedra.republika.pl/kp.html
7. Praca zbiorowa, *Encyklopedia szkolna Matematyka*, WSiP 1997
8. http://encyklopedia.pwn.pl/haslo.php?id=3899080

Przypisy

[1] pobrane z http://www.medianauka.pl/kat_dwuscienny_wieloscienny

[2] pobrane z artykułu na wikipedii o wielościanach

[3] pobrane z http://matematyka.cproject.pl/

[4] pobrane z http://minds.pl/Filozofia-ORF/Ewolucja-pojecia-atomu.html

[5] pobrane z http://polyhedra.republika.pl/kp.html

[6] pobrane z szkolamysleniamini.nq.pl prezentacja o wielościanach gwiaździstych

[7] pobrane z http://www.swietageometria.info/podstawowe-pojecia?showall=1

[8] pobrane z http://www.matematyka.wroc.pl/ z artykułu o wielościanach gwiaździstych

[9] pobrane z http://www.matematyka.wroc.pl/ z artykułu o wielościanach platońskich