O pewnym zadaniu olimpijskim

Michał Seweryn, V LO w Krakowie
opiekun pracy: dr Jacek Dymel

Problem początkowy

Na drugim etapie LXII Olimpiady Matematycznej pojawił się następujący problem:

Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ wyznaczyć największą możliwą długość takiego ciągu o wyrazach w zbiorze n-elementowym, że żadne jego dwa sąsiednie wyrazy nie są równe a ponadto nie można w wyniku wykreślenia wszystkich jego wyrazów z wyjątkiem czterech otrzymać ciągu postaci x, y, x, y, gdzie $x \neq y$.

Swoją pracę zacznę od przedstawienia firmowego rozwiązania zadania.

Niech c_n oznacza poszukiwaną największą długość. Rozważmy ciąg $(a_1, a_2, ..., a_k)$ o wyrazach w zbiorze n-elementowym, mający opisaną własność. Wśród wszystkich wartości występujących w tym ciągu niech u będzie tą, której pierwsze wystąpienie w ciągu jest najdalsze; oznaczmy je przez $a_l = u$. Zatem każdy element różny od u, który występuje chociaż raz w tym ciągu, jest obecny wśród wyrazów $a_1, a_2, ..., a_{l-1}$. Wykażemy, że element u pojawia się w ciągu tylko raz.
Przypuśćmy, że wyraz $a_m = u$ jest drugim wystąpieniem elementu u w rozważanym ciągu. Oczywiście $a_{l+1} = w \neq u$, gdyż na mocy warunków zadania sąsiednie wyrazy a_l i a_{l+1} są różne. W takim razie $m \geqslant l + 2$. Ponadto - na mocy określenia u - wśród wyrazów $a_1, a_2, ..., a_{l-1}$ występuje w, czyli $a_i = w$ dla pewnego $i \leqslant l-1$. Jednak wówczas skreślając wszystkie wyrazy ciągu z wyjątkiem a_i, a_l, a_{l+1}, a_m otrzymujemy ciąg postaci w, u, w, u, w sprzeczności z założeniami zadania. Istotnie więc wystąpienie elementu u w ciągu $a_1, a_2, ..., a_k$ jest pojedyncze.
Wykreślmy z ciągu wyraz $a_l = u$. Ponadto jeśli wyrazy a_{l-1} i a_{l+1} były równe, to wykreślmy także jeden z nich. Otrzymamy w ten sposób ciąg o długości co najmniej $k-2$, w którym występuje co najwyżej $n-1$ różnych wyrazów, i nie zawierający dwóch jednakowych sąsiednich wyrazów. Stąd wniosek, że ciąg ten spełnia warunki zadania, jeżeli tylko $n - 1 \geqslant 3$. Zatem dla $n \geqslant 4$ mamy $k - 2 \leqslant c_{n-1}$. Przyjmując $c_2 = 3$ widzimy, że nierówność ta jest prawdziwa także dla $n = 3$. Każdy bowiem ciąg o długości co najmniej 4 o wyrazach ze zbioru dwuelementowego, nie zawierający dwóch jednakowych sąsiednich wyrazów, zaczyna się od podciągu postaci x, y, x, y. Jednak k jest długością dowolnie wybranego dozwolonego ciągu o wyrazach w zbiorze n-elementowym. Zatem z zależności $k - 2 \leqslant c_{n-1}$ otrzymujemy $c_n \leqslant c_{n-1} + 2$ dla $n = 2, 3, 4, ...$ Skoro $c_2 = 3$, więc przez prostą indukcję uzyskujemy $c_n \leqslant 2n - 1$ dla każdego n. Na koniec zauważmy, ze $(2n-1)$-wyrazowy ciąg:

$$1, 2, 3, ..., n-1, n, n-1, ..., 3, 2, 1$$

o wyrazach ze zbioru n-elementowego ma postulowaną własność.
Odpowiedź: Szukana największa długość ciągu wynosi $2n - 1$.

Uogólnienie problemu

W dalszej części swojej pracy próbuję rozwiązać problem w wersji uogólnionej, to znaczy dla sytuacji, gdy inny jest rodzaj sekwencji, które nie mogą być podciągami ciągu. W swojej pracy *ciągiem poprawnym* będę nazywał ciąg, który spełnia warunki problemu w aktualnie rozpatrywanej wersji, zaś *ciągiem maksymalnym* będę nazywał najdłuższy ciąg poprawny.

Rozważmy następujący problem:

1.*Dla liczb całkowitych dodatnich n,p znaleźć maksymalną długość ciągu o wyrazach w zbiorze n-elementowym, który nie zawiera podciągu postaci* $\underbrace{x, y, x, y, ...}_{p}$ *oraz żadne dwa sąsiednie wyrazy nie są sobie równe.*

Dla $p = 2$ problem jest trywialny i ciąg może mieć maksymalnie 1 wyraz.
Dla $p = 3$ problem nadal jest trywialny i ciąg może mieć maksymalnie n wyrazów.
Dla $p = 4$ mamy dokładnie to zadanie, które pojawiło się na Olimpiadzie Matematycznej.
Dla $p > 4$ zaczyna się robić dużo ciekawiej.

Przyjrzyjmy się bliżej sytuacji, gdy $p = 6$.
Oznaczmy przez d_n poszukiwaną najdłuższą długość ciągu o wyrazach w zbiorze n-elementowym.
Oto wartości d_i dla $i \leqslant 6$ oraz przykładowy maksymalny ciąg.

- $d_1 = 1$ (1)
- $d_2 = 5$ (1, 2, 1, 2, 1)
- $d_3 = 10$ (1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 1)
- $d_4 = 16$ (1, 2, 3, 2, 3, 1, 3, 4, 3, 4, 1, 4, 2, 4, 2, 1)
- $d_5 = 22$ (1, 2, 3, 4, 3, 4, 2, 4, 5 4, 5, 2, 5, 3, 5, 1, 5, 1 3, 1, 2, 1)
- $d_6 = 29$ (1, 2, 3, 4, 5, 4, 5, 3, 5, 2, 5, 6, 5, 6, 2, 6, 3, 6, 4, 6, 1, 6, 1, 4, 1, 3, 1, 2, 1)

Powyższe wyniki zostały obliczone przez napisany przeze mnie program, który opiera się na algorytmie typu brute-force wyglądający w następujący sposób:

```
funkcja szukajciagu()
    jeśli obecny ciąg jest dłuższy od najdłuższego ciągu znalezionego do tej pory
        zapamiętaj nowy najdłuższy ciąg
    dla każdego i należącego do {1, 2, ..., n}
        dodaj na koniec ciągu i
        jeśli ciąg jest poprawny
            szukajciagu()
        w przeciwnym przypadku
            usuń ostatni element ciągu.
```

Przedstawiona powyżej procedura znajduje najdłuższy poprawny ciąg, jaki może powstać w wyniku dodawania elementów do zadanego ciągu. Dla każdego $i \in \{1, 2, ..., n\}$, jeśli tylko ciąg z dodanym na końcu i jest poprawny, to procedura próbuje dodawać następne elementy. Jeśli w międzyczasie podciąg uzyska długość, jakiej nigdy wcześniej nie osiągnął, to ów ciąg zostaje zapamiętany. W efekcie każdy ciąg albo zostanie sprawdzony przez procedurę, albo zostanie wykluczony, gdyż ileś początkowych elementów tego ciągu tworzyło ciąg, który nie był poprawny. Zatem faktycznie powyższa procedura pozwala poprawnie znajdować maksymalne ciągi.

Na pierwszy rzut oka widać, że dla $p = 6$ największej długości nie da się wyrazić tak łatwo jak w przypadku $p = 4$. Jeśli wzór jawny d_n w ogóle istnieje, to najprawdopodobniej jest on dosyć skomplikowany. Jednak okazuje się, że d_n można oszacować z góry i z dołu.

Twierdzenie 1.1. Dla określonego $p \geqslant 2$ zachodzi nierówność $d_n \geqslant (p-2)(n-1)+1$.

Dowód. Weźmy najdłuższy poprawny ciąg o wyrazach w zbiorze $(n-1)$-elementowym $\{1, 2, ..., n-1\}$. Powiedzmy, że ostatni wyraz to i. Jednakże gdy do tego ciągu dodamy wyrazy $\underbrace{n, i, n, i, ...}_{p-2}$, to otrzymamy ciąg o wyrazach w zbiorze n elementowym, który spełnia warunki rozpatrywanego problemu. Stąd łatwo wyciągnąć wniosek, że $d_n \geqslant d_{n-1} + p - 2$, a skoro $d_1 = 1$, to dla dowolnego $n \geqslant 1$ mamy oszacowanie $d_n \geqslant (p-2)(n-1)+1$.

□

Warto w tym momencie dodać, że gdy znamy jakiś odpowiednio długi poprawny ciąg, to możemy od pewnego momentu oszacować jeszcze lepiej (na przykład dla $p = 6$, $n \geqslant 6$ mamy $d_n \geqslant 4n + 5$).

Twierdzenie 1.2. Dla określonego $p \geqslant 2$ zachodzi nierówność $d_n \leqslant \frac{(p-2)n(n-1)}{2} + 1$.

Dowód. Załóżmy, że istnieje poprawny ciąg o wyrazach w zbiorze n-elementowym o długości $\frac{(p-2)n(n-1)}{2} + 2$. Zauważmy, że w ciągu tej długości występuje $\frac{(p-2)n(n-1)}{2} + 1$ par sąsiednich wyrazów. Skoro różnych nieuporządkowanych par wyrazów jest $\frac{n(n-1)}{2}$, to z zasady szufladkowej Dirichleta wiemy, że istnieje $p-1$ par wyrazów sąsiednich takich, że wszystkie są sobie równe z dokładnością do kolejności. Wybierzmy spośród tych $p-1$ par tę, która znajduje się w ciągu najwcześniej. Powiedzmy, że w tej parze pierwszy wyraz to x, a drugi y. Możemy więc wybrać te dwa wyrazy, oraz spośród następnych $p-2$ par wybierać na zmianę x i y, wskazując tym samym podciąg $\underbrace{x, y, x, y, ...}_{p}$. Zakładaliśmy jednak, że ten ciąg jest poprawny, dochodzimy więc do sprzeczności.

□

Zatem faktycznie zachodzą nierówności $(p-2)(n-1)+1 \leqslant d_n \leqslant \frac{(p-2)n(n-1)}{2} + 1$.

Rozpatrzmy teraz inną wersję problemu:

2. Znaleźć największą możliwą długość takiego ciągu o wyrazach w zbiorze n-elementowym, że każde dwa sąsiednie wyrazy są różne i ciąg ten nie zawiera podciągu postaci x, y, y, x.

Twierdzenie 2.1. Maksymalny ciąg ma długość co najmniej $3n-2$.

Dowód. Zauważmy, że istnieje poprawny ciąg tej długości. Oto i on:

$$1, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, ..., n-1, n, n-1, n$$

□

Twierdzenie 2.2. Istnieje ciąg maksymalny taki, że żaden element nie występuje w ciągu więcej niż 3 razy.

Dowód. Weźmy dowolny maksymalny ciąg. Załóżmy, że jakiś element występuje co najmniej 4 razy. Nazwijmy ten element X. Nazwijmy element występujący bezpośrednio po drugim X-ie Z. Nasz ciąg wygląda mniej więcej tak:

$$..., X, ..., X, Z, ..., X, ..., X, ...$$

Zauważmy, że przed pierwszym X-em nie występuje żaden wyraz równy Z, gdyż wówczas istniałby podciąg Z, X, X, Z. Analogicznie po czwartym X-ie nie ma żadnego wyrazu równego Z. Ponadto gdyby między pierwszym a czwartym X-em występowały dwa wyrazy równe Z, to istniałby podciąg X, Z, Z, X. Stąd wniosek, że Z występuje tylko raz w naszym ciągu.
Jeśli zastąpimy pierwszy X elementem Z, ciąg będzie wyglądał w następujący sposób:

$$..., Z, ..., X, Z, ..., X, ..., X, ...$$

W otrzymanym ciągu nadal każde dwa sąsiednie wyrazy są różne. Wskutek zamiany jednego wyrazu nie powstał też podciąg postaci Z, y, y, Z - gdyby taki podciąg powstał, znaczyłoby to, że przed zamianą y dwukrotnie występował między pierwszym a drugim X-em co znaczyłoby, że już wcześniej istniał podciąg X, y, y, X, jednak założyliśmy ,że nasz ciąg był poprawny. Nie powstał też żaden podciąg postaci y, Z, Z, y - gdyby faktycznie tak było, oznaczałoby to, że przed zamianą istniał y przed pierwszym X-em oraz występował y po drugim X-ie, z czego wynika, że istniał podciąg postaci y, X, X, y. Zatem wskutek takiej zamiany spowodowaliśmy, że element, który wcześniej występował co najmniej 4 razy teraz występuje jeden raz mniej, oraz element, który występował raz, teraz występuje dwa razy i ciąg nadal jest maksymalny. Możemy więc czynność tę powtarzać do momentu, aż każdy element będzie występować co najwyżej 3 razy.Faktycznie więc istnieje ciąg maksymalny taki, że żaden element nie występuje w ciągu więcej niż 3 razy.

□

Twierdzenie 2.3. W ciągu w którym żaden element nie występuje w ciągu więcej niż 3 razy pierwszy i ostatni wyraz są różne.

*Dowód.*Weźmy ciąg maksymalny, w którym żaden element nie występuje więcej niż 3 razy. Załóżmy przeciwnie, że pierwszy wyraz ciągu (nazwijmy go X) jest równy ostatniemu. Wówczas między pierwszym a ostatnim elementem jest więcej niż n wyrazów (wynika to z twierdzenia 2.1). Zatem z zasady szufladkowej Dirichleta między pierwszym a ostatnim wyrazem jakiś element (nazwijmy go Y) występuje więcej niż raz. Wiemy, że $X \neq Y$, gdyż X może występować co najwyżej 3 razy.Ciąg ten zawiera zatem podciąg X,Y,Y,X. Jest to jednak sprzeczne z założeniem, że ciąg jest poprawny, zatem twierdzenie jest faktycznie poprawne.

□

Twierdzenie 2.4. Element,który jest pierwszym wyrazem ciągu będzie występuje w nim co najwyżej 2 razy.

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że element, który jest pierwszym wyrazem (nazwijmy go X) występuje co najmniej 3 razy. Nazwijmy element, który jest drugim wyrazem Z. Ciąg wygląda tak:

$$X, Z, ..., X, ..., X, ...$$

Podobnie jak za poprzednim razem Z występuje w ciągu tylko raz, bo gdyby było inaczej to istniałby podciąg postaci x, y, y, x. Zauważmy, że gdybyśmy umieścili Z na początku ciągu, przed pierwszym X-em, to nadal sąsiednie wyrazy byłyby różne i nie powstałby żaden podciąg postaci Z, y, y, Z. Otrzymany podciąg byłby więc poprawny i dłuższy od maksymalnego - dochodzimy więc do sprzeczności, Zatem twierdzenie jest faktycznie prawdziwe

□

Z twierdzenia 2.4 wynika symetryczne twierdzenie, że element, który jest ostatnim wyrazem ciągu występuje co najwyżej 2 razy.

Twierdzenie 2.5. Ciąg o długości $3n - 2$ jest najdłuższym poprawnym ciągiem.

Dowód. Z twierdzeń 2.2 i 2.4 wynika, że istnieje ciąg maksymalny, w którym $(n - 2)$ elementów występuje co najwyżej trzykrotnie, zaś 2 elementy (z twierdzenia 2.3 wyraz pierwszy i wyraz ostatni to 2 różne elementy) występują co najwyżej 2 razy. Długość ciągu maksymalnego nie przekracza więc $3(n - 2) + 2 \cdot 2 = 3n - 2$. Zatem ciąg podany w dowodzie twierdzenia 2.1 jest ciągiem maksymalnym.

□

Powyższy problem można uogólnić do następującej wersji:

3.Dla dodatnich liczb całkowitych n, p szukamy największą możliwą długość ciągu o wyrazach w zbiorze n-elementowym, w którym każde dwa sąsiednie wyrazy są różne i nie występuje podciąg postaci: $x, \underbrace{y, y, ..., y}_{p}, x.$

Dla $p = 2$ przedstawiłem dowód, w którym wskazuję dokładną wartość maksymalnej długości. Nie istnieje niestety analogiczny dowód dla sytuacji ogólnej, dlatego będę szacować długość maksymalnego ciągu d_n.

Twierdzenie 3.1. Dla określonego $p \geq 3$ zachodzi nierówność $d_n \leqslant 3(n-1) + \frac{(p-1)(n+2)(n-1)}{2} + 1$.

Dowód. Zauważmy, że w każdym poprawnym ciągu pierwsze 2 wyrazy są różne (nazwijmy jest X i Y). Wśród następnych $(p-1)n+1$ wyrazów jest jakiś element, który powtarza się co najmniej p razy (wynika to z zasady szufladkowej Dirichleta). Element ten jest różny od X lub różny od Y. To znaczy, że w następnych elementach ciągu nie będzie już X lub

nie będzie Y. Wynika stąd, że $d_n \leqslant 2 + (p-1)n + 1 + d_{n-1} = 3 + (p-1)n + d_{n-1}$, a więc skoro $d_1 = 1$, to:
$d_n \leqslant 3 + (p-1)n + d_{n-1} \leqslant 3 + (p-1)n + 3 + (p-1)(n-1) + d_{n-2} \leqslant ... \leqslant 3 + (p-1)n + 3 + (p-1)(n-1) + ... + 3 + (p-1) \cdot 2 + 1 = 3(n-1) + (p-1)\frac{(n+2)(n-1)}{2} + 1.$

$\square$

Okazuje się więc, że długość ciągu maksymalnego wynosi $3n-2$.

Twierdzenie 3.2. Dla określonego $p \geq 3$ zachodzi nierówność $d_n \geqslant (2p-1)(n-1)$:

Dowód. Zauważmy, że istnieje poprawny ciąg długości $(2p-1)(n-1)$:

$$\underbrace{1,2,1,2,...,2,1}_{2p-1},\underbrace{2,3,2,3,...,3,2}_{2p-1},...,\underbrace{n-1,n,n-1,n,...,n,n-1}_{2p-1},n$$

$\square$

Mamy zatem szacowanie $(2p-1)(n-1) \leqslant d_n \leqslant 3(n-1) + \frac{(p-1)(n+2)(n-1)}{2} + 1$.