Zasada Cavalieriego i jej zastosowania

***Autorzy**:*
Paulina Pawlik
Ewa Rzepka
XX Liceum Ogólnokształcące
im. L. Staffa w Krakowie
Opiekun:
mgr Iwona Sitnik-Szumiec

Tematem naszej pracy jest mało znana Zasada Cavalieriego dotycząca porównywania objętości dwóch brył. Odkryłyśmy tę metodę przypadkiem, gdy wiedzione matematyczną ciekawością postanowiłyśmy dowiedzieć się jakie jest uzasadnienie wzoru na objętość kuli, podawanego w gimnazjum bez żadnych uzasadnień. Najpierw szukałyśmy w książkach, lecz tam znalazłyśmy tylko niezrozumiałe dla nas rozumowanie z granicami ciągów. Dalsze poszukiwania nie przyniosły lepszych efektów i gdy prawie straciłyśmy nadzieję na znalezienie odpowiedzi, z pomocą przyszła nam nasza nauczycielka matematyki, która powiedziała nam o innej, niestosowanej powszechnie metodzie wyprowadzania wzoru z zastosowaniem Zasady Cavalieriego. Postanowiłyśmy dokładniej zająć się tym zagadnieniem i doszłyśmy do wniosku, że zebrany przez nas materiał będzie dobrym tematem na pracę konkursową.

Korzenie tej zasady sięgają III w. p.n.e. czyli do czasów Archimedesa- jednego z nielicznych geniuszy, których twórczość przesądziła na długie wieki o losach nauki. Archimedes w swoim traktacie „O kuli i walcu" zawarł dowód, że

$\mathbf{V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 2 : 3}$

Gdzie V_1 to objętość stożka wpisanego w walec,
V_2 -objętość kuli,
V_3 -objętość walca opisanego na tej kuli

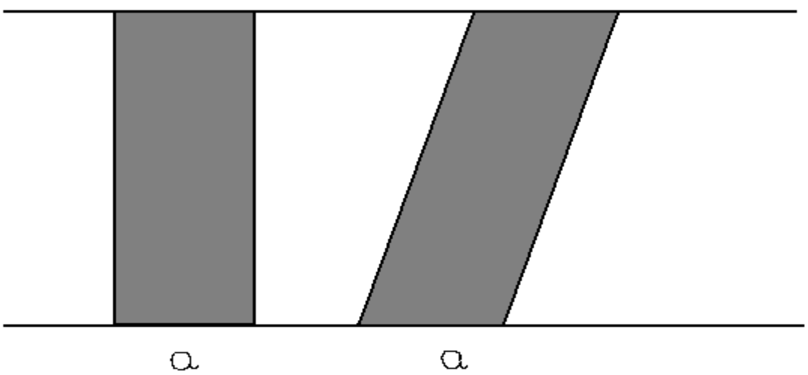
Archimedes wykazał również, że półkula i walec o takim samym promieniu podstawy i wysokości równej x, z którego wycięto stożek, którego podstawą jest górna podstawa walca, a wierzchołkiem środek dolnej podstawy mają równe objętości. Mimo, że Archimedes nie podał formalnego dowodu swego wniosku, to przedstawił bardzo przekonujące argumenty: potraktował te bryły jako puste naczynia i nalał do nich wody. Okazało się, że taka sama ilość wody wystarczyła do napełnienia obu naczyń.

Powyższa metoda do wyznaczania objętości kuli została formalnie uzasadniona i uogólniona dopiero w XVIII w. przez ucznia Galileusza- włoskiego matematyka Bonaventurę Cavalieriego. Od tamtej pory teoria związana z obliczaniem pól i objętości figur i brył znana jest jako twierdzenie Cavalieriego.

<u>Twierdzenie Cavalieriego-wersja dla płaszczyzny</u>:

„Jeżeli dwie figury: F_1 i F_2 zawarte między dwiema prostymi równoległymi l i k przetniemy rodziną prostych równoległych do l i k, otrzymując na każdym przecięciu z figurami F_1 i F_2 odcinki równej długości, to figury F_1 i F_2 mają równe pola"

Najprostszą prezentacją tego twierdzenia może być prostokąt i równoległobok o równych podstawach.



Prostokąt i równoległobok mają równe podstawy i wysokości, zatem równe pola.

<u>**Twierdzenie Cavalierego-wersja dla przestrzeni:**</u>

„Jeżeli dwie bryły: B_1 i B_2, ograniczone dwiema równoległymi płaszczyznami l i k przetniemy rodziną płaszczyzn równoległych do l i k i na każdym poziomie w przecięciu z bryłami B_1 i B_2 otrzymamy przekroje o równych polach, to te bryły mają równą objętość.”

Założenie twierdzenia nazwijmy Warunkiem Cavalieriego.

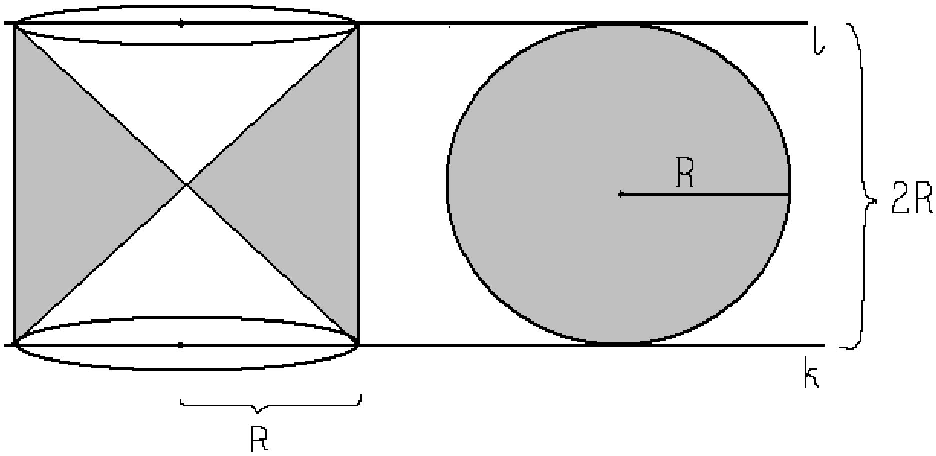
Niżej przedstawiamy trzy problemy, w których rozstrzygnięciu wykorzystujemy Zasadę Cavalieriego

<u>Problem 1 – wzór na objętość kuli:</u>

Rozważmy kulę o promieniu R i bryłę B, która powstała z walca o promieniu podstawy długości R i wysokości $2R$, z którego wyjęto dwa stożki o wspólnym wierzchołku, znajdującym się w punkcie, który jest środkiem symetrii walca. Podstawa jednego ze stożków pokrywa się z dolną podstawą walca, a podstawa drugiego z górną .

Wykażemy, że kula o promieniu R i bryła B spełniają Warunek Cavalieriego, co oznacza, że mają równe objętości.

Umieszczamy obie bryły między dwiema równoległymi płaszczyznami l i k

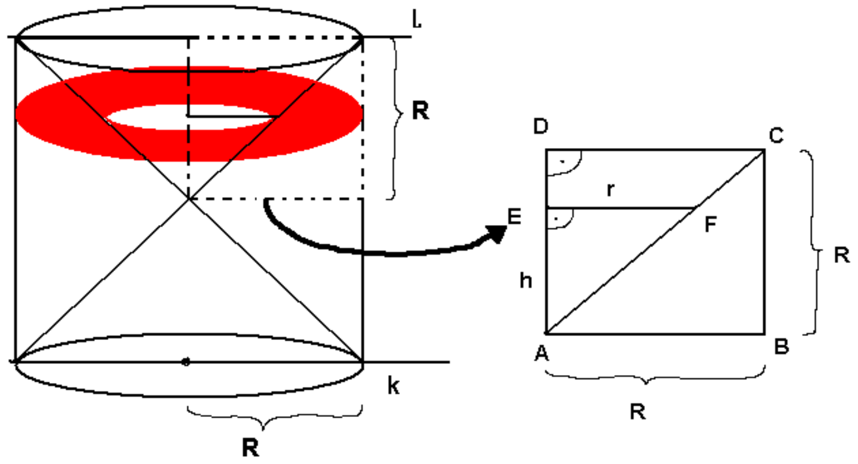


Przekrojami bryły B i płaszczyzn l i k są okręgi, których pole równe jest zero.
Przekrojami kuli z płaszczyznami l i k są punkty, których pole również równe jest zero, dlatego Warunek Cavalieriego dla obydwu brył w przecięciu z l i k jest spełniony.

Wykażemy teraz, że na dowolnym poziomie między płaszczyznami l i k przekroje brył mają równe pola.

Rozważmy pola przekrojów kuli i bryły B płaszczyzną p równoległą do l i k w odległości h od środka kuli

Przekrojem płaszczyzny p i bryły B jest pierścień kołowy ograniczony okręgami o promieniu R i promieniu r



Czworokąt *ABCD* jest kwadratem o boku długości *R*
Odcinek *EF* jest równoległy do odcinka *DC*, więc trójkąt *AEF* jest prostokątny
Odcinek *AC* jest przekątną kwadratu, więc kąty *EAF* i *EFA* mają miarę 45°
Z tego wynika, że trójkąt *AEF* jest prostokątny równoramienny, więc $h = r$
Pole koła ograniczonego okręgiem o promieniu r jest równe

$$\mathbf{P_1 = \pi r^2 = \pi h^2}$$

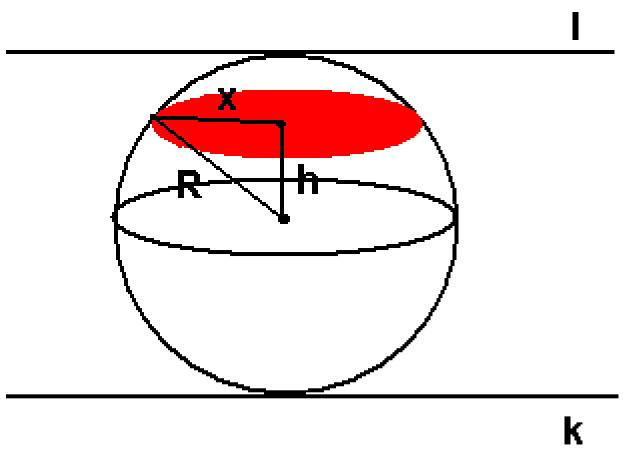
Pole koła ograniczone okręgiem o promieniu *R* wynosi

$$\mathbf{P_2 = \pi R^2}$$

Pole pierścienia kołowego P_0 jest równe

$$\mathbf{P_0 = \pi R^2 - \pi h^2 = \pi(R^2 - h^2)}$$

Przekrojem P_k kuli o promieniu *R* i płaszczyzny jest koło o promieniu *x*



Pole tego przekroju jest równe

$$\mathbf{P_k = \pi(R^2 - h^2)}$$

Zatem pole pierścienia jest równe polu koła o promieniu *x*, spełniony jest Warunek Cavalieriego

Na podstawie Zasady Cavalieriego bryła *B* i kula o promieniu *R* mają równe objętości
Wprowadźmy oznaczenia

V_S- obj. Stożka
V_W- obj. Walca
V_B- obj. Bryły

Zauważmy, że $V_B = V_W - 2V_S$, czyli mamy:

$V_B = \pi R^2 * 2R - 2(1/3\pi R^2 * R) = 2\pi R^3 - 2/3\pi R^3 = 4/3\pi R^3$

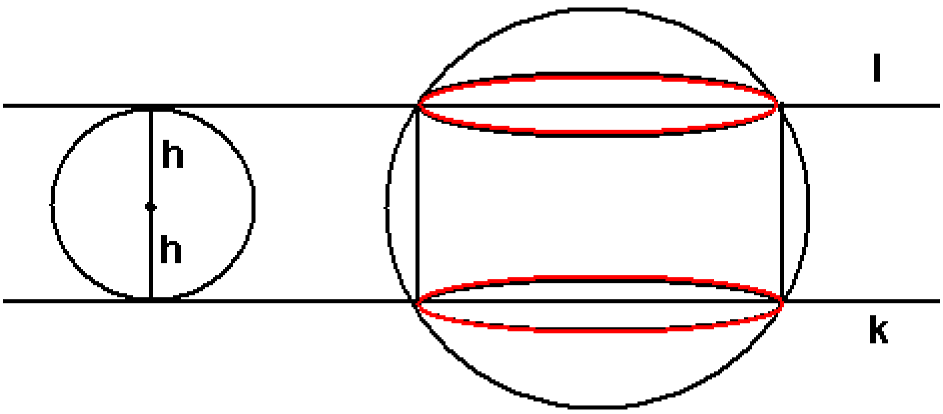
Wykazaliśmy, że objętość kuli o promieniu długości *R* wynosi $4/3\pi R^3$

Problem 2-masa obierzyny-obręczy:

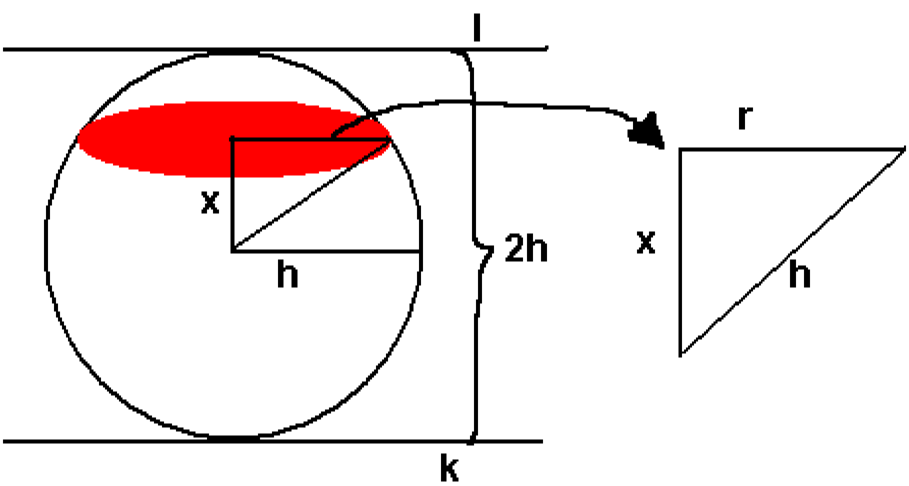
Wyobraźmy sobie, że kula ziemska jest kulą w sensie matematycznym o promieniu długości R=6 378 140 m.
Obieramy ją nożykiem o długości 5cm wzdłuż równika, tak jakbyśmy obierali jabłko.
Zdejmujemy jedną taką obierzynę-obręcz i chcemy obliczyć jej masę.
Żeby obliczyć masę takiej obierzyny najpierw potrzebna będzie jej objętość, żeby móc skorzystać ze wzoru **$m = V * \varsigma$**

Gdzie gęstość ziemi $\varsigma = 1800 kg/m^3$

Wykażemy, że bryła będąca „obierzyną" i kula o promieniu *h* spełniają Warunek Cavalieriego, gdyż wówczas ich objętości będą równe.
Umieszczamy je między dwiema równoległymi płaszczyznami *l* i *k* stycznymi do kuli o promieniu *h*.



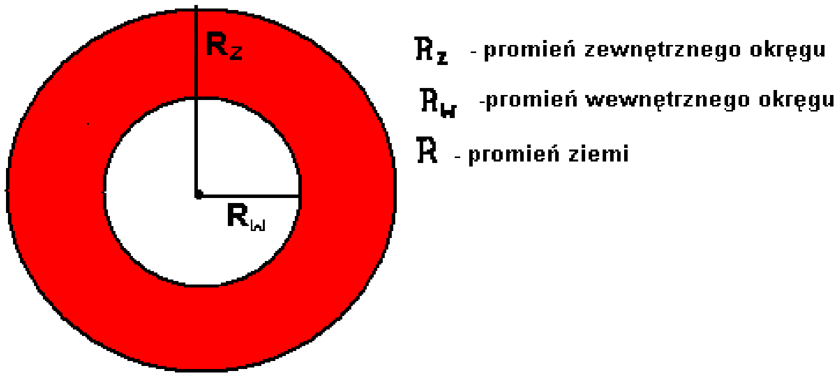
Dla płaszczyzn *l* i *k* przecinających „obierzynę" przekrojami są okręgi, których pole wynosi zero
Częścią wspólną płaszczyzn *l* i *k* i kuli o promieniu *h* są punkty, których pole również równe jest zero, zatem Warunek Cavalieriego dla kuli i „obierzyny" w przecięciu z *l* i *k* jest spełniony.
Zbadamy teraz czy jest on spełniony dla dowolnej płaszczyzny p równoległej do płaszczyzn *l* i *k*
Prowadzimy płaszczyznę *p* w odległości *x* od środka kuli ziemskiej i kuli o promieniu *h*
Obliczymy najpierw pole P_1 przekroju kuli o promieniu *h* z płaszczyzną *p*
Rozważmy trójkąt prostokątny:



Pole P_1, to pole koła o promieniu r.
Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa $r^2=h^2-x^2$ więc:

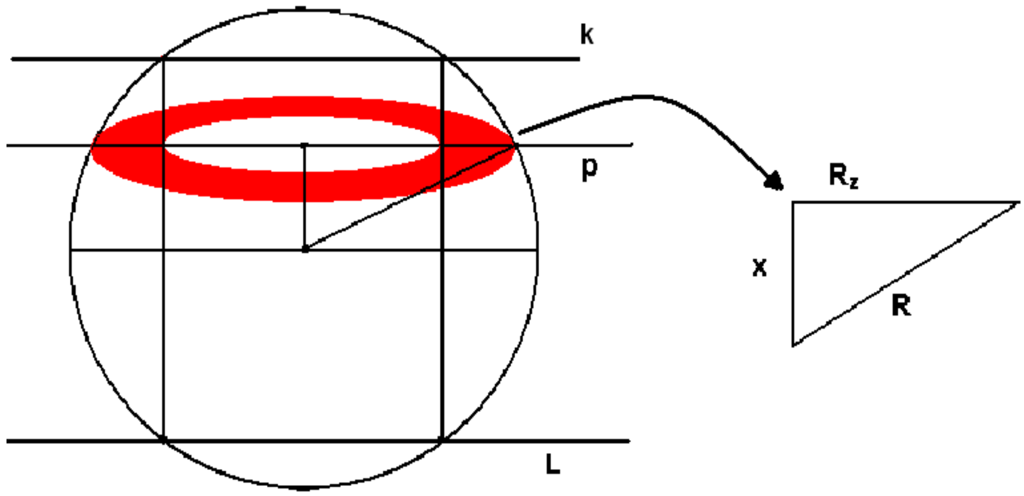
$$\underline{\mathbf{P_1=\pi(h^2-x^2)}}$$

Obliczymy teraz pole P_2 pierścienia kołowego, który powstaje w wyniku przecięcia „obierzyny” płaszczyzną p. Pole pierścienia kołowego jest różnicą pól: koła o promieniu R_z i koła o promieniu R_w, czyli $\mathbf{P_2=\pi R_z^2-\pi R_w^2}$



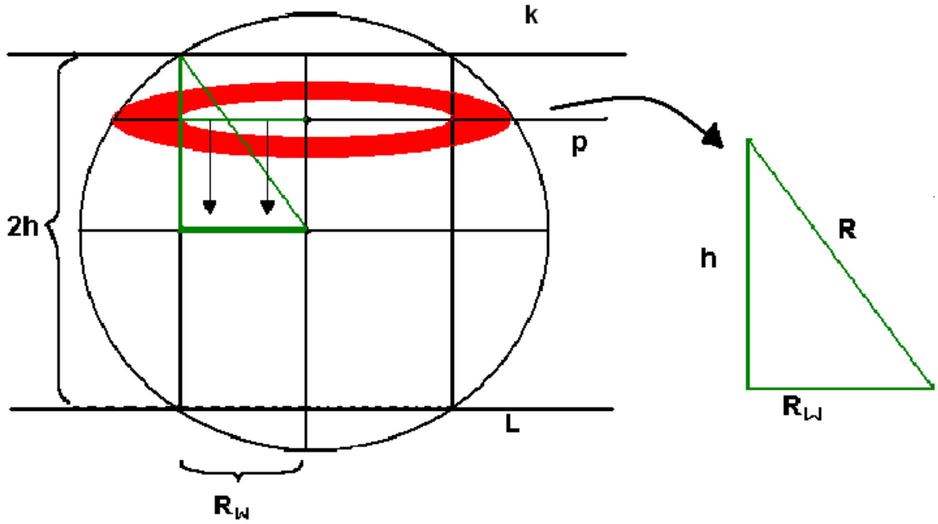
Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$\mathbf{R_z^2=R^2-x^2}$$



Podobnie z twierdzenia Pitagorasa, mamy:

$$\mathbf{R_w^2=R^2-h^2}$$



Znając R_z i R_w możemy obliczyć pole P_2 pierścienia kołowego:

$\mathbf{P_2=\pi(R^2-x^2)-\pi(R^2-h^2)}$

$\mathbf{P_2=\pi(R^2-x^2-R^2+h^2)}$

$\underline{\mathbf{P_2=\pi(h^2-x^2)}}$

$P_1=P_2$ więc dowiedliśmy, że spełniony jest Warunek Cavalieriego, co oznacza, że objętość „obierzyny" jest równa objętości kuli o średnicy 5cm (*2h*)

Możemy już obliczyć objętość „obierzyny", gdyż jest ona równa objętości kuli o promieniu 2,5 cm, więc:

$\mathbf{V=4/3\pi h^3}$

$\mathbf{V\approx 4/3*3,14*0,025^3}$

$\mathbf{V\approx 0,0000655m^3}$

Znając objętość skorzystamy ze wzoru

$\mathbf{m= V*\varsigma}$

$\mathbf{m \approx 0,0000655* 1800[m^3*kg/m^3=kg]}$

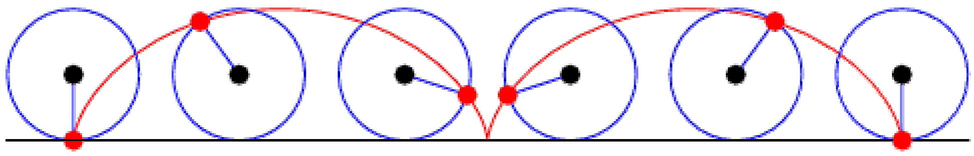
$\mathbf{m \approx 0,118kg}$

$\underline{\mathbf{m \approx 11,8dkg}}$

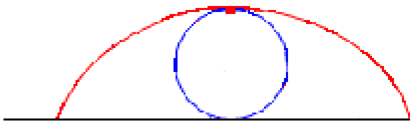
Jak widać obierzyna ta jest niezwykle lekka, co jest sprzeczne z naszą intuicją.
Zaskakujący jest również fakt, że objętość „obierzyny" ($4/3\pi h^3$) zależy wyłącznie od długości nożyka, nie zależy zaś od promienia kuli, z której zdejmowana jest obierzyna.

Problem 3- cykloida:

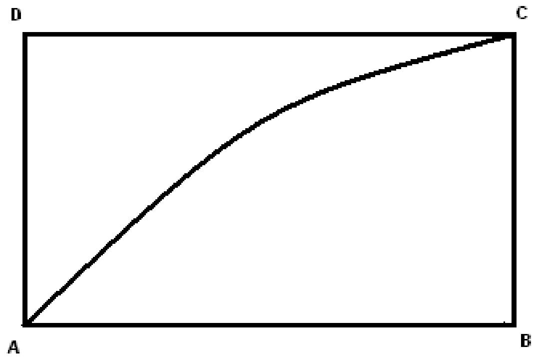
Następnym zagadnieniem, w którym znalazłyśmy ciekawe zastosowanie Zasady Cavalieriego jest cykloida, a dokładnie obliczenie pola pod cykloidą. Cykloida jest krzywą, będącą torem ustalonego punktu leżącego na obwodzie koła, które toczy się po prostej ruchem jednostajnym bez poślizgu.



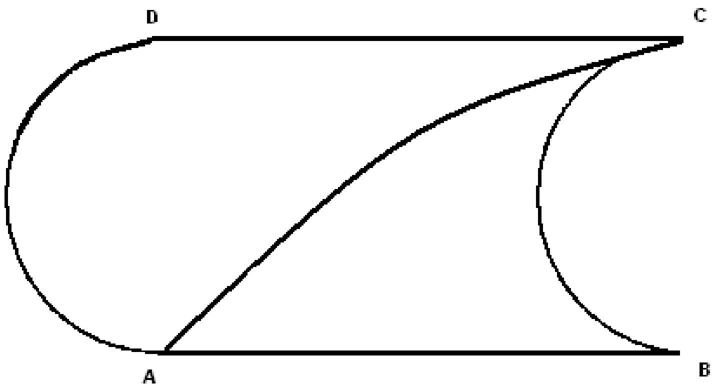
Obliczeniem pola pod cykloidą zajmował się Gilles de Roberwal, który w 1636 roku wykazał, że pole to jest trzy razy większe od pola koła, które utworzyło cykloidę.



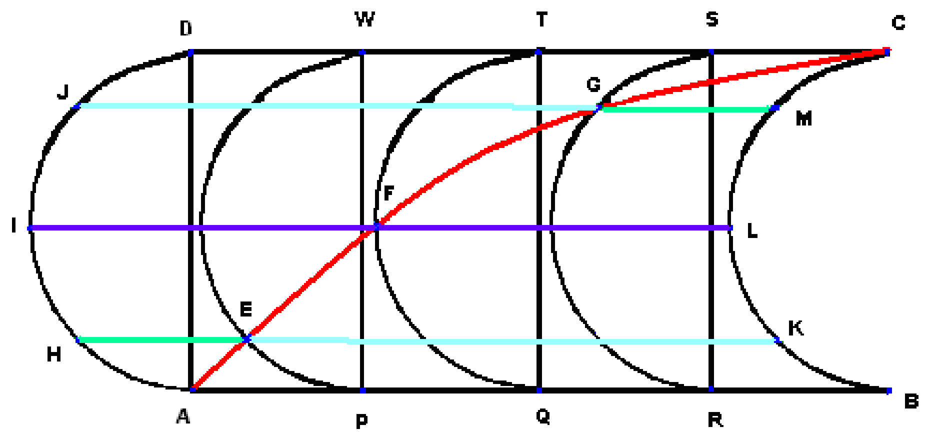
Dowód obejmuje kilka etapów, a zastosowanie zasady Cavalieriego znajduje się w jednym z etapów.
Rozważmy połowę obszaru pod cykloidą i zamknijmy ten obszar w prostokącie *ABCD* jak na rysunku



Z prostokąta *ABCD* wytnijmy połowę koła o średnicy *BC* i „doklejmy" ją do boku *AD* prostokąta *ABCD*.



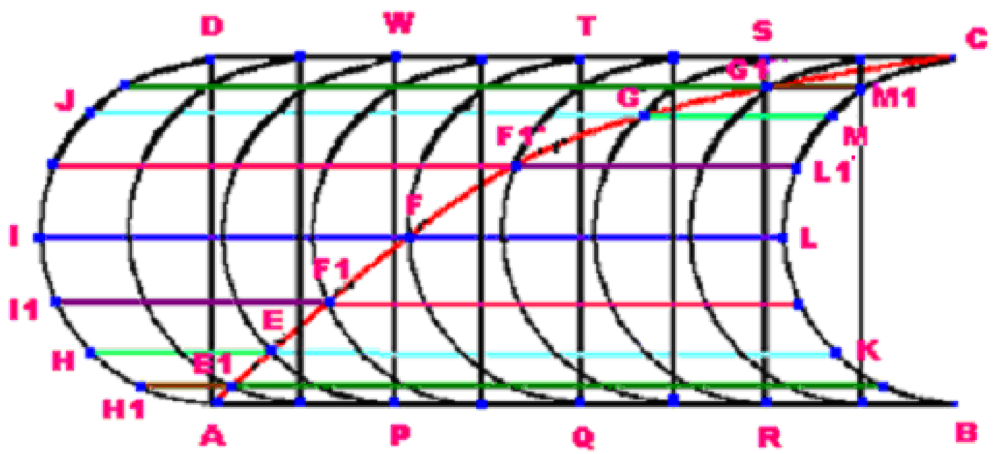
Powstałą w ten sposób figurę dalej nazywać będziemy **łukowcem** *ABCD***,** a prostokąt *ABCD* – bazą łukowca *ABCD.* Zwróćmy uwagę, że pole łukowca jest równe polu prostokąta, z którego ten łukowiec powstał, w opisany wyżej sposób.
Łuk cykloidy o końcach w punktach *A* i *C* dzieli łukowiec *ABCD* na dwie figury, które nazywać będziemy **trójliniowcami**. Mamy zatem dwa trójliniowce: trójliniowiec *ABC* i trójliniowiec *ACD.* Wykażemy, że te trójliniowce mają równe pola. W tym dowodzie powołamy się na Zasadę Cavalieriego.
Prostokąt *ABCD*, dzielimy na 4 przystające prostokąty jak na rysunku niżej, są to prostokąty *APWD, PQTW, QRST, RBCS*. Następnie na każdym z utworzonych prostokątów budujemy łukowce. Łuk cykloidy o końcach w punktach *A* i *C,* przecina półokręgi ograniczające utworzone łukowce odpowiednio w punktach *A, E, F, G, C.*



Dalej przez każdy z punktów *E, F, G* prowadzimy proste równoległe do odcinków *AB* i *DC.* Proste te przecinają półkole o średnicy *AD* w punktach *H, I, J*, zaś półkole o średnicy *BC* w punktach *K, L, M.*

Odcinek *HE,* zawarty w trójliniowcu *ACD,* ma długość równą podstawie prostokąta *APWD,* który jest bazą łukowca *APWD.* W trójliniowcu *ABC* odcinek *GM* ma długość równą podstawie prostokąta *RBCS,* który jest bazą łukowca *RBCS.* Ponieważ prostokąty *APWD* i *RBCS* są przystające, to odcinki *HE* i *GM,* należące odpowiednio do trójliniowców *ACD* i *ABC,* są równe. Analogicznie dowodzimy równość długości odcinków *IF* i *FL* oraz równość długości odcinków *JG* i *EK.*

Podzielmy teraz prostokąt *ABCD* na osiem prostokątów przystających i przez punkty wspólne cykloidy i brzegów odpowiednich łukowców, powstałych na bazie każdego z ośmiu prostokątów, prowadzimy proste równoległe do odcinków *AB* i *DC*.



Analogicznie, jak przy poprzednim podziale prostokąta *ABCD,* dowodzimy równość odpowiednich odcinków w trójliniowcu *ACD* i trójliniowcu *ABC*. Mamy zatem równości:

$$|H_1E_1| = |G_1M_1|,$$

$$|HE| = |GM|,$$

$$|I_1F_1| = |F_1'L_1'|,$$

$$|IF| = |FL|.$$

Podobnie jak przy poprzednim podziale prostokąta *ABCD*, w trójliniowcu *ACD* znajdujemy taką samą ilość odcinków równoległych do odcinków *AB* i *DC* i **równych** odpowiednim odcinkom w trójliniowcu *ABC.*

Wyobraźmy sobie dalej, że prostokąt *ABCD* dzielimy w opisany wyżej sposób na ***n*** przystających prostokątów i na każdym prostokącie budujemy łukowiec. Następnie przez każdy punkt wspólny cykloidy i brzegów utworzonych jak wcześniej łukowców prowadzimy proste równoległe do odcinków *AB* i *DC.*
W trójliniowcu *ACD* znajdziemy taką samą ilość odcinków równoległych do odcinków *AB* i *DC* i **równych** odpowiednim odcinkom w trójliniowcu *ABC.*
Niech teraz ***n*** zmierza do nieskończoności. Konstruowane jak wcześniej odcinki w trójliniowcu *ACD* i w trójliniowcu *ABC*, będące równoległe do odcinków *AB* i *DC,* pokryją całą powierzchnię obydwu trójliniowców, przy czym dla każdego odcinka w trójliniowcu *ACD* znajdziemy w trójliniowcu *ABC* dokładnie jeden odcinek równej długości.

Wykazaliśmy, że trójliniowce *ACD* i *ABC* spełniają Warunek Cavalieriego, zatem na mocy Zasady Cavalieriego mają równe pola.

Powróćmy do problemu pola pod cykloidą. Rozważmy jeszcze raz prostokąt *ABCD*. Wykażemy, że pole trójkąta *ABC* jest dwa razy większe od pola półkola o średnicy *BC.*
Wprowadźmy oznaczenia:

$P_{\Delta ABC}$ -pole trójkąta *ABC*,

$P_{\square ABCD}$ -pole prostokąta *ABCD*,

P_D -pole półkola o średnicy *BC*,

$P_{łukowca}$ - pole łukowca *ABCD*

Niech $|BC| = 2h$, wówczas pole półkola wynosi $P_D = \frac{1}{2}\pi h^2$.

Długość odcinaka *AB* jest równe połowie obwodu koła o średnicy $|BC| = 2h$, gdyż jest to droga, jaką pokonuje ustalony punkt na kole tworzącym cykloidę.

Pole trójkąta *ABC* jest równe: $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|AB|\cdot|BC| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}2\pi h\cdot 2h = \pi h^2$.

Mamy zatem równość $P_{\Delta ABC} = 2P_D$, z której wynika, że $P_{\square ABCD} = 4P_D$ i ponieważ $P_{łukowca} = P_{\square ABCD}$, to $P_{łukowca} = 4P_D$.

Ponieważ pole łukowca *ABCD* jest cztery razy większe od pola półkola o średnicy *BC* i ponieważ trójliniowce *ACD* i *ABC* mają równe pola, co oznacza, że pole trójliniowca *ABC* jest połową pola łukowca *ABCD*, to pole trójliniowca *ABC* jest dwa razy większe od pola półkola o średnicy *BC.*

Z ostatniej przesłanki wynika, że obszar pod połową cykloidy (pod łukiem o końcach w punktach *A* i *C*) składa się z trzech równych części, z czego jedną część stanowi powierzchnia półkola. Stąd już bezpośrednio wnioskujemy, że **pole obszaru pod cykloidą jest trzy razy większe od pola koła, które utworzyło tę cykloidę.**

Zasada Cavalieriego jest zasadą uniwersalną: może być wykorzystywana zarówno w zadaniach matematycznych (porównywanie pól i objętości, cykloida) jak i w życiu codziennym (przykład z obrączką). Jest również łatwa do zrozumienia dla młodszych uczniów, gdyż do wykorzystywania jej potrzebna jest jedynie podstawowa wiedza matematyczna i wyobraźnia.

Niniejszą pracę wykonałyśmy w oparciu literaturę podaną na końcu pracy, jednakże niektóre zagadnienia są naszym własnym dziełem. W zadaniu na obliczenie pola obszaru pod cykloidą samodzielnie udowodniłyśmy równość pól: trójliniowca ACD i trójliniowca ABC. W tym samym zadaniu wykazałyśmy, że pole trójkąta ABC jest dwa razy większe od pola półkola o średnicy BC.

Praca z zastosowaniem Zasady Cavalieriego dała nam dużo satysfakcji, a co najważniejsze dała nam odpowiedź na nurtujące nas pytanie o uzasadnienie wzoru na objętość kuli.

Spis literatury

[1] *Miniatury Matematyczne „Od Archimedesa do…”*, Komitet Organizacyjny Konkursu „Kangur Matematyczny”.
[2] *„Nauczanie matematyki przez pryzmat jej historii”,* materiały konferencyjne z dwudniowej konferencji OK SNM, Kraków 28-29 listopada 2003,
[3] Szkolny skrypt: *„Zbiorek zadań dla uczniów zainteresowanych matematyką”,* Iwona Sitnik-Szumiec