

ZASTOSOWANIE RACHUNKU LICZB ZESPOŁONYCH DO ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ DOTYCZĄCYCH RUCHU WSKAZÓWEK ZEGARA.

Autor: Olga Stec
ul. Źródlana 18b
33-100 Tarnów
uczennica III LO im. Adama Mickiewicza
w Tarnowie

Opiekun: mgr Jerzy Pantera
ul. Prostopadła 4/51
33-100 Tarnów

Tarnów
15 luty 2012

SKĄD POMYSŁ?

Podczas lekcji fizyki rozwiązywaliśmy zadania z ruchu po okręgu, w tym również ciekawe zadania dotyczące zegarów i ruchu ich wskazówek. Typowe zadania tego rodzaju dotyczą ruchu obiegowego wskazówek, ale mnie zainteresowała zmienność odległości między ich końcami. Zauważyłam, że odległość między końcami wskazówek można potraktować jako wektor przemieszczenia między punktami, których wektorami położenia są wskazówki minutowa i godzinowa.

Rozwiązywaliśmy kilka takich przykładów korzystając z twierdzenia Pitagorasa oraz twierdzenia cosinusów.

Nauczyciel wspomniał, że trudno będzie wskazać w ten sposób ogólny wzór na zależność odległości między końcami wskazówek od czasu i wspomniał, że wskazówki można traktować jak wektory wirujące i może ewentualne zastosowanie liczb zespolonych przyniosło by efekt. Ponieważ nadeszły ferie świąteczne miałam czas poznać rachunek liczb zespolonych, który nie sprawił mi kłopotów – Internet był dla mnie źródłem wiedzy o własnościach tych liczb i różnych ich postaciach – kanonicznej, trygonometrycznej i wykładniczej. Aby się dowiedzieć czegoś więcej o wektorach wirujących odwiedziłam bibliotekę, wypożyczyłam książkę z elektrotechniki, gdzie była informacja na ten temat i zabrałam się do pracy.

Na kolejne zajęcia zaniiosłam alternatywne rozwiązania nauczycielowi, który był mile zaskoczony, docenił mój trud i zaproponował aby jeszcze raz nową metodą rozwiązać zadania z niemieckiego zbioru zadań H. Lindnera. Udało się je łatwo rozwiązać rachunkiem liczb zespolonych przy czym w jednym rozwiązaniu znalazłam błąd autora (zadanie 217). Mój pomysł na zadania dotyczące wskazówek zegara tak bardzo spodobał się panu od fizyki, że zaproponował mi napisanie pracy na konkurs prac matematycznych.

Poniższa praca jest owocem moich starań o znalezienie ogólnej metody podejścia do zadań ze wskazówkami zegarów.

LICZBY ZESPOLONE:

Liczby zespolone można interpretować jako punkty na płaszczyźnie $\underline{z} = a + ib$ gdzie a oznacza współrzędną tej liczby $\underline{z}$ na osi rzeczywistej (na osi odciętych), b współrzędną liczby $\underline{z}$ na osi urojonej (na osi rzędnych). a nazywamy częścią rzeczywistą liczb zespolonej $\underline{z}$, b częścią urojoną liczby zespolonej $\underline{z}$

$$a = \operatorname{re} \underline{z} ; \quad b = \operatorname{im} \underline{z}$$

I. Własności liczb zespolonych:

1) Postać kanoniczna(algebraiczna):

$$\underline{z} = a + ib$$

z- liczba zespolona

a- część rzeczywista liczby zespolonej

b- część urojona liczby zespolonej

i- jednostka liczby zespolonej ($i^2 = -1$)

} $\in \mathbb{R}$

➤ dla takiej postaci liczby zespolonej możemy określić moduł:

$$|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

➤ również dla takiej postaci liczby zespolonej możemy zapisać liczbę sprzężoną:

$$\overline{\underline{z}} = a - bi$$

2) Postać trygonometryczna:

$z = a + bi$ w postaci trygonometrycznej $\Leftrightarrow$

$$z = |\underline{z}| (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

- $|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

φ - argument liczby zespolonej (umowa: $\varphi > 0$ gdy kąt φ zakreślony jest przeciwnie do ruchu wskazówek zegara; $\varphi < 0$ gdy kąt φ zakreślony jest zgodnie z ruchem wskazówek zegara)

$$\cos\varphi = a / |\underline{z}|$$

$$\sin\varphi = b / |\underline{z}|$$

Gdy $\varphi \in (0, 2\pi)$ to φ jest argumentem głównym.

3) Postać wykładnicza:

$$z = a + bi \text{ w postaci wykładniczej } \Leftrightarrow \underline{z} = |\underline{z}| e^{i\varphi}$$

φ - argument liczby zespolonej

$|\underline{z}|$ - moduł liczby zespolonej

$e \approx 2,718...$

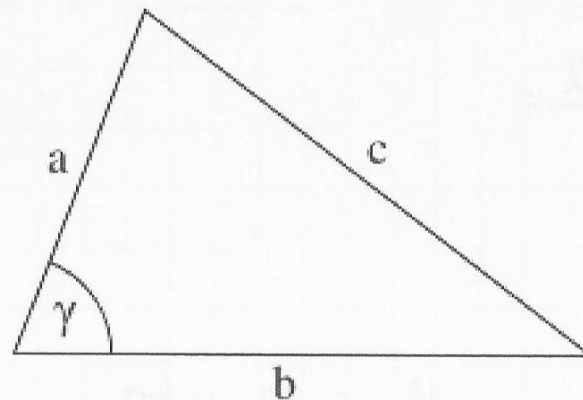
- **Pojęcie wektora wirującego:** Ponieważ wyrażenie $\underline{A} = |\underline{A}| e^{i\alpha}$ przedstawia odcinek o długości A , który tworzy z dodatnim kierunkiem osi liczb rzeczywistych kąt α , więc wyrażenie $\underline{A} = |\underline{A}| e^{i\omega t}$ reprezentuje odcinek A wirujący ze stałą w czasie t prędkością kątową ω .

Wskaźówki zegara stanowią doskonały przykład takich wirujących wektorów i dlatego można liczby zespolone zastosować do rozwiązywania zadań fizycznych.

Twierdzenia, które mogą się przydać do rozwiązywania zadań z zegarami:

- twierdzenie cosinusów:

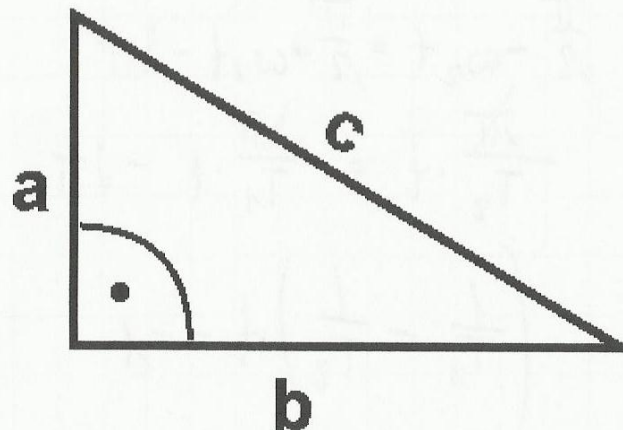
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



- twierdzenie Pitagorasa:

- to szczególny przypadek twierdzenia cosinusów, gdy $\gamma = \pi/2$ to $c^2 = a^2 + b^2$

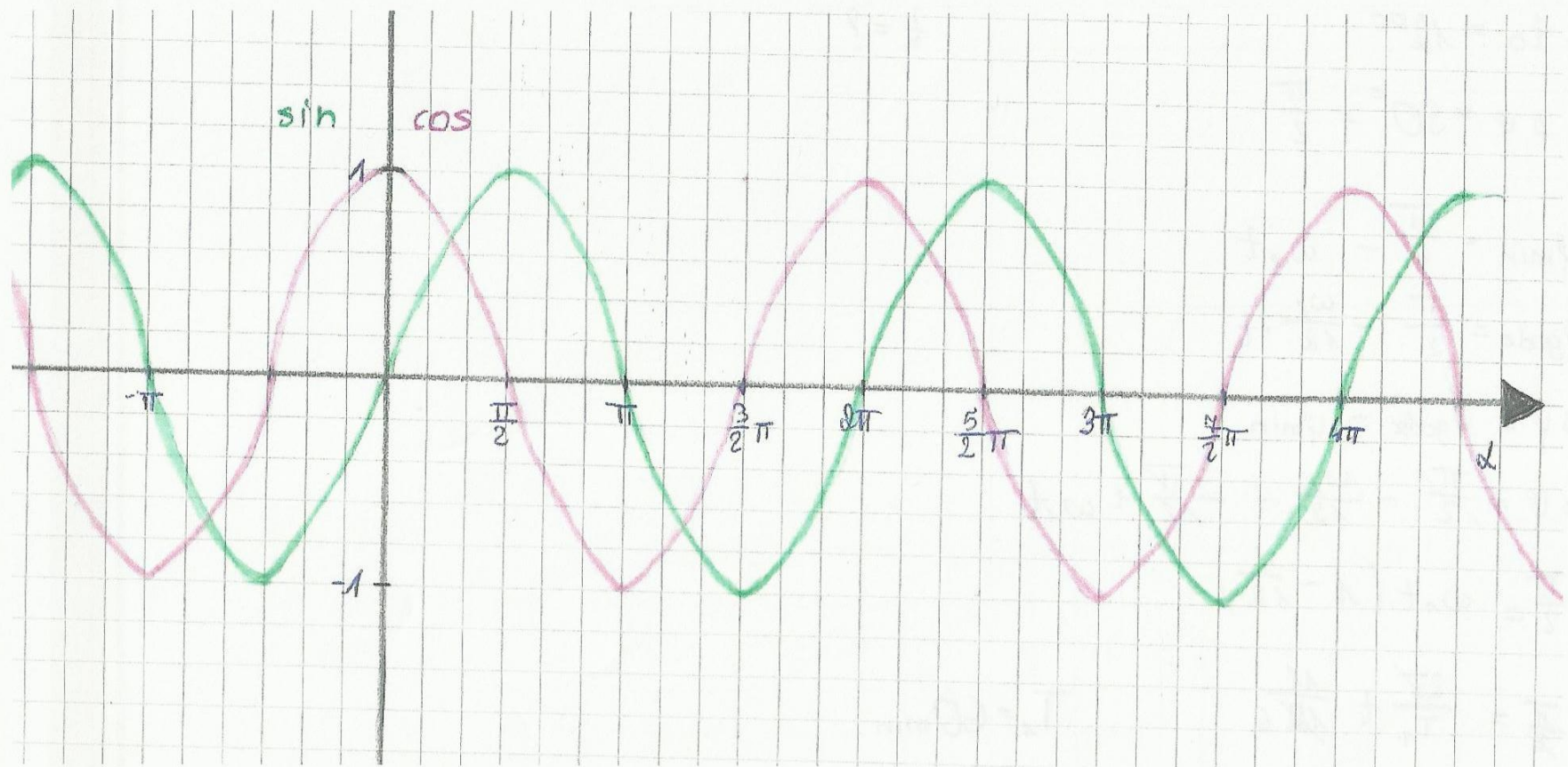
$$\cos \pi/2 = 0$$



Zależności, które mogą się przydać do rozwiązywania zadań fizycznych za pomocą liczb zespolonych:

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

α	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin \alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—



PRZYKŁADOWE ZADANIA Z LICZBAMI ZESPOLONYMI:

Zadanie 1. Znajdź takie liczby rzeczywiste a i b , aby zachodziła równość:

$$a(2+3i)+b(4-5i)=6-2i$$

Przykładowe rozwiązanie:

$$a(2+3i)+b(4-5i)=6-2i$$

$$(2a+3ai)+(4b-5bi)=6-2i$$

$$(2a+4b)+(3ai-5bi)=6-2i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a+4b=6 \\ 3a-5b=-2 \end{array} \right. \longrightarrow a=(6-4b)/2 = 3-2b$$

$$3a-5b=-2$$

$$3(3-2b)+5b=-2$$

$$9-6b-5b=-2$$

$$-11b=-11$$

$$b=1$$

$$a=3-2=1$$

$$a=b=1$$

Zadanie 2. Przedstaw w postaci algebraicznej
następujące liczby zespolone:

$$\begin{aligned} & \circ (2+i) \cdot (4-i) + (1+2i) \cdot (3+4i) = \\ & = (8-2i+4i-i^2) + (3+4i+6i+8i^2) = \\ & = [8+2i-(-1)] + [3+10i+(-1)] = \\ & = (9+2i) + (-5+10i) = \\ & = (9-5) + (2i+10i) = \\ & = 4+12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \circ [(3+i) \cdot (7-6i)] / (3+i) = \\ & = [[(3+i) \cdot (7-6i)] / (3+i)] \cdot [(3-i)/(3-i)] = \\ & = [9 \cdot (7-6i)] / 9 = \\ & = 7-6i \end{aligned}$$

Zadanie 3. Przetwórz w postaci algebraicznej kwadraty z następujących liczb zespolonych :

a) i ,

b) $-i$,

c) $8+6i$,

d) $-11+60i$,

e) $-15-8i$,

ad.a. $i^2 = -1$

ad.b. $(-i)^2 = -1$

ad.c. $(8+6i)^2 = 64+96i-36=28+96i$

ad.d. $[-(11-60i)]^2 = 121-1320i-3600 = -3479-1320i = -(3479+1320i)$

ad.e. $[-(15+8i)]^2 = 225+240i-64 = 161+240i$

Zadanie 4. Przedstaw następujące liczby zespolone w postaci trygonometrycznej :

$$\text{a) } 4 - 4i = \sqrt{4^2 + 4^2} \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) = \sqrt{32} \cos\varphi + \sqrt{32} i \sin\varphi$$

$$\text{b) } -\sqrt{2} + \sqrt{2} i = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) = \sqrt{2+2} \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) = 2\cos\varphi + 2i \sin\varphi$$

Zadanie 5. Przedstaw następujące liczby zespolone w postaci wykładniczej :

$$\text{a) } \underline{z} = 2[\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)]$$

$$\underline{z} = 2e^{(\pi/3)i}$$

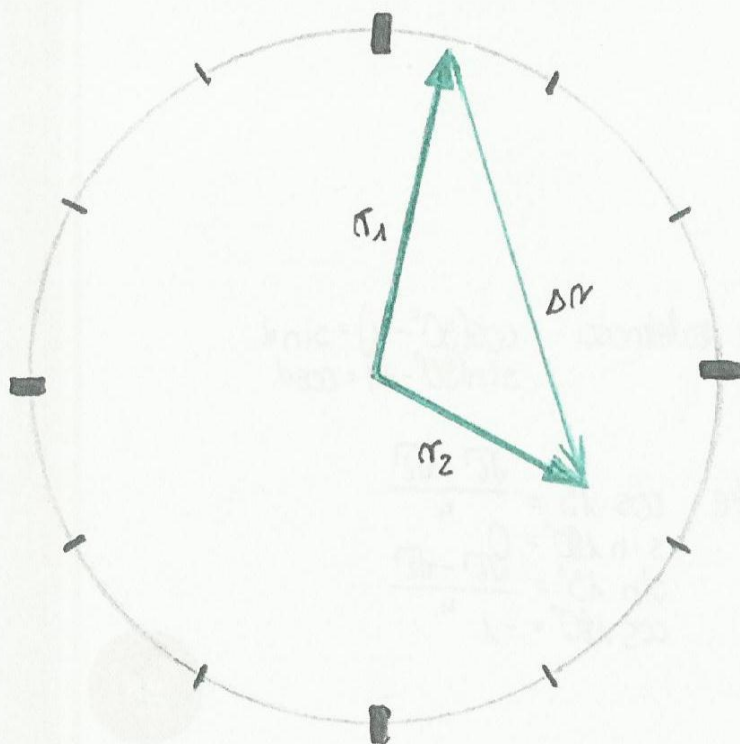
$$\text{b) } \underline{z} = i4 = 4\cos\varphi + 4i\sin\varphi ; \cos\varphi = 0 \text{ i } \varphi = \pi/2$$

$$\underline{z} = 4e^{(\pi/2)i}$$

MOJE ZAGADNIENIE:

Jak zależy od czasu odległość między końcami wskazówek godzinowej i minutowej w zegarze.

$$\Delta r(t)=?$$



r_1 - długość wskazówki minutowej
 r_2 - długość wskazówki godzinowej
 Δr - odległość między końcami wskazówek

Aby wykazać, że do obliczeń odległości między końcami wskazówek zegara można użyć liczb zespolonych pokażę, że wartość $|\vec{\Delta r}|$ wektora określającego różnicę między wektorami $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_1$ wskazówek zegara (godzinowej i minutowej) obliczona geometrycznie i rachunkiem liczb zespolonych jest taka sama:

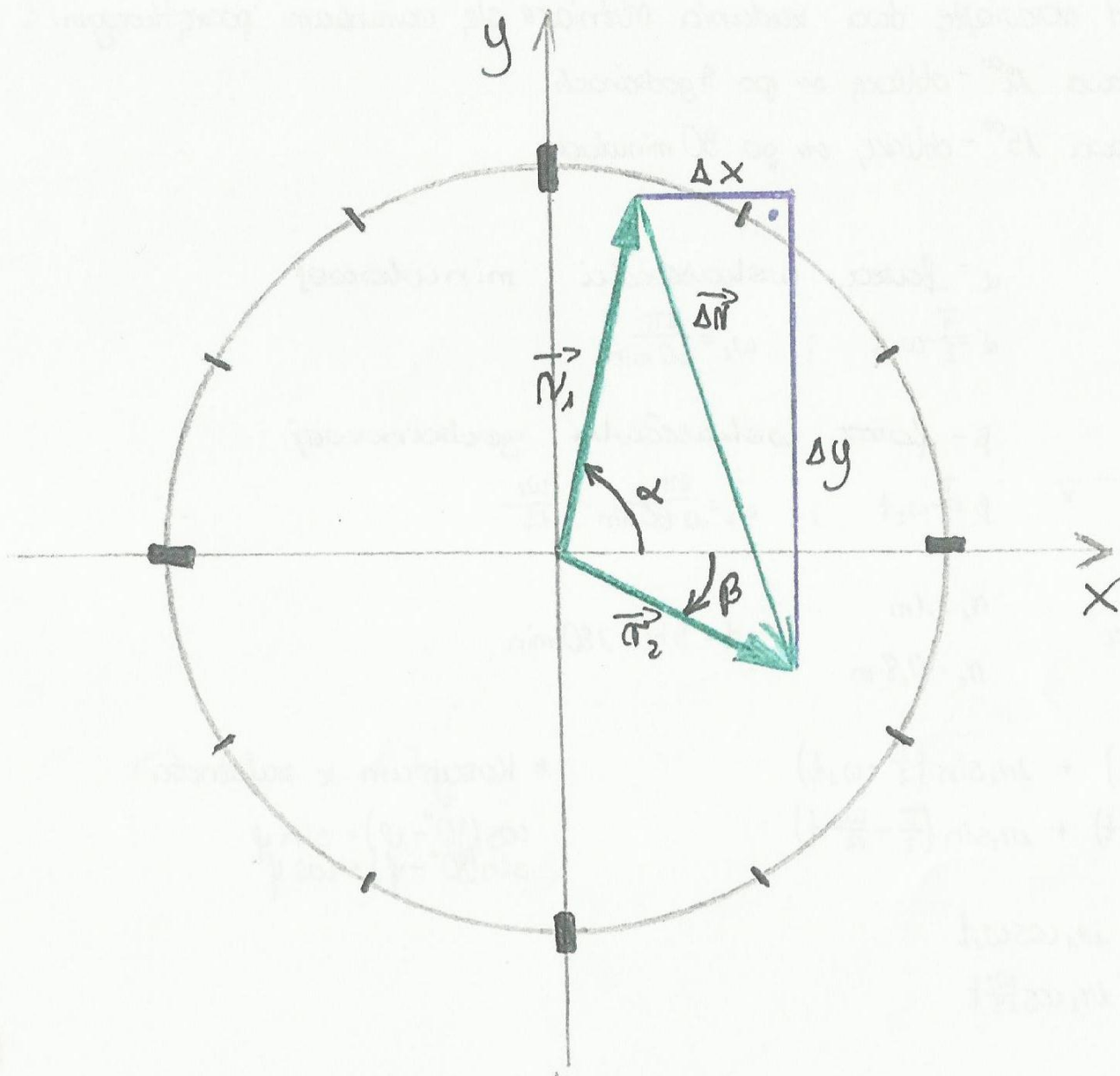
a) obliczam $|\vec{\Delta r}|$ metodą geometryczną (wektorową) :

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{\Delta r} \Rightarrow \vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Współrzędnymi wektora $\vec{\Delta r}$ są Δx i Δy ($x_2 - x_1$ i $y_2 - y_1$)

$$(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \left(\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right)$$



b) obliczam $|\Delta \underline{r}|$ jako moduł liczby zespolonej (wskazówki zegara traktujemy jako wektory wirujące na płaszczyźnie zespolonej):

$$\underline{r}_1 = r_1 \cos \alpha + i r_1 \sin \alpha \rightarrow \underline{r}_1 = x_1 + i y_1$$

$$\underline{r}_2 = r_2 \cos (-\beta) + i r_2 \sin (-\beta)$$

$$\underline{r}_2 = r_2 \cos \beta - i r_2 \sin \beta \rightarrow \underline{r}_2 = x_2 - i y_2$$

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$$

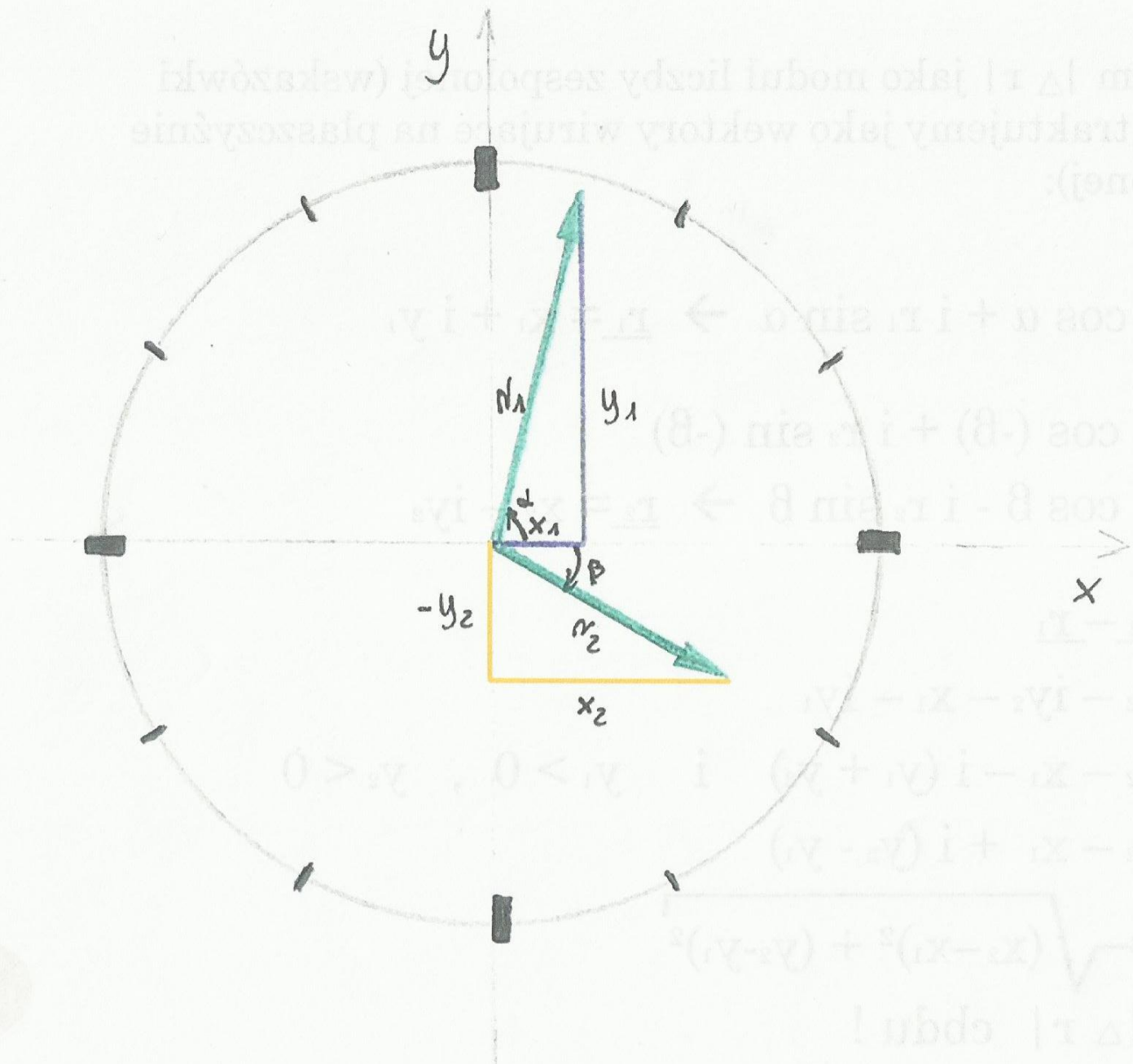
$$\Delta \underline{r} = x_2 - i y_2 - x_1 - i y_1$$

$$\Delta \underline{r} = x_2 - x_1 - i (y_1 + y_2) \quad \text{if} \quad y_1 > 0, \quad y_2 < 0$$

$$\Delta \underline{r} = x_2 - x_1 + i (y_2 - y_1)$$

$$|\Delta \underline{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\Delta r = |\Delta \underline{r}| \quad \text{cbdu!}$$

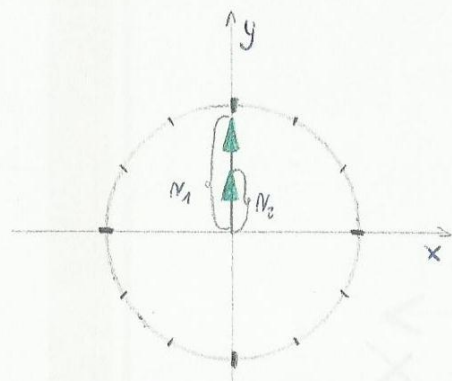


Jako przykład rozwiążemy dwa zadania różniące się warunkami początkowymi:

1) chwila początkowa 12^{oo} - obliczę Δr po 3 godzinach.

2) chwila początkowa 15^{oo} - obliczę Δr po 30 minutach.

ad. 1.



chwila początkowa

α - faza wskazówki minutowej

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \omega_1 t \quad ; \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{60 \text{ min}}$$

β - faza wskazówki godzinowej

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \omega_2 t \quad ; \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{12 \cdot 60 \text{ min}} = \frac{\omega_1}{12}$$

$$r_1 = 1 \text{ m}$$

$$r_2 = 0,8 \text{ m}$$

$$\Delta t = 3 \text{ h} = 180 \text{ min}$$

$$\underline{r_1} = r_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t\right) + i r_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t\right)$$

$$\underline{r_2} = r_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_1}{12} t\right) + i r_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_1}{12} t\right)$$

* Korzystam z zależności:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \varphi) &= \sin \varphi \\ \sin(90^\circ - \varphi) &= \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\underline{r_1} = r_1 \sin \omega_1 t + i r_1 \cos \omega_1 t$$

$$\underline{r_2} = r_2 \sin \frac{\omega_1}{12} t + i r_2 \cos \frac{\omega_1}{12} t$$

$$\underline{\Delta r} = \underline{r_2} - \underline{r_1}$$

$$\underline{\Delta r}(t) = r_2 \sin \frac{\omega_1}{12} t + i r_2 \cos \frac{\omega_1}{12} t - r_1 \sin \omega_1 t - i r_1 \cos \omega_1 t$$

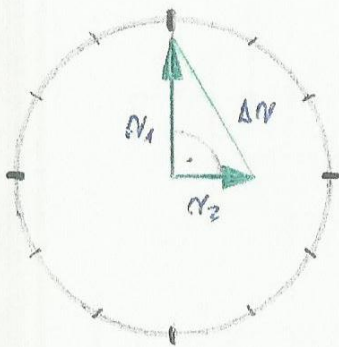
$$\underline{\Delta r}(t) = r_2 \sin \frac{\omega_1}{12} t - r_1 \sin \omega_1 t + i \left(r_2 \cos \frac{\omega_1}{12} t - r_1 \cos \omega_1 t \right)$$

$$\underline{\Delta r}(3h) = 0,8m \cdot \sin \frac{1 \cdot 2\pi}{12 \cdot 60 \text{ min}} \cdot 180 \text{ min} - 1m \cdot \sin \frac{2\pi}{60 \text{ min}} \cdot 180 \text{ min} + i \left(0,8m \cdot \cos \frac{1 \cdot 2\pi}{12 \cdot 60 \text{ min}} \cdot 180 \text{ min} - 1m \cdot \cos \frac{2\pi}{60 \text{ min}} \cdot 180 \text{ min} \right)$$

$$\underline{\Delta r}(3h) = 0,8m \cdot 1 - 1m \cdot 0 + i(0,8m \cdot 0 - 1m \cdot 1) = 0,8m + i(-1m)$$

$$|\underline{\Delta r}| = \sqrt{(0,8m)^2 + (-1m)^2} = \sqrt{0,64m^2 + 1m^2} = \sqrt{1,64} m \approx 1,281 m$$

Weryfikacja wyniku:



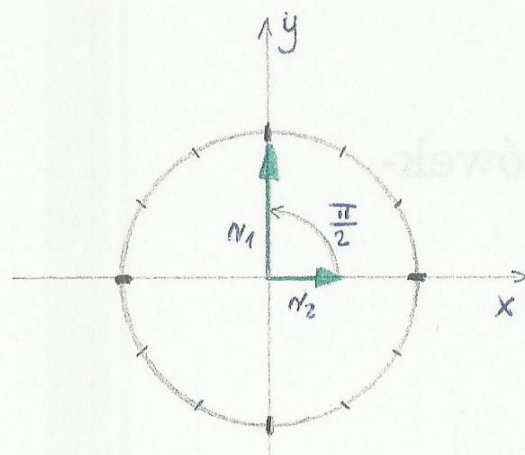
Wskaźniki o godz. 3⁰⁰ są do siebie prostopadłe - mogą więc zweryfikować wynik posługując się twierdzeniem Pitagorasa.

$$\underline{\Delta r} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{(1m)^2 + (0,8m)^2} = \sqrt{1,64} m = 1,281 m$$

3h po chwili początkowej

$$\Delta r = |\underline{\Delta r}|$$

ad. 2.



chwila początkowa 3^{oo}

φ_1 - faza wektora minutowej

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \omega_1 t \quad ; \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{60 \text{ min}}$$

φ_2 - faza wektora godzinowej

$$\varphi_2 = -\omega_2 t \quad ; \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{12 \cdot 60 \text{ min}} = \frac{\omega_1}{12}$$

$$r_1 = 1 \text{ m}$$

$$r_2 = 0,8 \text{ m}$$

$$\Delta t = 30 \text{ min}$$

$$\underline{r_1} = r_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t\right) + i r_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t\right)$$

$$\underline{r_2} = r_2 \cos(-\omega_2 t) + i r_2 \sin(-\omega_2 t)$$

$$\underline{r_1} = r_1 \sin \omega_1 t + i r_1 \cos \omega_1 t$$

$$\underline{r_2} = r_2 \cos \frac{\omega_1}{12} t - i r_2 \sin \frac{\omega_1}{12} t$$

$$\underline{\Delta r} = \underline{r_2} - \underline{r_1}$$

* Korzystam z zależności: $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
 $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

* Wzrostam że: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
 $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
 $\cos 180^\circ = -1$

$$\underline{\Delta r}(t) = r_2 \cos \frac{\omega_1}{12} t - i r_2 \sin \frac{\omega_1}{12} t - r_1 \sin \omega_1 t - i r_1 \cos \omega_1 t$$

$$\underline{\Delta r}(t) = r_2 \cos \frac{\omega_1}{12} t - r_1 \sin \omega_1 t - i \left(r_2 \sin \frac{\omega_1}{12} t + r_1 \cos \omega_1 t \right)$$

$$\underline{\Delta r}\left(\frac{1}{2}h\right) = 0,8m \cdot \cos \frac{2\pi}{12 \cdot 60 \text{ min}} \cdot 30 \text{ min} - 1m \sin \frac{2\pi}{60 \text{ min}} \cdot 30 \text{ min} - i \left(0,8m \sin \frac{2\pi}{12 \cdot 60 \text{ min}} \cdot 30 \text{ min} + 1m \cos \frac{2\pi}{60 \text{ min}} \cdot 30 \text{ min} \right)$$

$$\underline{\Delta r}\left(\frac{1}{2}h\right) = 0,8m \cdot \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{4} - i \left(0,8m \cdot \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{4} + 1m \cdot (-1) \right)$$

$$\underline{\Delta r}\left(\frac{1}{2}h\right) = 0,443m - i(-0,493m) = 0,443m + i(0,493m)$$

$$|\underline{\Delta r}| = \sqrt{(0,443m)^2 + (0,493m)^2} \approx 1,11m$$

Weryfikacja wyniku:

Wskaźniki zegara o godz 15³⁰ tworzą kąt mniejszy od 90°, więc do obliczenia Δr mogę zastosować twierdzenie cosinusów.

$$\gamma = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

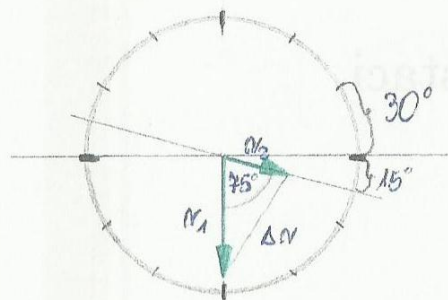
$$\text{zauważam że: } \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$(\underline{\Delta r})^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos \gamma$$

$$\underline{\Delta r} = \sqrt{(1m)^2 + (0,8m)^2 - 2 \cdot 1m \cdot 0,8m \cdot \cos 75^\circ}$$

$$\underline{\Delta r} = \sqrt{1m^2 + 0,64m^2 - 1,6m^2 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\underline{\Delta r} = \sqrt{1,226} m \approx 1,11m$$

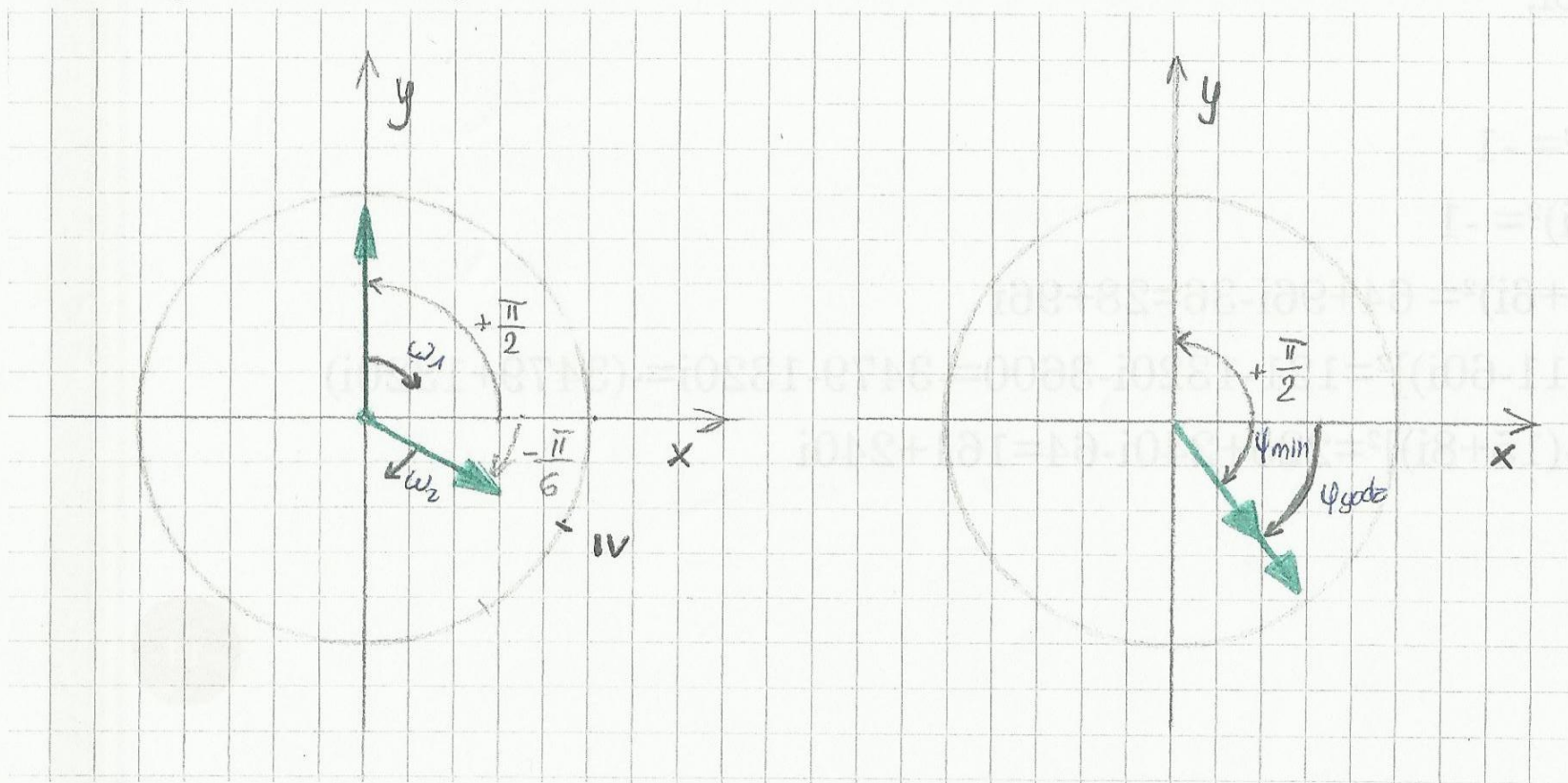


$\frac{1}{2}h$ po chwili przekształcaj

$$\Delta r = |\underline{\Delta r}|$$

TYPOWE ZADANIA DOTYCZĄCE WSKAZÓWEK ZEGARA ZE ZBIORU ZADAŃ:

Zadanie 215. Po jakim czasie od godz. 4:00
wskazówka minutowa po raz pierwszy dopędzi
godzinową?



- W chwili gdy wskazówki pokryją się ich argumenty główne (wskazówki traktujemy jako wirujące wektory) będą jednakowe.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\min} &= +\frac{\pi}{2} - \omega_1 t \\ \varphi_{\text{godz}} &= -\frac{\pi}{6} - \omega_2 t \end{aligned} \right\} \varphi_{\min} = \varphi_{\text{godz}}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{12}$$

$$T_{\min} = 60 \text{ min}$$

$$\frac{\pi}{2} - \omega_1 t = -\frac{\pi}{6} - \frac{\omega_1}{12} \cdot t$$

$$\frac{3}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi = \left(\omega_1 - \frac{\omega_1}{12}\right) \cdot t$$

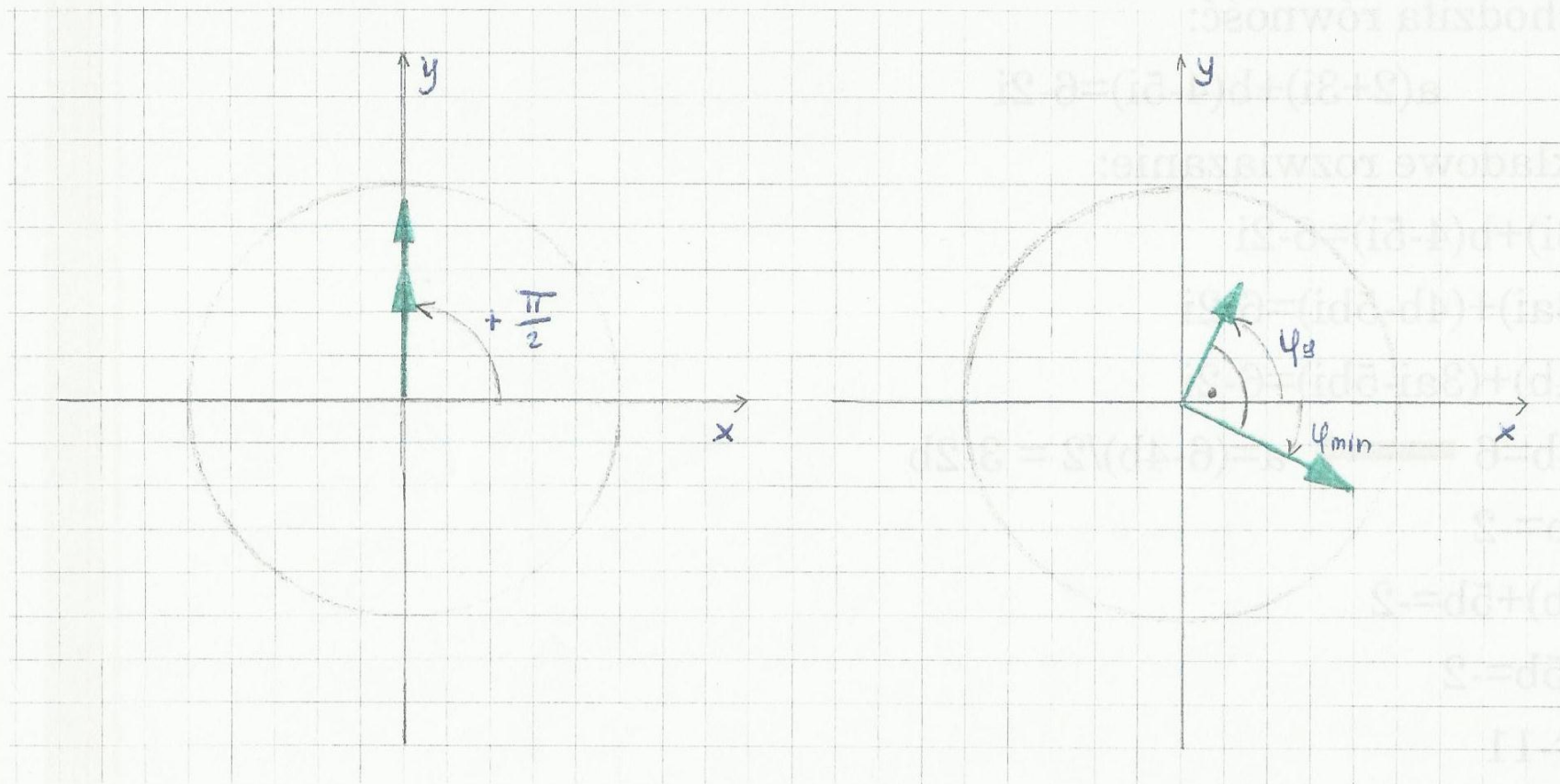
$$\frac{4}{6}\pi = \omega_1 \left(1 - \frac{1}{12}\right) \cdot t$$

$$\frac{24}{6\pi} = \frac{2\pi}{T_{\min}} \cdot \frac{11}{12} \cdot t$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{60 \text{ min}} \cdot \frac{11}{12} \cdot t$$

$$1 = \frac{11 t}{60 \text{ min} \cdot 4} \rightarrow t = \frac{240 \text{ min}}{11} = 21,82 \text{ min}$$

Zadanie 216. Która jest godzina jeżeli po przekroczeniu południa obie wskazówki tworzą dokładnie kąt prosty?



$$t_0 = 12^{\text{oo}}$$

$$t = ?$$

$$\Delta \varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_{\min} = \frac{\pi}{2} - \omega_1 t$$

$$\varphi_{\text{gcdz}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_1}{12} \cdot t$$

$$\Delta \varphi = \varphi_{\text{gcdz}} - \varphi_{\min}$$

$$\Delta \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_1}{12} \cdot t - \left(-\frac{\pi}{2} + \omega_1 t \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \omega_1 t \left(1 - \frac{1}{12} \right)$$

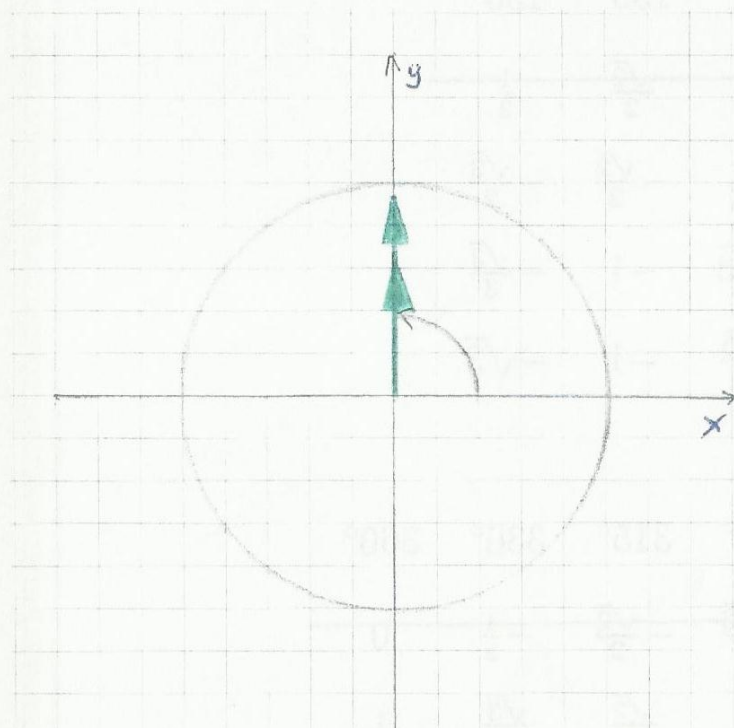
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{T_1} t + \frac{11}{12} 6$$

$$T_1 = 60 \text{ min}$$

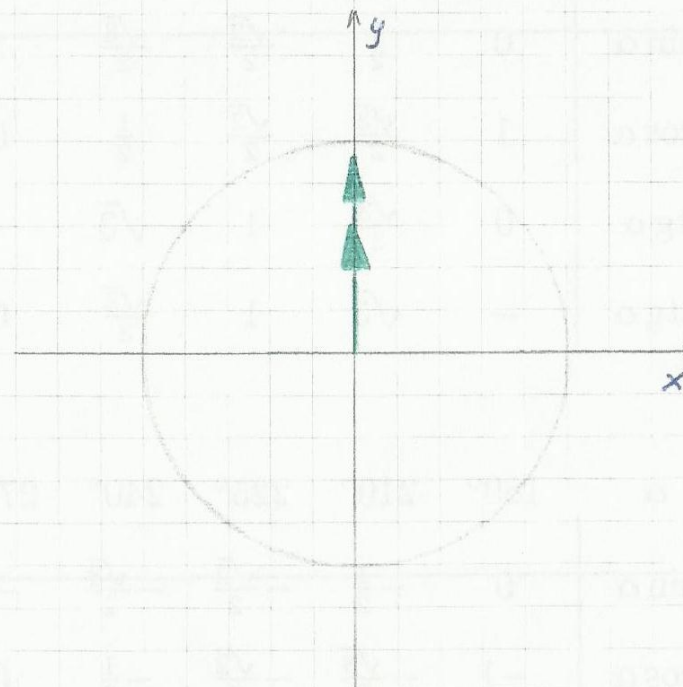
$$t = \frac{6 T_1}{22} = \frac{6 \cdot 60 \text{ min}}{22} =$$

$$= 16 \text{ min } 21,8 \text{ s}$$

Zadanie 217. Z dwóch zegarów, które jednocześnie wskazują godzinę 12^{00} , jeden spieszy o $1,5s$ w ciągu każdej minuty. Jaki czas musi upłynąć, aby oba zegary ponownie, jednocześnie wskazały godzinę 12^{00} ?



zegar dokładny



zegar spieszący

$$T_{g1} = 12h$$

$$T_{g2} = 12h - 0,3h = 11,7h$$

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{1,5s}{min} = \frac{90s}{h} = \\ &= \frac{1,5min}{h} = \frac{1,5min \cdot 12}{12h} = \\ &= \frac{18min}{12h} = \frac{0,3h}{12h} \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 - 2\pi$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \omega_1 t$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \omega_2 t$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \omega_2 t &= \frac{\pi}{2} - \omega_1 t - 2\pi \\ -\frac{2\pi}{T_2} \cdot t &= -\frac{2\pi}{T_1} \cdot t - 2\pi \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \cdot t = -1$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - n 2\pi$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{\pi}{2} - (n+1)2\pi = \\ &= \frac{\pi}{2} - n 2\pi - 2\pi \end{aligned}$$

n - liczba obrotów

$(n+1) \rightarrow$ ponieważ zegar spieszczy musi wychylić 1 obrot wskazówki więcej

Obie fazy φ_2 i φ_1 są ujemne, ale faza φ_2 różni się o kąt 2π ze względu na ruch wskazówek zegara (a taki kąt jest ujemny).

$$t = \frac{-1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = \frac{1}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} = \frac{T_2 T_1}{T_1 - T_2}$$

$$t = \frac{11,4 \text{ h} \cdot 12 \text{ h}}{0,3 \text{ h}} = 11,4 \text{ h} \cdot 40 = 468 \text{ h}$$

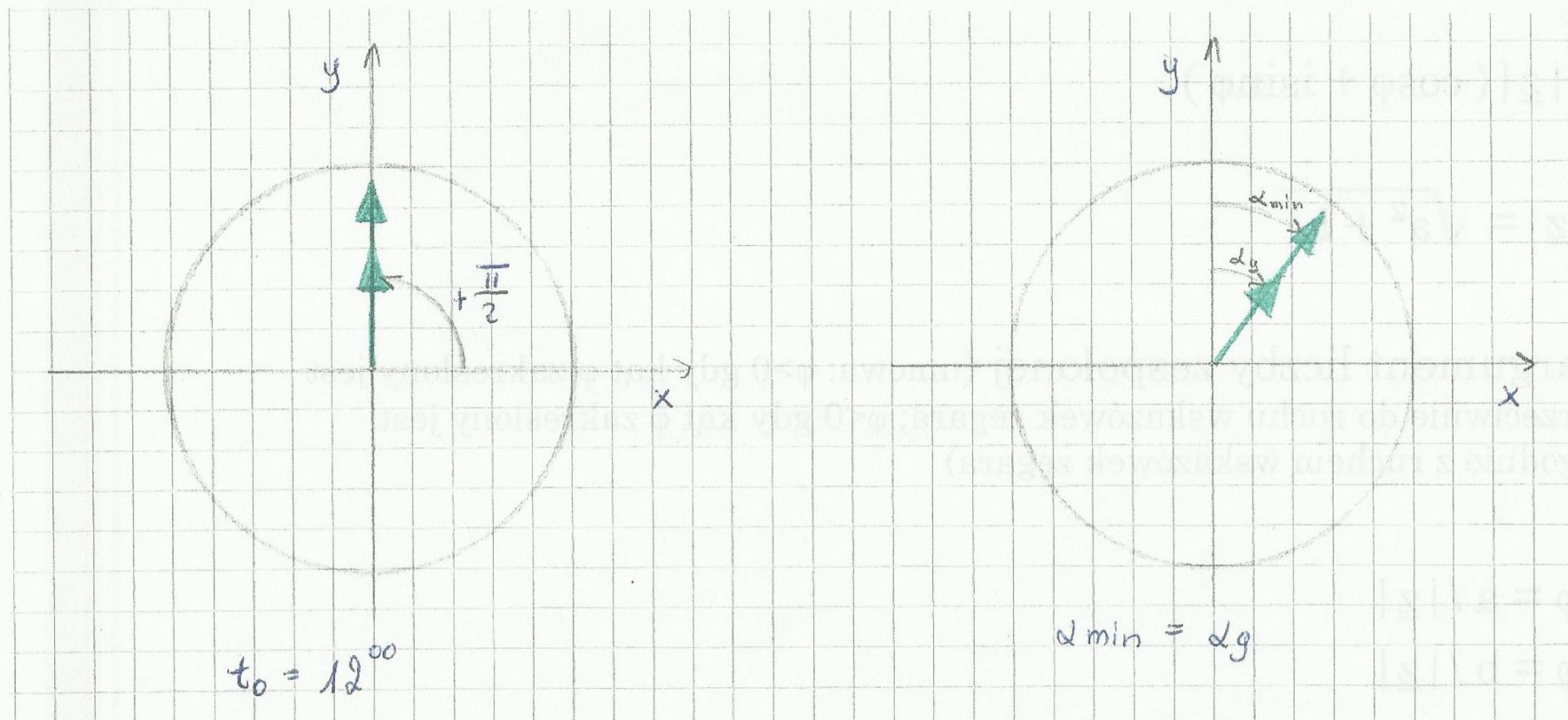
$$\frac{\pi}{2} - n \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T_1} \cdot t$$

$$n = \frac{t}{T_1} = \frac{468 \text{ h}}{12 \text{ h}} = 39$$

$$n+1 = 40$$

* Oba zegary wskazały jednocześnie godzinę 12⁰⁰ po upływie 468 h czyli po 19,5 dobach. Zegar spieszący wykona o jeden obieg więcej czyli wg. jego wskazówek czas jaki upłynął wynosi 40 · 12 = 480 h czyli 20 dob. (Autor zbioru dał odpowiedź, że oba zegary wskazały jednocześnie 12⁰⁰ po 20 dobach, ale przecież taki czas pokazuje zegar spieszący się.)

Zadanie 218. Obie wskazówki pewnego zegara wskazują godzinę 12^{00} . Po jakim czasie pokryją się wskazówki po raz kolejny?



$$\varphi_{\min} = \frac{\pi}{2} - \omega_1 t$$

$$\varphi_{\min} = \frac{\pi}{2} - (2\pi + \alpha)$$

$$\frac{\pi}{2} - \omega_1 t = \frac{\pi}{2} - (2\pi + \alpha)$$

$$\frac{2\pi}{60 \text{ min}} \cdot t = 2\pi + \alpha$$

$$\varphi_{\text{godz}} = \frac{\pi}{2} - \omega_2 t$$

$$\varphi_{\text{godz}} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\frac{\pi}{2} - \omega_2 t = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\frac{2\pi}{12 \cdot 60 \text{ min}} \cdot t = \alpha$$

$$\frac{2\pi}{60 \text{ min}} \cdot t = 2\pi + \frac{2\pi}{12 \cdot 60 \text{ min}} \cdot t$$

$$t \left(\frac{1}{60 \text{ min}} - \frac{1}{12 \cdot 60 \text{ min}} \right) = 1$$

$$t = \frac{1}{\frac{1}{60 \text{ min}} - \frac{1}{12 \cdot 60 \text{ min}}} = \frac{60 \text{ min}}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{60 \text{ min}}{\frac{11}{12}} = \frac{12}{11} \cdot 60 \text{ min} =$$

$$= 1 \text{ h } 5 \text{ min } 27,3 \text{ s}$$

212. Bei einer Fluggeschwindigkeit von 420 km/h legt die Nabe der Luftschraube während jeder Umdrehung die Strecke 3,6 m zurück. Welche Drehzahl hat die Luftschraube?

213. Die Spitze des Minutenzeigers einer Turmuhr hat die Geschwindigkeit 1,5 mm/s. Wie lang ist der Zeiger?

214. Eine Taschenuhr läßt sich als „Kompaß“ benutzen. Wenn man den kleinen Zeiger in Richtung zur Sonne hält, liegt die Südrichtung stets in der Mitte zwischen der 12 und dem kleinen Zeiger. Wie läßt sich dies erklären?

- **215.** Wieviel Minuten nach 4 Uhr holt der Minutenzeiger den Stundenzeiger zum ersten Mal ein?
- **216.** Wieviel Uhr ist es, wenn nach Überschreiten der Mittagszeit beide Zeiger genau einen rechten Winkel bilden?
- **217.** Von zwei Uhren, die gleichzeitig auf 12 Uhr zeigen, geht die eine je Minute um 1,5 s vor. Welche Zeit wird vergehen, bis beide Uhren wieder gleichzeitig auf 12 Uhr zeigen?
- **218.** Beide Zeiger einer Uhr stehen auf der Zwölf. Nach welcher Zeit decken sich die beiden Zeiger zum zweiten Mal?

219. (Bild 98) Zwei auf eine Transmission wirkende Treibriemen laufen mit der Geschwindigkeit $v_1 = 8$ m/s bzw. $v_2 = 5$ m/s. Die Durchmesser der Riemenscheiben unterscheiden sich um 15 cm. Welche Durchmesser und welche Drehzahl haben die fest miteinander verbundenen Scheiben?

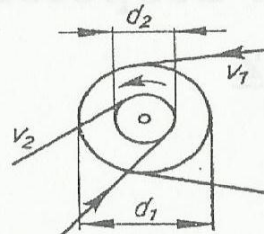


Bild 98

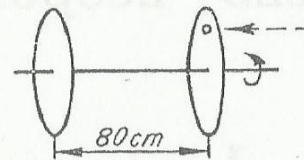


Bild 99

220. Bei einem Unfall geht die Riemenscheibe eines Motors zu Bruch. Ein Stück ihres Umfanges ($d = 12$ cm) fliegt 65 m senkrecht in die Höhe. Welche Drehzahl hatte der Motor?

221. (Bild 99) Zur Bestimmung der Geschwindigkeit eines Geschosses wird dieses durch zwei Pappscheiben geschossen, die im Abstand von 80 cm auf gemeinsamer Welle mit der Drehzahl $n = 1500$ 1/min rotieren. Welche Geschwindigkeit ergibt sich, wenn die beiden Durchschußstellen um 12° gegeneinander versetzt sind?

PODSUMOWANIE I WNIOSKI:

- Podsumowanie:

Tematem mojej pracy jest „Zastosowanie rachunku liczb zespolonych do rozwiązania zadań dotyczących ruchu wskazówek zegara”. W pracy przedstawiłam ogólne objaśnienie co to są liczby zespolone oraz jakie są różne ich postaci i własności. Umieściłam tu również wyjaśnienie pojęcia wektora wirującego, którego znajomość jest niezbędna do omawiania mojego zagadnienia, ponieważ wskazówki zegara to właśnie wektory wirujące. Korzystałam także z twierdzenia cosinusów, twierdzenia Pitagorasa oraz różnych zależności trygonometrycznych. Dzięki tej pracy

zyskałam nowe doświadczenie, nabyłam nową wiedzę jak również z łatwością rozwiązuję teraz zadania na lekcjach matematyki dotyczące wektorów, funkcji i kątów.

- Wnioski:

- 1) Zastosowanie liczb zespolonych pozwala łatwo uzyskać ogólne rozwiązania zadań dotyczących zegarów.
- 2) Bardzo podobne mogą być rozwiązania zadań dotyczących ruchu i wzajemnych odległości planet Układu Słonecznego.

SPIS LITERATURY:

- „Elektro technika dla mechaników” Eugeniusz Koziej;
- „Liczby i zmienne zespolone” W. Janowski, J. Kaczmariski;
- „Księga liczb” J.H. Conway, R.K. Guy;
- „MATEMATYKA. Poradnik encyklopedyczny” I. N. Bronsztejen, K. A. Siemiendiajew;
- „Physikalische Aufgaben” Helmut Lindner VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG;
- Internet

KONIEC