„Jeśli matematyka jest królową nauk, to
królową matematyki jest teoria liczb"
Carl Friedrich Gauss

O CIEKAWYCH WŁAŚCIWOŚCIACH LICZB TRÓJKĄTNYCH

OPRACOWANIE:

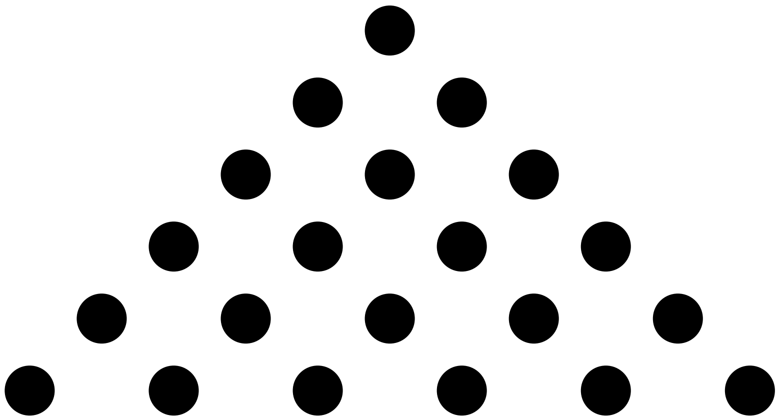
MATEUSZ OLSZAMOWSKI KL 6A,
ALEKSANDER SUCHORAB KL 6A
SZKOŁA PODSTAWOWA NR 109 KRAKÓW
UL. MACKIEWICZA 15   TEL.415 27 59

OPIEKUN:

MGR ZOFIA SZCZUR

Przygotowując się do różnego rodzaju konkursów poznawaliśmy na lekcji matematyki oraz na Kółku matematycznym liczby np. lustrzane, doskonałe, bliźniacze, kwadratowe, pierwsze, trójkątne i inne. Poznaliśmy ich własności i rozwiązywaliśmy zadania.
My w naszym referacie chcieliśmy bliżej zająć się liczbami trójkątnymi.
W swym dziele dotyczącym teorii liczb – jakbyśmy obecnie nazwali zawarte tam wiadomości – Nikomachos z Gerazy(I-II w. n. e.) przytacza wszystko, co o liczbach wiedzieli pitagorejczycy, a najprawdopodobniej również sam Pitagoras.
Pitagorejczycy przedstawiali liczby jako oddzielne punkty i – przez łączenie ich w odpowiednie grupy – wykrywali twierdzenia, bądź tworzyli nowe pojęcia.

Oto rysunek przedstawiający liczbę trójkątną jako zbiór punktów płaszczyzny.



Liczba przedstawiona na rysunku jest liczbą **21**.

Jest to liczba o ciekawych właściwościach. To tzw. liczba trójkątna, ponieważ jej punkty zgrupowane i ustawione odpowiednio dają kształt trójkątna równobocznego.

Kolejne liczby trójkątne będziemy oznaczać przez $\mathbf{t_n}$.

Kolejny numer n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 …
Liczba trójkątna t_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78 …

Łatwo zauważyć, że kolejne liczby trójkątne można obliczyć dodając do nich kolejne liczby naturalne.

Np.

$1 + 2 = 3$
$3 + 3 = 6$
$6 + 4 = 10$
$10 + 5 = 15$

Jak jednak obliczyć np. setną z kolei liczbę trójkątną?

Nikt przecież nie będzie liczył „na piechotę”.
Poniżej więc przedstawiamy wzór, przy czym t_n to liczba trójkątna, a n to odpowiadający jej numer.

$$t_n = n(n+1)/2$$

Wzór wyprowadzono na podstawie własności kolejnych liczb naturalnych od 1 do *n*. Wzór ten znano w starożytności. (prawdopodobnie ten wzór wymyślił mały C. F. Gauss nudząc się na lekcji matematyki) Podstawiając kolejne liczby naturalne 1, 2, 3, 4…, 12, otrzymamy liczby trójkątne zapisane w tabeli na poprzedniej stronie.

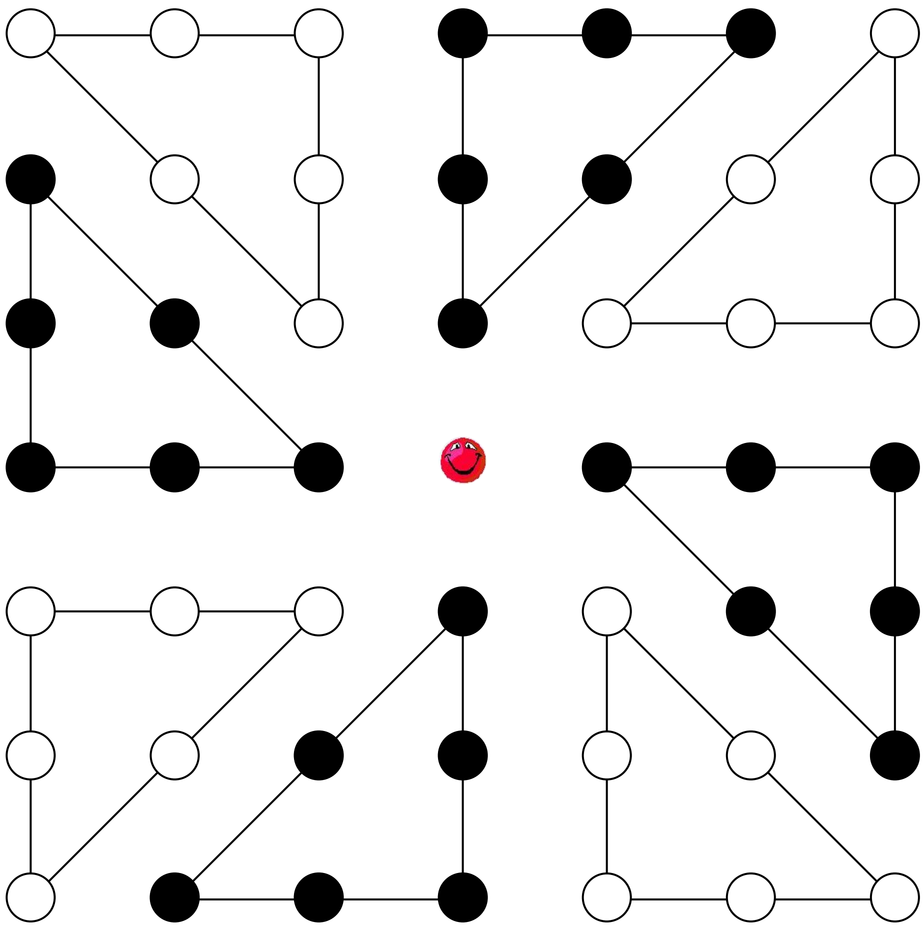
Obliczmy więc, 30-tą, 50-tą i 100-ną liczbę trójkątną.

n=30
½*30*(30+1) = 465
Odp.: Trzydziestą liczbą trójkątna jest liczba **465**.

n=50
½*50*(50+1) = 1275
Odp.: Pięćdziesiątą liczbą trójkątną jest liczba **1275**.

n=100
½*100*(100+1) = 5050.
Odp.: Setną liczbą trójkątną jest liczba **5050**.

Diofantos (druga poł. III w.) nazywany w średniowieczu „ojcem algebry” opisał liczby trójkątne w dziele „Arytmetyka” oraz wskazał na prawdziwość następującego twierdzenia: „Jeśli dowolną liczbę trójkątną pomnożymy przez 8 i powiększymy o 1 (oznaczone jako "☺"), to otrzymamy liczbę będącą kwadratem liczby naturalnej tj. liczbę kwadratową”. $\mathbf{t_{n}*8+1}$
Pokażemy to na rysunku:



Dzięki temu możemy stwierdzić czy dana liczba jest liczbą trójkątną, czy nią nie jest:

Jeśli po pomnożeniu danej liczby przez 8 i powiększeniu o 1 otrzymamy kwadrat liczy naturalnej, jest to liczba trójkątna np.

$6*8+1 = 49 = 7^2$

$28*8+1 = 225 = 15^2$

$66*8+1 = 529 = 23^2$

$1176*8+1 = 9409 = 97^2$

$9453*8+1 = 75625 = 275^2$

Pisząc powyższe przykłady zastanawialiśmy się: **Jak obliczyć, którą z kolei liczbą trójkątną jest dana liczba?** Wymyśliliśmy coś takiego:

Najpierw pomnóżmy liczbę przez 8 i dodajmy do niej 1, żeby powstał kwadrat liczby naturalnej. Następnie obliczmy jej pierwiastek 2-go stopnia, odejmijmy od tej liczby 1 i podzielmy przez 2:

A wzór wyglądałby tak:

$$\boldsymbol{n = (\sqrt{t_{n}*8+1}-1)/2}$$

Obliczmy, którą z kolei liczbą trójkątną jest: **6, 28, 66, 1176, 9453**

$(\sqrt{6*8+1}-1)/2 = (\sqrt{49}-1)/2 = (7-1)/2 = 3$
Odp.: 6 jest **3**-cią liczbą trójkątną.

$(\sqrt{28*8+1}-1)/2 = (\sqrt{225}-1)/2 = (15-1)/2 = 7$
Odp.: 28 jest **7**-mą liczbą trójkątną.

$(\sqrt{66*8+1}-1)/2 = (\sqrt{529}-1)/2 = (23-1)/2 = 11$
Odp.: 66 jest **11**-tą liczbą trójkątną.

$(\sqrt{1176*8+1}-1)/2 = (\sqrt{9409}-1)/2 = (97-1)/2 = 48$
Odp.: 1176 jest **48**-mą liczbą trójkątną.

$(\sqrt{9453*8+1}-1)/2 = (\sqrt{75625}-1)/2 = (275-1)/2 = 137$
Odp.: 9453 jest **137**-mą liczbą trójkątną.

Właściwości liczb trójkątnych

- Każda liczba naturalna o parzystej liczbie cyfr, których pierwsza połowa to same dwójki, a druga to same jedynki jest liczbą trójkątną.

  Np. 21, 2211, 222111, 22221111, 2222211111,… są takimi liczbami, więc są to liczby trójkątne

  t_{66} = 2211 = ½*66*(66+1) jest, więc 66-tą liczbą trójkątną.
  t_{666} = 222111 = ½*666*(666+1) jest, więc 666-tą liczbą trójkątną.
  t_{6666} = 22221111 = ½*6666*(6666+1) jest, więc 6666-tą liczbą trójkątną.

- Suma dowolnych dwóch kolejnych liczb trójkątnych jest kwadratem liczby naturalnej **(t_n+t_{n+1})**

  Przykład: $1+3 = 4 = 2^2$
  $3+6 = 9 = 3^2$
  $6+10 = 16 = 4^2$

  Ogólnie: $t_n = 1/2n\ (n+1)$
  $t_{n+1} = {}^1/_2\,(n+1) * ((n+1)+1)$
  $t_n+t_{n+1} = 1/2n(n+1) + {}^1/_2(n+1)*(n+2) = (n+1)*(1/2n + 1/2(n+2)) =$
  $(n+1)(1/2n+1/2n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2$

- Różnica kwadratów dowolnych dwóch kolejnych liczb trójkątnych to jest $t^2_{n+1} - t^2_n$ jest sześcianem liczby naturalnej.

  Przykład: $3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8 \quad 8 = 2^3$
  $6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \quad 27 = 3^3$

- Suma sześcianów kolejnych liczb naturalnych jest kwadratem liczby trójkątnej.
  $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = t^2_n$

  Przykład: $1 + 8 +27 = 36 = 6^2 = (t_3)^2$

Istnieją liczby trójkątne będące kwadratami liczb naturalnych.

Np. $36 = 6^2 = (t_3)^2$

Liczby o powyższej własności znane były już matematykowi szwajcarskiemu Eulerowi (1707-1783); wykazał on, że liczby postaci

$${}^1/_{32}((3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n)^2$$

dla dowolnej liczby naturalnej **n** są liczbami trójkątnymi będącymi kwadratami liczb naturalnych oraz, że każda liczba trójkątna będąca kwadratem da się przedstawić w tej postaci.

Przykład:

n = 1

$^1/_{32}((3+2\sqrt{2})^1-(3-2\sqrt{2})^1)^2 = {}^1/_{32}(3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2})^2 = {}^1/_{32}(4\sqrt{2})^2 = {}^1/_{32}*32 = 1 = 1^2$ jest liczbą trójkątną

n=2

$^1/_{32}((3+2\sqrt{2})^2-(3-2\sqrt{2})^2)^2 = {}^1/_{32}((9+12\sqrt{2}+8)-(9-12\sqrt{2}+8))^2 =$
$^1/_{32}(17+12\sqrt{2}-17+12\sqrt{2})^2 = {}^1/_{32}(24\sqrt{2})^2 = 36 = 6^2$ jest liczbą trójkątną

Poznając bliżej liczby trójkątne mieliśmy okazję poszerzyć naszą wiedzę na ten temat i prześledzić skomplikowane dla nas zapisy i nazwy. Ciekawe są przekształcenia algebraiczne. Nauczyliśmy się stosowania wzorów skróconego mnożenia na kwadrat sumy i kwadrat różnicy.
Poznaliśmy nazwiska wielu matematyków oraz głoszone przez nich teorie.
Zagadnienia teorii liczb były ciekawe i przyznamy, że matematyka jest faktycznie królową nauk.

Bibliografia:

1) "Z matematyką za pan brat" - Ryszard Jajte
Włodzimierz Krysicki