Wykorzystanie macierzy w programowaniu liniowym
Mateusz Pater

☛ WSTĘP

Poszukując odpowiedzi na pytania stawiane przez ekonomów, natrafia się na pewne problemy natury matematycznej, odzwierciedlające poszukiwane przez nas rozwiązania rzeczywistych zagadnień z naszego życia codziennego. Często poszukuje się warunków optymalnych – ekonomicznie opłacalnych, by dokonać wytworu jakiegoś dobra konsumpcyjnego przy jak najmniejszych kosztach, a co za tym idzie – jak największych zyskach. Gospodarka bowiem nastawiona jest raczej na racjonalny rozwój i wzrost poziomu życia obywateli, aniżeli zacofanie i popadanie w długi.

Optymalizacją problemów matematycznych zajmuje się tzw. programowanie matematyczne. W mojej pracy pragnę przybliżyć czytelnikowi jeden z rodzajów programowania matematycznego – programowanie liniowe, stosowane do rozwiązywania układów równań i nierówności liniowych, oparte na działaniach na tablicach liczb, czyli macierzach, od których opisywania rozpocznę. Jako, że jestem bardzo nieufny do twierdzeń zapisywanych w książkach i tablicach matematycznych, wszystkie z przedstawionych tutaj postaram się sprawdzić. Następnie przejdę do zastosowania macierzy w rozwiązywaniu problemów producentów, czyli dowiemy się, co należy zrobić, jakich obliczeń dokonać, zanim zaczniemy oczekiwać zysków z naszej pracy.

Praca ta to pewnego rodzaju kompendium; chciałem, by każdy laik mógł przejść od niewiedzy na temat macierzy do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych, dlatego starałem się opisać wszystko w taki sposób, by moją pracę można było czytać jak ciekawą książkę. Zapraszam do lektury.

autor

☛ MACIERZ

Macierzą nazywamy prostokątną tablicę obiektów matematycznych, czyli zespół liczb lub funkcji ustawionych w *m* wierszy i *n* kolumn, co oznacza się jako

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \tag{1}$$

lub w nawiasach kwadratowych. Liczby a_{mn} nazywamy elementami macierzy, a zapis a_{mn} oznacza, że dany element znajduje się w *m*-tym wierszu i *n*-tej kolumnie. Weźmy macierz A (2), która ma tyle samo kolumn co wierszy ($m = n$) – jest zatem macierzą **kwadratową** stopnia *m*, czyli w tym przypadku 2. Np. elementem a_{22} będzie liczba 3:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

✖ Zastosowania macierzy

Macierze są ważnym narzędziem algebry, które powstało dopiero na przełomie XIX i XX wieku, bo wcześniej po prostu nie było potrzebne i nikt nie wpadł na pomysł pogrupowania liczb w taki sposób, by utworzyły tablicę. Często są stosowane przez fizyków, techników i informatyków w wielu obliczeniach. Rachunek macierzowy znajduje szerokie zastosowanie podczas rozwiązywania **układów równań liniowych**, opisu zjawisk w mechanice kwantowej czy badaniu układów elektronicznych. Niektóre z nauk używają tablic tylko w celu odpowiedniego pogrupowania danych elementów, za to głównie matematyka i fizyka używają ich do skomplikowanych obliczeń.

Rozpocznijmy więc naszą przygodę z macierzami:

✖ Wyznacznik macierzy

Pojęcie najbardziej nas interesujące – **wyznacznik** macierzy A, to liczba oznaczana symbolem det A bądź | A |. Wyznacznik można liczyć tylko z macierzy kwadratowej, zależny jest on od wartości jej elementów i przyporządkowany jest danej macierzy A, jest jej wielkością charakterystyczną. Liczy się go następująco (zgodnie z tzw. **metodą Sarrusa**):

$$\text{det A} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{matrix} = aei + dhc + gbf - (ceg + fha + ibd) \tag{3}$$

Już tłumaczę: by odnaleźć wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia m, należy obliczyć iloczyny elementów leżących „po przekątnej” tablicy, rozpoczynając od a_{11} (a) i przechodząc po skosie w dół do a_{mn} (i), następnie przesuwając się o jedną kolumnę w prawo należy zrobić to samo, i tak aż do ostatniej kolumny, przy czym, dla łatwiejszego liczenia, można dopisać sobie za symbolem wyznacznika kolejne kolumny (w przypadku (3) dopisałem oczywiście kolumnę pierwszą i drugą). Następnie iloczyny te sumujemy (w przypadku macierzy stopnia 3 otrzymujemy 3 iloczyny) i od nich odejmujemy sumę iloczynów elementów leżących po przekątnych liczonych od dołu - od a_{m1} (c) do a_{1n} (g) itd.

Należy pamiętać, że metodę Sarrusa stosujemy tylko dla macierzy postaci 2x2 oraz **3x3**, bowiem jest to metoda „skrócona”. Poprawny sposób odnajdywania wyznacznika poznamy później.

Ponadto, wyznacznik z macierzy o jednym elemencie (stopnia pierwszego) równy jest temu elementowi: | a | = a.

Wyznaczniki posiadają ciekawe **własności**, które warto zapamiętać, gdyż ułatwiają ich obliczanie, np.:

a) przestawienie dwóch dowolnych wierszy (kolumn) zmienia wartość wyznacznika na przeciwną

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

pierwotna macierz A: | A | = -3 + 4 + 0 – (0 + 0 + 4) = 1 – 4 = -3
przestawiony drugi wiersz z trzecim: | B | = 0 + 4 + 0 – (0 + (-3) + 4) = 4 – 1 = 3
przestawiona druga kolumna z trzecią: | C | = 0 + 0 + 4 – (4 + (-3) + 0) = 4 – 1 = 3

b) przestawienie wszystkich wierszy na miejsce kolumn i odwrotnie, bez zmiany ich porządku (tzw. **transpozycja**) nie zmienia wyznacznika

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{5}$$

| A | = 4 – 6 = -2
| A^T | = 4 – 6 = -2

c) jeżeli w wyznaczniku są dwie kolumny (dwa wiersze) identyczne, to jego wartość jest równa zeru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

| A | = -2 + (-2) + (-2) – (-2 + (-2) + (-2)) = 0

d) jeżeli w macierzy występuje kolumna (wiersz) złożona z samych zer, to wyznacznik tej macierzy jest równy zeru

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

| A | = 0

e) jeżeli wszystkie elementy dowolnego wiersza (kolumny) macierzy pomnożymy przez *k*, to wyznacznik również zostanie pomnożony przez *k*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & -10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot(-10) \end{bmatrix} \qquad (8)$$

| A | = -30 – 1 = -31, *k* = 2
| B | = -60 – 2 = -62, | B | : | A | = *k* = 2

f) jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy albo odejmiemy elementy innego wiersza (kolumny) albo elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę, to wartość wyznacznika nie zmieni się

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 0-1 & 0+2 & 1+0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

det A = 0 + 0 + 2 – (-1 + 0 + 0) = 2 + 1 = 3
i po dodaniu trzeciego wiersza do pierwszego wiersza macierzy A:
det B = 0 + -4 + 2 – (-1 + (-4) + 0) = -2 + 5 = 3 = det A

✖ Inne pojęcia związane z macierzami

Sumę elementów tworzących **główną przekątną** (diagonalę) tablicy kwadratowej A nazywamy **śladem** tr(A):

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ii} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mm} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Na przykład śladem macierzy (7) jest liczba 0 + 2 + 4 + 6 = 12. Własnością śladu jest jego niezmienność przy przestawianiu (transponowaniu) macierzy. Sprawdźmy zatem, czy jest to prawdą, by nie mieć wątpliwości:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{N} = \mathrm{M}^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\mathrm{tr(M)} = a+e+i,\ \mathrm{tr(N)} = a+e+i$$

Podwyznacznik, inaczej **minor** danej macierzy to każdy wyznacznik określony tablicą kwadratową powstałą przez wykreślenie pewnej liczby wierszy oraz kolumn z macierzy pierwotnej, odpowiadający temu elementowi a_{ik}, np. wykreślając kolumnę czwartą i wiersz czwarty z macierzy (7), otrzymujemy podmacierz stopnia 3, którą oznaczamy symbolem M_{ik}, w tym przypadku M_{44}, ponieważ wykreśliliśmy z macierzy A wiersz 4 (i) i kolumnę 4 (k). Minorem jest det $\mathrm{M}_{44} = 0$.

$$M_{44} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Najwyższy ze stopni niezerowych minorów (ponieważ każdą macierz można podzielić na wiele podmacierzy) nazywa się **rzędem** R(A) macierzy A, która nie musi być kwadratowa, ponieważ to dopiero minor określa jej rząd. Określenie rzędu macierzy znajduje zastosowanie w odnajdywaniu ilości rozwiązań układów równań.

Obliczanie rzędu macierzy (12), nazwijmy ją A:

a) $|\,\mathrm{A}\,| = 0 \Longrightarrow \mathrm{R(A)} < m = 3$, w takim razie dzielimy macierz na minory stopnia m-1 = 2

b) wybieram minor, którego wyznacznik chcę obliczyć, np. wykreślam pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę

c) $|\,\mathrm{A}_{11}\,| = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1 \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{R(A)} = 2$

d) jeżeli okazałoby się, że wybrany przez nas minor równy jest zeru, należy szukać dalej wśród minorów 2x2, aż do skutku, dopiero gdy sprawdzimy wszystkie z nich i każdy z nich się wyzeruje, możemy uznać, że rząd macierzy równy jest 1 (chyba że jest to macierz składająca się z samych zer, wtedy R(A)=0)

Dopełnieniem algebraicznym A_{ik} elementu a_{ik} macierzy A nazywamy liczbę równą iloczynowi minora M_{ik} odpowiadającemu temu elementowi przez $(-1)^{i+k}$:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \tag{13}$$

Weźmy macierz A (14) i obliczmy dopełnienia algebraiczne elementów jej drugiego wiersza, co wykorzystamy w późniejszych obliczeniach, otrzymując ciekawą informację:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{14}$$

a) by obliczyć dopełnienia, należy pamiętać o uprzednim obliczeniu wartości odpowiedniego minora – licząc dopełnienie dla elementu a_{21}, będę liczył minor M_{21}, czyli wykreślę wiersz drugi i kolumnę pierwszą, przez co otrzymam podmacierz złożoną z -3, -2 i 3, 4
b) $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot [-3 \cdot 4 - 3 \cdot (-2)] = -(-12 + 6) = 6$
c) $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot [-4 \cdot 4 - 2 \cdot (-2)] = -16 + 4 = -12$
d) $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot [-4 \cdot 3 - 2 \cdot (-3)] = -(-12 + 6) = 6$

Obliczmy teraz sumę S iloczynów tych elementów i ich dopełnień algebraicznych oraz wyznacznik macierzy A:

$S = -1 \cdot 6 + 0 \cdot (-12) + 1 \cdot 6 = 0$

$\det A = 0 + (-6) + 6 - (0 + (-12) + 12) = 0 - 0 = 0$

Czy to przypadek? Suma ta równa jest wyznacznikowi! Sprawdźmy, czy tak samo będzie z inną macierzą B:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{15}$$

a) $B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot [0{,}5] = 0{,}5$
b) $B_{21} = (-1)^{2+1} \cdot [0{,}25] = -0{,}25$
c) $S = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}75 \cdot (-0{,}25) = 0{,}25 - 0{,}1875 = 0{,}0625$
d) $\det B = 0{,}5 \cdot 0{,}5 - 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}25 - 0{,}1875 = 0{,}0625$

Okazuje się, że dla danej macierzy sumy iloczynów elementów dowolnego wiersza (kolumny) tej macierzy i ich dopełnień algebraicznych mają tę samą wartość, a wartość ta jest **wyznacznikiem** danej macierzy! I dopiero to jest prawidłową, ogólną definicją wyznacznika:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} A_{ik} = const = \det A \tag{16}$$

W ten sposób oblicza się wyznacznik macierzy o stopniu większym od 3, gdy nie można już zastosować „skróconej” metody Sarrusa. Jeżeli nie wierzycie, mogę to udowodnić na przykładzie macierzy czwartego stopnia:

$$\det W = \left|\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 3 & -4 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right. = ? \tag{17}$$

Metoda Sarrusa: $\det W = 0 + (-4) + 72 + 0 - (0 + 0 + (-12) + (-64)) = 68 + 76 = 144$
Metoda dopełnień:
a) wybieram elementy pierwszego wiersza
b) $W_{11} = (-1)^{1+1} \cdot [8 + 6 + 0 - (-9 + 12 + 0)] = 14 - 3 = 11$
c) $W_{12} = (-1)^{1+2} \cdot [-8 + (-4) + 36 - (6 + (-12) + (-16))] = -(24 - (-22)) = = -46$
d) $W_{13} = (-1)^{1+3} \cdot [0 + (-8) + 36 - (0 + (-12) + (-32))] = 28 + 44 = 72$
e) $W_{14} = (-1)^{1+4} \cdot [0 + 4 + 12 - (0 + 6 + 24)] = -(16 - 30) = 14$
f) $S_1 = 0 \cdot 11 + 1 \cdot (-46) + 2 \cdot 72 + (-3) \cdot 14 = -46 + 144 - 42 = 56$
wynik sprzeczny z otrzymanym metodą Sarrusa
g) wybieram elementy pierwszej kolumny

h) $W_{11} = 11$
i) $W_{21} = (-1)^{2+1} \cdot [4 + 12 + 0 - (9 + 6 + 0)] = -(16 - 15) = -1$
j) $W_{31} = (-1)^{3+1} \cdot [-4 + 18 + (-18) - (-9 + 9 + (-16))] = -4 + 16 = 12$
k) $W_{41} = (-1)^{4+1} \cdot [2 + 0 + 6 - (0 + (-3) + 8)] = -(8 - 5) = -3$
l) $S_2 = 0 \cdot 11 + (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot 12 + (-2) \cdot (-3) = 2 + 48 + 6 = 56$
wynik sprzeczny z otrzymanym metodą Sarrusa, ale zgodny z otrzymanym metodą dopełnień, zatem $\Longrightarrow$

$$S_1 = S_2 = 56 \neq 144$$

co dowodzi, jeżeli twierdzenie (16) jest prawdą (co zgadzało się dla wcześniej liczonych macierzy), że det W = 56, a metoda Sarrusa ma zastosowanie tylko w przypadku macierzy do stopnia 3 (o czym także już mówiłem).

Wróćmy jednak do naszej macierzy W (17). Czy musiałem tak się głowić nad obliczeniami i marnować mój czas na dokonywaniu tylu operacji matematycznych? Otóż nie! Tablice są tak przyjaznym obiektem matematycznym, że pozwalają na swoje określone przekształcenia, ułatwiające ich „obróbkę” – mówię np. o własności (9) macierzy. Jeżeli miałbym przed sobą macierz stopnia większego niż 3, nie bawiłbym się w metodę dopełnień, tylko próbowałbym przekształcić moją macierz w taki sposób, by było mi łatwiej liczyć jej wyznacznik. Dlatego spróbujmy dokonać tego z powyższą macierzą W:

$$|W| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -2+0 & 2+1 & 1+2 & 3-3 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} \tag{18}$$

Próbuję otrzymać w mojej macierzy jak najwięcej zer, by łatwiej było liczyć (skracać) dopełnienia algebraiczne danych elementów. W powyższym przekształceniu dodałem do drugiego wiersza wiersz pierwszy. W otrzymanej macierzy dokonuję kolejnego przekształcenia – do wiersza drugiego dodaję tym razem wiersz ostatni:

$$|W| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -2+2 & 3-3 & 3-3 & 0+4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} \tag{19}$$

Następnie od elementów ostatniej kolumny odejmuję elementy pierwszej kolumny pomnożone przez pół:

$$|W| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3-0,5\cdot 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-0,5\cdot 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2-0,5\cdot 4 \\ -2 & 3 & 3 & -4-0,5\cdot(-2) \end{vmatrix} \tag{20}$$

Dzięki odpowiednim operacjom otrzymuję coraz więcej elementów o wartości zero, cały czas przestrzegając praw rządzących tymi działaniami, dzięki czemu wyznacznik się nie zmienia.

$$|W| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ -2+\frac{1}{2}\cdot 4 & 3+\frac{1}{2}\cdot 0 & 3+\frac{1}{2}\cdot(-1) & -3+\frac{1}{2}\cdot 0 \end{vmatrix} \quad (21)$$

Teraz dodałem do czwartego wiersza połowę wartości elementów wiersza trzeciego. Może wydawać się, że przekształcanie macierzy trwa długo, jednak na pewno jest obarczone dużo mniejszym prawdopodobieństwem dokonania błędu rachunkowego niż liczenie „na piechotę", gdyż cały czas widzimy, co liczymy, a przekształceń tych dokonujemy jedno po drugim (tylko tutaj zajmuje to dużo miejsca, ponieważ zapisuję wszystkie moje obliczenia, by dla czytelnika widoczne było, co robię).

$$|W| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2{,}5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0+0 & 3+1 & 2{,}5+2 & -3+3 \end{vmatrix} \quad (22)$$

Ostatecznie otrzymuję wyznacznik, w którym nie opłaca dokonywać się większej ilości przekształceń. Dopiero teraz, po uprzednim przygotowaniu mojej macierzy, przystępuję do liczenia wyznacznika:

$$|W| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23} + 4\cdot A_{24} \quad (23)$$

Wiemy już, że by obliczyć wyznacznik macierzy kwadratowej o stopniu $m > 3$, należy zsumować iloczyny elementów macierzy z wybranego wiersza (kolumny) oraz odpowiadające im dopełnienia algebraiczne, zatem nasze rozwiązanie przyjmuje postać (23), ostatecznie równającą się dzięki przekształceniom tylko jednemu czynnikowi, który to również będziemy mogli łatwo obliczyć:

$| W | = 4A_{24} = 4 \cdot (-1)^{2+4} \cdot [0 + 0 + 32 - (0 + 0 + 18)] = 4 \cdot 14 = 56$

Jak widać, ostateczne równanie jest o wiele krótsze – bardziej ekonomiczne – optymalne dla nas, ponieważ zamiast liczenia czterech, czy nawet w celu sprawdzenia ośmiu dopełnień, obliczamy tylko jedno (w tym przypadku). A wynik otrzymujemy oczywiście taki sam, jak najbardziej prawidłowy.

Czy nie jest ekscytujące to, że macierze mają tak ciekawe własności i np. pomimo tego, że całkowicie je przekształcamy, to ich wielkość charakterystyczna, w końcu tak skomplikowanie obliczana, wcale się nie zmienia? A to dopiero początek – zastosowania macierzy w życiu codziennym bowiem są ogromne! To właśnie dlatego zainteresowałem się tym pojęciem i postanowiłem je wam zaprezentować. Bo „na oko" macierz (17) i (23) nie są takie same, a jednak już det (17) równy jest det (23). Zapraszam do dalszej lektury – jeszcze niejedną zaskakującą niespodziankę przygotowałem.

Jedną z kolejnych **własności** macierzy jest fakt, że suma P iloczynów elementów dowolnego wiersza (kolumny) i dopełnień algebraicznych odpowiednich elementów innego wiersza (kolumny) równa jest zeru. By to sprawdzić, weźmy więc jeszcze raz macierz (15) i obliczmy:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{15}$$

- **a)** mam już dopełnienia elementów kolumny pierwszej $B_{11} = 0{,}5$ i $B_{21} = -0{,}25$
- **b)** $P = a_{12} \cdot B_{11} + a_{22} \cdot B_{21} = 0{,}25 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot (-0{,}25) = 0$
- **c)** dzięki tej własności możemy obliczyć pozostałe dopełnienia w inny sposób niż zazwyczaj, np. włączając je w układ równań:

$$\begin{cases} a_{12}B_{11} + a_{22}B_{21} = 0 \\ a_{11}B_{21} + a_{12}B_{22} = 0 \Rightarrow B_{22} = -\dfrac{a_{11}B_{21}}{a_{12}} \end{cases} \tag{24}$$

$$B_{22} = -\frac{0,5 \cdot (-0,25)}{0,25} = 0,5$$

Sprawdźmy zatem, czy rzeczywiście B_{22} jest równe 0,5:

$B_{22} = (-1)^{2+2} \cdot [0{,}5] = 0{,}5$.

Dla macierzy (15) jest to prawdą. Im więcej własności macierzy znamy, tym bardziej rozjaśnia nam się umysł – niektóre z wielkości charakteryzujących dany minor czy wyznacznik da się obliczyć również inaczej, niż z definicji. Jako, że jak dotychczas wszystkie podane przeze mnie twierdzenia, odnalezione w książkach i tablicach matematycznych były zgodne z prawdą, ciekawie byłoby odnaleźć takie twierdzenie, któremu można zaprzeczyć kontrprzykładem… Będziemy próbować więc dalej. Tymczasem, sprawdźmy, czy P i powiązane z tym inne parametry zgodzą się dla innej, niepełnej macierzy:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & a_{22} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

- **a)** najpierw obliczę dopełnienia algebraiczne wiersza pierwszego
- **b)** $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot [a_{22} – 1] = a_{22} – 1$
- **c)** $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot [0 – 2] = 2$
- **d)** $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot [0 - 2a_{22}] = -2a_{22}$
- **e)** skoro P będzie zerem – założę to (biorę wiersz pierwszy z drugim)
- **f)** $P = A_{11} \cdot 0 + A_{12} \cdot a_{22} + A_{13} \cdot 1 = 0 \Longrightarrow 2a_{22} + (-2a_{22}) = 0$
- **g)** jest to prawda nie do podważenia, ponieważ element a_{22} był nieznany, zatem powyższe twierdzenie o sumie iloczynów elementów i dopełnień jest prawdziwe; a co, jeżeli chciałbym się dowiedzieć, ile wynosi a_{22}?
- **h)** obliczmy najpierw wyznacznik tej macierzy metodą Sarrusa
- **i)** $\det \mathrm{A} = 0 + 0 + 0 – (4a_{22} + 0 + 0) = -4a_{22}$
- **j)** teraz porównajmy obliczony wyznacznik z definicją
- **k)** $S = A_{11} \cdot 0 + A_{11} \cdot 0 + A_{13} \cdot 2 = -4a_{22} \Longrightarrow 2 \cdot (-2a_{22}) = -4a_{22}$
- **l)** znowu otrzymaliśmy tożsamość – jak na razie wszystkie twierdzenia nadal są prawdą; jak jednak znaleźć ten nieznany element?

m) otóż ułożymy układ równań sumy P wiersza 1-2 i kolumny 1-2

$$-\begin{cases} A_{11}\cdot 0 + A_{12}\cdot a_{22} + A_{13}\cdot 1 = 0 \\ A_{11}\cdot 0 + A_{21}\cdot a_{22} + A_{31}\cdot 1 = 0 \end{cases}$$
$$\overline{a_{22}(A_{12}-A_{21}) + A_{13} - A_{31} = 0} \tag{26}$$

n) obliczamy potrzebne dopełnienia
o) $A_{21} = -(0-2) = 2$
p) $A_{31} = a_{22} - 1$
q) podstawiamy i obliczamy

$$\begin{aligned} a_{22}(2-2) &= a_{22} - 1 + 2a_{22} \\ 1 &= 3a_{22} \\ a_{22} &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{27}$$

r) sprawdźmy zatem, czy nasze a_{22} spełnia wszystkie założenia:
det A = -4 · 1/3 = -4/3
$S = 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot (0 - 2 \cdot 1/3) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2 \cdot (-2/3) = -4/3$

Wszystko się zgadza, zatem, po kilku obliczeniach, odnaleźliśmy brakujący element naszej macierzy. A może to tylko efekt przypadku? Sprawdźmy, jakie det A otrzymalibyśmy, podstawiając za a_{22} na przykład 1:

det A = 0 + 0 + 0 – (4 + 0 + 0) = -4
det A = -4a_{22} = -4

Okazało się, że otrzymane przez nas det A spełnia warunki z poprzedniego zadania, że det A = -4a_{22}! A co, gdyby za ten element podstawić -2?

det A = 0 + 0 + 0 – (-8 + 0 + 0) = 8
det A = -4a_{22} = 8

Również jest to prawda. Zatem z tego zadania płyną dwa interesujące **wnioski**:

1. Wyznacznik macierzy jest silnie uzależniony od wartości jej parametrów, co potwierdza charakter wyznacznika jako obiekt reprezentujący daną macierz.
2. W powyższym przypadku otrzymane z układu równań a_{22} = 1/3 było tylko kandydatem do wstawienia do macierzy, ponieważ spełniało ten jeden układ równań (co udało się tylko dzięki temu, że $A_{12} - A_{21} = 0$). Dla innych równań sumy P końcowy wynik był tożsamością, co było oczywiste – nie mając przecież żadnych konkretnych warunków zadania, nie mogliśmy wiedzieć, jaki element wstawić do środka naszej tablicy…

✖ Rodzaje macierzy

Tablice można podzielić na tak wiele rodzajów, ze względu na przyjęte kryterium, że aż trudno to sobie wyobrazić! Sama Wikipedia podaje ich aż 19, jako „niektóre typy macierzy”. Ja postaram się przedstawić te macierze, których nazwy zdefiniowano w konkretnym celu, by wyraźnie charakteryzowały ich postać, oraz sprawdzę, czy podział taki miał sens.

Kształt

Ze względu na kształt (ilość wierszy a ilość kolumn) macierze można podzielić na **prostokątne** – kiedy liczba wierszy m różna jest od liczby kolumn n, oraz na **kwadratowe** – to taka macierz, dla której $m = n$, i liczba ta zwana jest **stopniem** macierzy kwadratowej. Jak już wiemy z poprzednich stron, interesują nas najbardziej macierze kwadratowe, z których można liczyć wyznaczniki. Interesującą macierzą kwadratową jest tablica składająca się tylko z jednego elementu, którą można nazwać **jednostopniową** – jej wyznacznik równy jest temu elementowi.

Wartość wyznacznika

Jeżeli det A = 0, to macierz kwadratową A nazywamy macierzą **osobliwą** (zdegenerowaną), ponieważ jej wyznacznik jest nieodwracalny - $(\det A)^{-1}$, a więc 1/0 nie istnieje, natomiast jeżeli det A jest różny od zera, to macierz ta jest macierzą **nieosobliwą** (niezdegenerowaną). Słowo „osobliwy" w języku polskim znaczy „jedyny w swoim rodzaju" – rzadko się bowiem zdarza, by wyznacznik macierzy wynosił zero. Popatrzmy na te dwie tablice kwadratowe:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Na pierwszy rzut oka nie wydaje się, by któraś z nich miała det = 0. Sprawdźmy więc:

det A = -4 – (-4) = 0

det B = -6 – (6) = -12

Zatem macierz A jest macierzą osobliwą, a macierz B nieosobliwą.

Stańmy więc przed zadaniem tego typu: wiedząc, że macierz C jest macierzą osobliwą, odnajdź elementy c_{11} oraz c_{33}:

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & c_{33} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Wiemy zatem tylko tyle, że det C = 0. Z poprzednich zadań wiemy również, że szukane przez nas parametry mogą być naprawdę różne; niekoniecznie zadanie to ma jedno rozwiązanie. Mogę jednak coś przypuścić, znając własności macierzy, a konkretnie własność (6) – jeżeli w macierzy występują dwa takie same wiersze, to macierz ta ma wyznacznik równy zeru, czyli jest macierzą osobliwą. Zatem, gdybyśmy za c_{11} przyjęli -1, to det C na pewno wyniósłby 0. A skoro tak, to za c_{33} możemy wziąć wtedy każdą liczbę rzeczywistą. I rzeczywiście, ten sam wynik otrzymuję z równania (30):

$$\begin{gathered} \det \mathrm{C} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & c_{33} \end{vmatrix} = 0 \\ c_{33} + 0 + 2 - (0 + 2 + c_{33}) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ \begin{cases} c_{11} = -1 \\ c_{33} \in \mathbb{R} \end{cases} \end{gathered} \tag{30}$$

A co wtedy, gdy c_{11} jest inną liczbą niż skojarzoną z własnością -1? Przepis na współczynniki przez nas szukane znajdziemy oczywiście układem równań wyznacznika z metody Sarrusa oraz z definicji, które są równoważne:

$$\begin{cases} \det \mathrm{C} = -c_{11}c_{33} + 0 + 2 - (0 - 2c_{11} + c_{33}) = 0 \\ S_{m=1} = c_{11}C_{11} - C_{21} = 0 \end{cases} \tag{31}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy, że:

$$
\begin{aligned}
&-c_{11}c_{33} + 2 + 2c_{11} - c_{33} = 0 \\
&-c_{33}(1 + c_{11}) + 2(1 + c_{11}) = 0 \\
&(-c_{33} + 2)(1 + c_{11}) = 0 \\
&c_{33} = -2 \vee c_{11} = -1
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Ale za to z drugiego:

$$
\begin{aligned}
&c_{11} = \frac{C_{21}}{C_{11}} = \frac{-(-c_{33} + 2)}{-c_{33} + 2} \\
&c_{11} = -1 \quad \text{gdy} \quad c_{33} \neq 2
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Z połączenia obu ostatecznie wynika, że:

$$
\left(\begin{cases} c_{11} = -1 \\ c_{33} = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} c_{11} = -1 \\ c_{33} \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \end{cases} \right) \Rightarrow \begin{cases} c_{11} = -1 \\ c_{33} \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \end{cases}
\tag{34}
$$

Jak widać, otrzymaliśmy c_{33} jako zbiór wszystkich liczb rzeczywistych **z wyłączeniem dwójki!**, która nie spełnia równania (33), ponieważ nie dzielimy przez zero, o czym warto sobie od czasu do czasu przypomnieć. Wynik (34) pokazuje więc nam, jak ważne jest to, by w obliczeniach używać jak najwięcej układów równań, ponieważ, gdy są one sobie równoważne, a któreś z nich zawiera jakieś dodatkowe zastrzeżenie co do naszych niewiadomych, to z rozwiązania układu dowiemy się o wiele więcej niż z rozwiązania pojedynczego równania.

Lecz czy nie jest prawdą, że biorąc za c_{33} jakąkolwiek liczbę, gdy c_{11} = -1, to det A będzie równy 0? Przecież tak mówi własność macierzy, którą już wcześniej omawialiśmy. Co więc daje nam ta dwójka?

$$
|\,\mathrm{X}\,| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad |\,\mathrm{Y}\,| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & f(x) \end{vmatrix}, \quad |\,\mathrm{Z}\,| = \begin{vmatrix} |x| & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}
\tag{35}
$$

By sprawdzić wszystkie moje wątpliwości, najpierw wziąłem macierz X, w której za c_{11} podstawiłem jedynkę, dla której według obliczeń macierz ta powinna być nieosobliwa, a za c_{33} przykładową liczbę różną od 2, zatem policzę:

| X | = 2 + 2 – (-2 – 2) = 4 + 4 = 8

I co – zgadza się! | X | różne od zera, zatem macierz jest nieosobliwa. Sprawdźmy jeszcze, czy dla c_{11} = -1 naprawdę nieważne jest, jaką liczbę weźmiemy za c_{33}:

| Y | = $f(x)$ + 2 – (2 + $f(x)$) = 0

No i owszem – zatem (34) spełnia warunki zadania. A teraz macierz, na którą wszyscy czekamy – za c_{11} podstawiłem losową liczbę $|x|$, a za c_{33} dwójkę:

| Z | = -2$|x|$ + 2 – (-2$|x|$ + 2) = 0

Odnaleźliśmy c_{33}, dla którego macierz ta **zawsze** będzie miała wyznacznik równy zeru! Okazuje się zatem, że pełna odpowiedź do naszego zadania jest dwuczłonowa:

$$
\begin{cases} c_{11} = -1 \\ c_{33} \in \mathbb{R} \end{cases} \text{albo dla} \begin{cases} c_{11} \in \mathbb{R} \\ c_{33} = 2 \end{cases}
\tag{36}
$$

Odpowiedź (30) nie była kłamstwem, ale nie była też całkowitą prawdą, tak jak (36). Zagadka tego zadania doprowadziła mnie do pewnych przemyśleń. Przyjrzyjmy się jeszcze raz macierzy Z. Jej trzecia kolumna ma elementy o wartościach równych wartościom odpowiadających im elementów z kolumny drugiej pomnożonym przez dwa. Można pomyśleć, że to coś oznacza… Zatem czyżbym otrzymał jakąś **nową własność** wyznacznika? Sprawdźmy, jak jest z innymi macierzami:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b & 2a \\ c & d & 2c \\ e & f & 2e \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} g & h \\ -3g & -3h \end{bmatrix} \tag{37}$$

det A = $2ade + 2bce + 2acf - 2ade - 2acf - 2bce = 0$
det B = $-3gh + 3gh = 0$

►Właśnie dokonałem odkrycia nowej własności macierzy, z którą wcześniej nie spotkałem się w żadnej literaturze! Okazuje się, że macierz, w której jeden z wierszy (kolumn) zawiera elementy będące **iloczynami elementów innego wiersza** (kolumny) przez taki sam współczynnik k, to macierz ta jest macierzą osobliwą.◄

Niech dowodem będzie (37) oraz | Z | z (35). Wiedząc o tej własności wcześniej i wykorzystując ją w poprzednio liczonym przeze mnie zadaniu, od razu wpadłbym na obie poprawne odpowiedzi. Jak widzimy, jest ona uogólnieniem własności (6), która mówi o tym, że det A = 0 wtedy gdy w macierzy istnieją dwa wiersze (kolumny) identyczne. Odnaleziona przeze mnie własność mówi za to o elementach mnożonych przez współczynnik k, którym przecież może być jedynka – co miałoby właśnie zastosowanie w przypadku identyczności wierszy (kolumn), oraz zero – wtedy wiersz (kolumna) jest złożony z samych zer, czyli automatycznie det A = 0. Moja własność-twierdzenie jest więc uniwersalna.

Powróćmy do dalszego rozpatrywania rodzajów macierzy na podstawie konkretnych kryteriów. Kolejnym z nich będzie:

Budowa wewnętrzna

Tutaj trafimy na wiele interesujących macierzy. Zacznijmy od tych rozróżnianych na podstawie śladu (przypominam – ślad to suma elementów głównej przekątnej tablicy kwadratowej). Są więc macierze „zwykłe”, w których ślad różny jest od zera, oraz tzw. **bezśladowe**, o których mówimy, gdy tr(A) = 0:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \pi & 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Macierz A składa się z liczb, jest macierzą kwadratową, zatem możemy policzyć jej ślad: tr(A) = -3 + 5 – 2 = 0, z czego wynika, że A jest macierzą bezśladową (choć ślad jednak jakiś ma). Macierz B składa się z liczb oraz… z drugiej macierzy kwadratowej, która jest elementem b_{12}. Można bowiem tworzyć macierze zagnieżdżone, ponieważ macierz to tak naprawdę liczba – interesuje nas tylko jej wyznacznik. Tak czy inaczej, na głównej przekątnej macierzy B leżą same zera, zatem tr(B) = 0, więc macierz ta również jest bezśladowa.

Kolejnymi przydatnymi macierzami są macierz **zerowa** oraz **jednostkowa**. Macierz zerowa O to taka macierz prostokątna, której wszystkie elementy równe są zeru. Macierz jednostkowa I za to jest taką macierzą, której elementy położone na głównej przekątnej są samymi jedynkami, a pozostałe są zerami. Jako, że macierze te mają określone wyznaczniki, mnożenie przez nie innych macierzy wygląda w ten sposób: AO = OA = O, AI = IA = A.

Macierzą **symetryczną** nazywamy taką macierz kwadratową, której elementy położone symetrycznie względem głównej przekątnej są sobie równe. Macierz symetryczna po transpozycji nadal ma taki sam wygląd, tzn. $S^T = S$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & x & \sqrt{2} & 0 \\ x & -2 & 3 & f \\ \sqrt{2} & 3 & -3 & \alpha \\ 0 & f & \alpha & 9 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Macierz **trójkątna** to taka macierz kwadratowa, której wszystkie współczynniki leżące nad bądź pod przekątną główną są zerami. Jej wyznacznikiem jest iloczyn elementów tworzących ślad:

$$\det T = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \tag{40}$$

Macierz **diagonalna** to macierz kwadratowa, której wszystkie elementy oprócz tworzących główną przekątną są zerami (macierze jednostkowa i zerowa są jej szczególnymi przypadkami). Skrótowo macierz taką zapisuje się $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm})$.

Operacje na nich dokonane

Ze względu na operacje, jakich dokonuje się na macierzach, również można je podzielić na kilka grup. Macierzą, z której będziemy robić inną macierz, nazwać można pierwotną. Macierzą **transponowaną** (przestawioną) nazywamy taką macierz, która uległa transpozycji, czyli zastąpieniu jej wierszy kolumnami i na odwrót:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Macierz **dopełnień algebraicznych** to macierz D, która ma dokładnie takie same wymiary jak macierz A i składa się z dopełnień algebraicznych odpowiadających elementom macierzy A położonym w tych samych miejscach tablicy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Z macierzy A obliczyłem $A_{11} = d_{11} = (-1)^{1+1} \cdot [0 - 2] = -2$ i tak dalej znanym nam już sposobem, przez co otrzymałem macierz D dopełnień algebraicznych macierzy A. Jest nam ona potrzebna do tego, by otrzymać macierz odwróconą (odwrotną) względem macierzy A, co za chwilę.

Macierzą **dołączoną** zwiemy taką macierz $A^D = D^T$, czyli transponowaną macierz dopełnień algebraicznych macierzy A, więc:

$$D^T = A^D = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Macierz **odwrócona** A^{-1} to macierz, która spełnia równanie $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I = 1$. Macierz odwrotna istnieje dla każdej macierzy **nieosobliwej**. Odnajdujemy ją, korzystając ze wzoru:

$$A^{-1} = \frac{A^D}{\det A} = D^T (\det A)^{-1} \quad (44)$$

Dlatego też macierz musi być osobliwa (det A nie może być zerem), by miała odpowiadającą jej macierz odwróconą. Dla naszej macierzy (42) musimy znaleźć wyznacznik:

$\det A = -6 - 2 - (2 - 6) = -4 \Rightarrow (\det A)^{-1} = -0{,}25$

Zatem, by otrzymać macierz odwrotną do macierzy A, musimy pomnożyć elementy macierzy D^T dołączonej do macierzy A przez odwrotność wyznacznika macierzy A, czyli:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Sprawdźmy teraz, czy faktycznie macierz, którą otrzymaliśmy, jest macierzą odwrotną do macierzy A, korzystając z równania odwrotności $A \cdot A^{-1} = I$. O mnożeniu macierzy jeszcze nie mówiliśmy, ale jako, że macierz reprezentowana jest przez wyznacznik, równanie powyższe możemy uznać za $| A | \cdot | A^{-1} | = 1$, zatem:

$-4 \cdot [3/8 + 1/4 - (3/8 + 1/2)] = -4 \cdot (-1/4) = 1$

Tak więc otrzymana przez nas macierz (45) jest macierzą odwrotną do macierzy A (42). Z równania powyższego wyniku również, jak widzę, pewna **własność macierzy odwróconych**, a mianowicie, że $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, ponieważ $-1/4 = 1/-4$.

Myślę, że obeznanie się z takimi rodzajami macierzy w zupełności nam wystarczy do rozwiązywania zadań każdego rodzaju. Znając określone własności tablic, możemy łatwo liczyć ich wyznaczniki oraz odnajdywać określone elementy. Pozostaje nam jeszcze poznać możliwości działań na macierzach i przejdziemy wreszcie do rozwiązywania zadań.

☛ DZIAŁANIA NA MACIERZACH

Macierze, tak jak zwykłe liczby, możemy dodawać, odejmować, mnożyć przez liczby lub przez inne tablice; możemy je również transponować (o czym już mówiliśmy) i dokonywać na nich innych operacji. Należy jednak pamiętać o tym, że działania matematyczne na macierzach nie rządzą się tymi samymi prawami, co zwykłe liczby, na przykład iloczyn macierzy $A \cdot B$ to nie to samo co $B \cdot A$, chociaż $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$.

Dodawanie i odejmowanie

Sumować możemy tylko macierze tego samego rozmiaru *mxn*. Dodawanie polega na sumowaniu elementów a_{ik} oraz b_{ik} z macierzy A + B, w wyniku czego otrzymujemy macierz C, w której $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$.

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{46}$$

Różnica macierzy jest sumą dwóch macierzy, z których ta druga, którą chcieliśmy odjąć od pierwszej (odjemnikowa), została uprzednio wymnożona przez -1, to jest każdy z jej elementów został pomnożony przez -1. Prościej: $c_{ik} = a_{ik} - b_{ik}$.

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \mathrm{A} + (-\mathrm{B}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Równość

Macierz A równa jest macierzy B wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element a_{ik} równy jest elementowi b_{ik}:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{A} = \mathrm{B} \tag{48}$$

Mnożenie przez liczbę

Iloczyn macierzy A przez liczbę *c* daje macierz, w której każdy z elementów został wymnożony przez to *c*: $c\mathrm{A} = \mathrm{A}c = c[a_{ik}] = [ca_{ik}]$, o czym wspominaliśmy wcześniej i nie trzeba tego komentować.

Iloczyn macierzy

Najważniejsze z działań na macierzach, określone własnymi prawami, m.in. AB ≠ BA. Mnożyć można tylko macierze o określonych wymiarach, mianowicie liczba kolumn pierwszej macierzy musi być równa liczbie wierszy drugiej macierzy, co schematycznie można zapisać jako:

$$\mathrm{A}_{mn} \cdot \mathrm{B}_{no} = \mathrm{C}_{mo} \tag{49}$$

ponieważ w wyniku mnożenia macierzy A i B otrzymujemy całkiem nową macierz C, której ilość wierszy równa jest ilości wierszy macierzy A, a ilość kolumn – kolumnom macierzy B. W wyniku mnożenia dwóch macierzy otrzymujemy elementy c_{mo}, które odpowiadają wartością sumie iloczynów odpowiednich elementów *m*-tego wiersza macierzy A i *o*-tej kolumny macierzy B, co zapisujemy jako:

$$c_{mo} = \sum_{x=1}^{n} a_{mx} b_{xo} \tag{50}$$

Co dużo łatwiej zrozumieć w praktyce, ponieważ iloczyn macierzy graficznie wygląda tak:

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} ag+bj & ah+bk & ai+bl \\ cg+dj & ch+dk & ci+dl \\ eg+fj & eh+fk & ei+el \end{bmatrix} \end{array} \tag{51}$$

Należy pamiętać, że macierz pierwsza (A) musi znajdować się na dole po lewej stronie, a macierz druga (B), musi być na górze. Macierz C (wynik mnożenia) otrzymujemy w prawej dolnej części naszego „krzyża”. Czyli na przykład, dla mniejszych macierzy:

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{52}$$

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$
$c_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$
$c_{21} = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0$
$c_{22} = 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 1$

Okazało się, że mnożąc dwie takie same macierze A = B, otrzymałem macierz jednostkową $AA = A^2 = I_{2x2}$, czego się nie spodziewałem. Sprawdźmy, czy tak samo jest dla innej macierzy:

$$\mathrm{D}^2 = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \end{array} \tag{53}$$

Nie, wynik (52) był tylko przypadkowy. Zatem nie istnieje własność mówiąca o wyniku iloczynu macierzy kwadratowej A przez nią samą – jest to „zwykłe” mnożenie macierzy. Sprawdźmy, jak iloczyn macierzy wpływa na zmianę wyznacznika:

a) macierz (52)
$| A | = -1$
$| A^2 | = 1$
$| A^2 | : | A | = -1$

b) macierz (53)
$| D | = 1 + 6 = 7$
$| D^2 | = 25 + 24 = 49$
$| D^2 | : | D | = 49 : 7 = 7$

Widzę pewną zależność, jednak jeszcze nie wiem, jak ją opisać. Sprawdzę więc kolejny iloczyn, już nie tych samych macierzy:

$$A\cdot B = \begin{array}{ccc|ccc} & & & 2 & -3 & 1\\ & & & 2 & 1 & -3 \\ & & & 4 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 22 & -9 & -1\\ -1 & 2 & 3 & 14 & -1 & -4\\ 3 & 4 & -2 & 6 & -1 & -11\end{array} \tag{54}$$

| A | = -42
| B | = 24
| AB | = -1008
| AB | : (| A | · | B |) = -1008 : (-1008) = **1**

Otrzymałem coś ciekawego! Iloraz wyznacznika iloczynu macierzy A i B przez iloczyn wyznaczników macierzy A i B dał nam jedynkę. A co będzie, jeżeli do poprzednich obliczeń, gdy podnosiłem do potęgi drugiej macierz A oraz D, również w mianowniku wstawię iloczyny wyznaczników?

a) (52): $|A^2| : |A|^2 = 1 : 1 = \mathbf{1}$
b) (53): $|D^2| : |D|^2 = 49 : 49 = \mathbf{1}$

►Udało się! Dokonując różnych obliczeń, znowu doszedłem do kolejnego, na pewno przydatnego wniosku, a mianowicie, że iloraz wyznacznika macierzy AB, powstałej z iloczynu macierzy A i macierzy B, oraz iloczynu wyznaczników macierzy A i macierzy B **równy jest jeden**, czyli:◄

$$\frac{\det AB}{\det A\cdot\det B} = 1 \Leftrightarrow \det AB = \det A\cdot\det B \tag{55}$$

Twierdzenie to ma zastosowanie również wtedy, gdy mnożymy macierze osobliwe, w wyniku czego **zawsze** otrzymamy macierz osobliwą:

$$A\cdot B = \begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 2 & -1\\ & & & 1 & 2 & -1 \\ & & & 3 & 6 & 2 \\ \hline -1 & 2 & 2 & 7 & 14 & 3\\ -2 & 0 & 4 & 10 & 20 & 10\\ -3 & 8 & 6 & 23 & 46 & 7\end{array}, \qquad C\cdot D = \begin{array}{cc|cc} & & -1 & -1 \\ & & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 9\end{array} \tag{56}$$

a) det A = 0, det B = 0, det AB = 0
b) det C = 0, det D = 0, det CD = 0

Prawdziwość tego twierdzenia wynika z faktu, iż wyznacznik jednoznacznie charakteryzuje daną macierz, tzn. że mnożąc macierz A razy macierz B, równocześnie mnożymy wyznacznik macierzy A razy wyznacznik macierzy B.

☛ UKŁADY RÓWNAŃ A TABLICE PROSTOKĄTNE

Macierze znajdują zastosowanie zawsze wtedy, gdy mamy do czynienia z układami równań. To dzięki macierzom potrafimy rozwiązywać szybko układy równań z dużą liczbą niewiadomych, ponadto istnieją takie zadania, których inaczej po prostu nie da się rozwiązać.

✕ Układy z jednym, istniejącym rozwiązaniem

Najłatwiejszy z możliwych układ równań, do rozwiązania którego nie trzeba znać nawet teorii rachunku macierzowego, to układ dwóch równań liniowych:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{57}$$

dla którego rozwiązanie przybiera postać (są to tzw. **wzory Cramera**):

$$x = \frac{W_x}{W},\ y = \frac{W_y}{W} \tag{58}$$

gdzie W to wyznacznik charakterystyczny (główny) układu, obliczany jako:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{59}$$

a W_x i W_y to wyznaczniki, które powstają po wycięciu z układu kolumny odpowiednio iksowej oraz igrekowej, za których miejsce wstawia się kolumnę c:

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ i } W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{60}$$

Oczywiście, tak jak było z odnajdywaniem wyznacznika macierzy metodą Sarrusa, i tutaj rozwiązywanie układu równań wygląda w ten sposób tylko dla określonych wymiarowo macierzy – ilość niewiadomych musi być równa ilości równań, jakie znajdują się z nimi w układzie. Rozwiążmy więc takie zadanie:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - 2y = -4 \\ 3x + z = 3 \end{cases} \tag{61}$$

Można obliczyć je znanymi nam metodami podstawiania i np. dodawania stronami, ale my mamy lepszy sposób – macierzowy. Zmieniam moje równanie na tablicę:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array} \tag{62}$$

Mogę teraz obliczyć W, W_x, W_y oraz W_z. Zatem – do dzieła:

a) W obliczam z macierzy kwadratowej, zawierającej w sobie współczynniki stojące przy niewiadomych x, y, z

b) $W = -2 - (-12 + 1) = 9$

c) W_x obliczam z macierzy powstałej przez zastąpienie kolumny iksowej przez kolumnę z liczbami (oddzieloną pionową kreską), W_y i W_z analogicznie

d) $W_x = -4 - (-12 - 4) = 12 \Rightarrow x = 12:9 = 4/3$

e) $W_y = -4 + 6 - (-24 + 2) = 24 \Rightarrow y = 24:9 = 8/3$

f) $W_z = -6 - 12 - (-12 + 3) = -9 \Rightarrow z = -9/9 = -1$

Sprawdźmy teraz, czy to prawda, wstawiając nasze rozwiązania do pierwszego równania:

$4/3 + 8/3 + 2 \cdot (-1) = 12/3 - 2 = 4 - 2 = 2$

Co zgadza się z równaniem, zatem otrzymaliśmy rozwiązanie układu (61), używając metody macierzowej, która, jak widać, zajęła tylko 4 linijki obliczeń, a nie wiadomo jak długo liczylibyśmy to „na piechotę”… Przejdźmy jednak do zadań trudniejszych.

✕ Liczba rozwiązań układu równań liniowych

W literaturze istnieją dwa równoważne sposoby na odnalezienie liczby rozwiązań układu równań liniowych. Przedstawię je oba, zaczynając od tego ogólniejszego:

Jeżeli wyznacznik układu równań różny jest od zera, to układ taki nazywamy **oznaczonym**, ponieważ ma tylko **jedno** rozwiązanie w postaci wzorów Cramera. Układ taki rozwiązywaliśmy powyżej (62).

Jeżeli $W = 0$, wtedy musimy sprawdzić, jak wyglądają wyznaczniki niewiadomych, tzn. W_x, W_y itd., jeśli jest ich więcej. Jeżeli choć jeden z nich **nie jest** zerem, to nasz układ równań jest **sprzeczny**, czyli nie ma rozwiązań, co zapiszemy dla układu dwóch niewiadomych jako:

$$W = 0 \wedge (W_x \neq 0 \vee W_y \neq 0) \Leftrightarrow x, y \in \varnothing \tag{63}$$

Zaś jeżeli wszystkie z wyznaczników są zerami, to układ ten jest albo **sprzeczny**, albo **nieoznaczony**, czyli ma **nieskończenie** wiele rozwiązań. Zależne jest to od postaci równań.

Rozwiążmy teraz, w oparciu o tę wiedzę, zadanie z parametrem: dla jakich wartości parametru k układ równań (64) ma jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele lub jest sprzeczny?

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -6 \\ -kx_1 - 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = k \end{cases} \tag{64}$$

a) $W = -4 + 4k - (6 - 3k) = -10 + 7k$

b) odpowiedź zależy od wartości W, zatem: jeżeli $W \neq 0$, to układ ma jedno rozwiązanie → $-10 + 7k \neq 0 \Rightarrow k \neq 10/7$

c) kiedy $k = 10/7$, to mamy dwie możliwości, zatem liczymy wyznaczniki niewiadomych:

$$W_{x_1} = \begin{vmatrix} -6 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ k & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad W_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -k & 3 & 0 \\ 3 & k & 1 \end{vmatrix}, \quad W_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -k & -2 & 3 \\ 3 & 4 & k \end{vmatrix} \tag{65}$$

d) $W_{x1} = 12 - 12 - (2k + 9) = -2k - 9$

e) $W_{x2} = 6 + k^2 - (-9 + 6k) = k^2 - 6k + 15$

f) W_{x3} = -4k + 27 + 24k – (36 + 24 – 3k^2) = 3k^2 + 20k – 33
g) okazało się, że parametr k znajduje się przy każdym wyznaczniku, zatem otrzymamy najprawdopodobniej jakąś sprzeczność, ale sprawdźmy, ile wyniosą poszczególne wyznaczniki, podstawiając za k = 10/7:
h) W_{x1} = -2 · 10/7 – 9 = -20/7 – 63/7 ≠ 0
i) W_{x2} = $(10/7)^2$ – 6 · 10/7 + 15 = 100/49 – 420/49 + 735/49 ≠ 0
j) W_{x3} = $3(10/7)^2$ + 20 · 10/7 – 33 = 300/49 + 1400/49 – 1617/49 ≠ 0
k) wszystkie wyznaczniki oprócz głównego są różne od zera, zatem nasz układ równań jest niepodważalnie sprzeczny; odpowiedź końcowa brzmi:

dla $k \neq 10/7$ układ jest oznaczony
dla k = 10/7 układ jest sprzeczny
nie istnieje k, dla którego układ jest nieoznaczony

Zadanie nie należało do najciekawszych (tym bardziej, że dane wymyśliłem sam), jednak ukazało sposób, w jaki należy postępować z tego typu zagadnieniami. Sprawdźmy jednak, czy otrzymane przeze mnie wyniki są prawidłowe.

a) za k podstawiam 0, otrzymuję W = -10, W_{x1} = -9, W_{x2} = 15, W_{x3} = -33, zatem:
b) x_1 = 0,9, x_2 = -1,5, x_3 = 3,3 – układ ma jedno rozwiązanie
c) za k podstawiam 10/7 – nie dzielimy przez zero, nie otrzymamy wyniku, zgadza się z odpowiedzią

Drugi sposób odnajdywania liczby rozwiązań układu jest znacznie ciekawszy i nie ma ograniczenia co do stosowalności, tak jak powyższy, gdy rozwiązań nie znajdywaliśmy dla det W = 0. Twierdzenie **Kroneckera-Capelliego** mówi, że układ równań jest rozwiązywalny tylko wtedy, gdy rząd macierzy **W** współczynników układu **równy** jest rzędowi macierzy uzupełnionej **U**, zawierającej oprócz elementów niewiadomych również elementy będące w równaniu wyrazami wolnymi. Macierz W jest zawsze macierzą kwadratową, a macierz U wygląda chociażby tak, jak (62).

Gdy rzędy tych macierzy **równe** są liczbie **niewiadomych** n, to układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie. Gdy rząd jest mniejszy od n, to układ ma **nieskończenie** wiele rozwiązań, zależnych od $\boldsymbol{n - r}$ parametrów.

Rozwiążmy więc układ równań:

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 4 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 7z = 5 \end{cases} \tag{66}$$

Najpierw musimy więc zbudować macierz współczynników W oraz uzupełnioną U i znaleźć rzędy tych macierzy:

$$\mathrm{W} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix} \tag{67}$$

R(W): det W = 14 -3 + 48 – (-8 + 4 + 63) = 0 $\Longrightarrow$ R(W) < 3
biorę więc losowy minor 2x2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 9 = -7 \neq 0 \tag{68}$$

zatem R(W) = 2
R(U): biorę losowy minor 3x3:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -15+16+56-(16+21-40) = 41+19 = 60 \neq 0 \tag{69}$$

zatem R(U) = 3.

Mamy z tego, że R(W) ≠ R(U), więc nasze równanie jest nierozwiązywalne, czyli *x, y, z* należą do zbioru pustego. Równoważne jest to z tym, że skoro det W = 0, to układ jest sprzeczny lub nieoznaczony, w tym wypadku jednak wiemy z góry, dzięki twierdzeniu Kroneckera-Capelliego, że jest to układ sprzeczny.

Odnajdywać niewiadome można również na inny sposób, nie tylko wzorami Cramera, trzeba jedynie być obeznanym z mnożeniem macierzy oraz tworzeniem macierzy odwrotnej. Weźmy teraz przykład:

$$\begin{cases} 2y+2z=0 \\ x-z=2 \\ x-y+2z=-6 \end{cases} \tag{70}$$

Chcąc zamienić powyższy układ równań na postać macierzową, możemy zapisać układ równań jako równanie macierzowe, tzn. przybierze ono postać **AX = B**, gdzie A to macierz współczynników, X to kolumna złożona niewiadomych, a B to kolumna wyrazów wolnych.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \tag{71}$$

Szukając rozwiązań kolumny X, musimy podzielić równanie przez A lewostronnie, w wyniku czego otrzymujemy, że $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, zatem najpierw odnaleźć musimy macierz odwrotną do macierzy A, a następnie wymnożyć ją przez B. Przypominam, że macierz odwrotną mają tylko macierze nieosobliwe, zatem najpierw zacznę od obliczenia det A.

det A = -2 -2 – (4) = -8

Macierz odwrotną znajdziemy ze wzoru $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{D}^{T}(\det \mathrm{A})^{-1}$

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{D}^{T} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -2 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \tag{72}$$

Mając transponowaną macierz dopełnień algebraicznych (czyli macierz dołączoną), odnajdę macierz odwrotną, mnożąc każdy z elementów przez -1/8:

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \tag{73}$$

Na mocy twierdzenia (55) sprawdzam, czy macierz ta faktycznie jest macierzą odwróconą macierzy A:

det A^{-1} = 1/128 – 3/128 – 3/128 – 1/128 – 1/128 – 9/128 = -16/128 = -1/8

det A^{-1} · det A = -1/8 · -8 = 1

Co zgadza się z definicją macierzy odwróconej. Mogę wreszcie przystąpić do odnalezienia macierzy X:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{74}$$

Otrzymaliśmy macierz X. Porównując (74) z (71), otrzymujemy łatwo wynik zadania:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \tag{75}$$

Który ze sposobów rozwiązywania zadań jest najłatwiejszy bądź najkrótszy? Trudno zdecydować. Tak czy inaczej musimy znać twierdzenie Kroneckera-Capelliego oraz wzory Cramera, jeśli chcemy rozwiązywać układy równań. Ale koniec tego gadania – pora na ciekawe zadanie:

☛ OBALAMY TWIERDZENIE Z TABLIC MATEMATYCZNYCH

Nawet w porządnych tablicach matematycznych, w części dotyczącej układów równań, można napotkać twierdzenie następującej treści:

„*Gdy wyznacznik główny układu i wszystkie wyznaczniki niewiadomych równe są zeru, to dany układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań*" [źródło 7, s.49].

Z mojej wiedzy wynika jednak co innego. Sprawdźmy zatem słuszność tego, co podaje się w polecanych dla maturzystów i studentów książkach. Twierdzenie powyższe obalić można bardzo prostym układem równań z parametrem:

$$\begin{cases} -2kx - 6ky = -8 \\ 3kx + 9ky = 12 \end{cases} \tag{76}$$

Obliczam wyznacznik główny układu W oraz W_x i W_y:

$$
\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} -2k & -6k \\ 3k & 9k \end{vmatrix} = -18k^2 + 18k^2 = 0 \\
W_x &= \begin{vmatrix} -8 & -6k \\ 12 & 9k \end{vmatrix} = -72k + 72k = 0 \\
W_y &= \begin{vmatrix} -2k & -8 \\ 3k & 12 \end{vmatrix} = -24k + 24k = 0
\end{aligned}
\tag{77}
$$

Na mocy powyższego twierdzenia student powiedziałby, że skoro wszystkie wyznaczniki tego układu równań równe są zeru, to układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań. Sprawdźmy:

a) *k* = 1

jako że równania te są równoznaczne, bowiem by otrzymać z pierwszego równanie drugie, wystarczy pomnożyć je przez -3/2, do obliczeń użyję tylko jednego z nich

$-2 \cdot 1 \cdot x - 6 \cdot 1 \cdot y = -8$

$-2x - 6y = -8$

$x = 4 - 3y$

zgadza się, podstawiając za y dowolną liczbę otrzymujemy nieskończenie wiele rozwiązań

b) *k* = -2

$-2 \cdot (-2) \cdot x - 6 \cdot (-2) \cdot y = -8$

$4x + 12y = -8$

$x = -2 - 3y$

zgadza się, dla $k = -2$ za y również możemy wstawić dowolną liczbę

c) *k* = 0

$-2 \cdot 0 \cdot x - 6 \cdot 0 \cdot y = -8$

$0 = -8$

sprzeczne! zero przecież nie jest równe -8

Zatem twierdzenie z tablic matematycznych jest **nieprawdziwe** (niedokładne), ponieważ dla wyznaczników równym zerom układ równań wcale nie musi być nieoznaczony, co udowodniłem powyżej. Poprawna treść tego twierdzenia znajduje się pod twierdzeniem (63), na poprzednich stronach mej pracy, a mówi ona, że:

„*Jeżeli wszystkie z wyznaczników są zerami, to układ ten jest* **albo** *sprzeczny,* **albo** *nieoznaczony, co zależne jest od postaci równań.*"

☛ PRZYKŁADOWE ZADANIE

W ostatnim rozdziale mojej pracy dotyczącym teorii rachunku macierzowego postanowiłem przedstawić rozwiązanie kolejnego, ciekawego zadania, z którego otrzymam jeszcze jedną własność macierzy, na którą natrafiłem podczas układania różnych tablic i sprawdzania ich wyznaczników.

Mamy trzy liczby, *a, b* i *c*, między którymi zachodzą zależności (78). Odnajdź je:

$$
\begin{cases} a = 2(c-b)+1 \\ b + a = 3c + 3 \\ c - 2a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b - 2c = 1 \\ a + b - 3c = 3 \\ 2a + 0b + c = 2 \end{cases}
\tag{78}
$$

Tak jak poprzednio, układam macierz niewiadomych oraz macierz uzupełnioną:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{79}$$

Sprawdzam rząd macierzy W, co sprowadza się do odnalezienia jej wyznacznika:

$\det W = 1 + 12 - 4 - 2 = 7 \neq 0 \implies R(W) = 3 = R(U)$,

ponieważ W jest minorem macierzy U. R(W) = R(U) = 3 = n niewiadomych, zatem nasz układ ma jedno rozwiązanie.

Przedstawmy nasze macierze jako WX = C, z czego obliczymy, że $X = W^{-1}C$, gdzie C to macierz złożona z kolumny wyrazów wolnych. Poszukujemy zatem macierzy odwrotnej do macierzy W:

$$W^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \tag{80}$$

Sprawdźmy, czy faktycznie jest to macierz odwrotna:

$$W^{-1}W = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{81}$$

Mnożąc WW^{-1} otrzymamy również macierz jednostkową. Zatem Otrzymana przeze mnie macierz jest macierzą odwrotną do W. To samo otrzymamy, licząc wyznaczniki, zgodnie z twierdzeniem (55) oraz z definicją macierzy odwrotnej:

$\det W = 7$

$\det W^{-1} = 1/343 \cdot (3 - 4 + 80 - 24 + 4 - 10) = 49/343 = 1/7$

$\det W^{-1} \cdot \det W = \det W^{-1}W = \det WW^{-1} = \det I$

Wpadłem na pewien pomysł. Skoro iloczyn wyznaczników dwóch macierzy równy jest wyznacznikowi iloczynów tych macierzy, to czy ważne jest, w jakiej kolejności wymnożymy te macierze? Przecież det W to liczba, zatem ulega przemienności mnożenia. Czy możliwe jest więc, by det AB = det BA, co wynikałoby z mojego twierdzenia (55)? Odejdźmy na chwilę od zadania i sprawdźmy moją tezę dla kilku macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \tag{82}$$

Najpierw sprawdzimy macierze osobliwe. Czy wyznacznik ich iloczynu będzie równy zeru? Wymnóżmy AB i BA, a następnie obliczmy wyznaczniki A, B, AB i BA:

$$AB = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 6 & -12 \end{bmatrix} \end{array}, \quad BA = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -12 & -12 \end{bmatrix} \end{array} \tag{83}$$

det A = -1 + 1 = 0
det B = -16 + 16 = 0
det AB = 72 – 72 = 0
det BA = 72 – 72 = 0

Okazuje się, że dla macierzy osobliwych wyznacznik ich iloczynu AB jest równy wyznacznikowi iloczynu BA. Ponadto, jak łatwo zauważyć, diagonala oraz ślad macierzy AB i BA są takie same. Jak będzie dla macierzy trzeciego stopnia, ponadto nieosobliwych?

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{84}$$

Obliczam zarówno CD, jak i DC, a następnie wyznaczniki C, D, CD i DC, ślad oraz dokonam analizy elementów diagonali (przekątnej głównej) CD i DC:

$$CD = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{array}, \quad DC = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & 9 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \tag{85}$$

det C = 4 + 2 + 2 = 8
det D = 4 – 4 – 1 = -1
det CD = -18 + 16 + 54 – 36 + 12 – 36 = -8
det DC = -54 + 4 + 18 + 24 = -8
tr(CD) = -1 + 6 + 3 = 8
tr(DC) = 2 + 9 – 3 = 8
diagonale różne

Okazało się, że moje domysły były prawdziwe! Przy okazji odkryłem jeszcze jedną własność macierzy! Podsumujmy więc:

►**1.** det AB = det BA = det A · det B, co udowodniłem rozwiązując trzy powyższe przykłady◄

►**2.** tr(AB) = tr(BA), co widać z w/w przykładów◄

A powracając do naszego zadania… W (81) obliczyliśmy W^{-1}, więc możemy wreszcie odnaleźć rozwiązanie, mnożąc W^{-1} przez C:

(86)

$$W^{-1}C = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{12}{7} \end{bmatrix}$$

Z czego wynika, że a = -13/7, b = -2/7, a c = -12/7, co faktycznie spełnia układ (78).

W ten sposób zakończyliśmy naukę o macierzach. Poznaliśmy wzory Cramera, twierdzenie Kroneckera-Capelliego, własności macierzy (w tym 4, które sam „wynalazłem”), nauczyliśmy się rozwiązywać zadania, również z parametrem, oraz rozszerzyliśmy (albo – obaliliśmy) twierdzenie z tablic matematycznych. Nadeszła pora wreszcie dowiedzieć się, czym zajmuje się matematyczne programowanie liniowe, co jest najważniejszą rzeczą, o której chciałem wam opowiedzieć.

☛ PROGRAMOWANIE MATEMATYCZNE

Jest to teoria optymalizacji problemów matematycznych, zazwyczaj z dziedziny ekonomii, które można ująć w sposób ilościowy. Znajduje zastosowanie również w agrotechnice, przemyśle, analizie gospodarczej, kontroli zapasów i programowania ich produkcji, analizie ruchu drogowego itd.

✓ **Optymalizacja** – wyznaczenie spośród dopuszczalnych rozwiązań danego problemu rozwiązania najlepszego ze względu na przyjęte kryterium.
✓ **Ekonomia** – nauka, która zajmuje się badaniem gospodarowania, produkcją, wykorzystaniem i konsumpcją dóbr przez człowieka.
✓ **Sposób ilościowy** – to taka metoda badawcza, w której cechy badanego układu określa się za pomocą liczb (np. ilościowo posiadam dwie róże, które jakościowo mają cechę: kolor czerwony).

Zagadnienie optymalizacyjne, dotyczące efektywnego wykorzystania albo rozmieszczenia ograniczonych środków w celu otrzymania jak największego zysku przy jak najmniejszym nakładzie pracy, sprowadza się do wyznaczenia wartości n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dla których z góry określona funkcja zależna od tych n zmiennych $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ osiąga maksimum lub minimum (czyli to czego szukamy), przy nałożeniu na zmienne pewnych warunków, uzależniających jedne od drugich, również mogących być funkcjami. W ekonomii zazwyczaj obliczeń dokonuje się na liczbach dodatnich, zatem jednym z wielu możliwych dodatkowych zastrzeżeń, wprzęgniętych w układ równań, będzie chociażby $x_i \geq 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Istnieje wiele metod programowania matematycznego: programowanie nieliniowe, sieciowe, stochastyczne, dynamiczne i inne, jednak najbardziej rozwiniętym z nich jest programowanie liniowe, znajdujące liczne zastosowania w praktyce.

✕ Programowanie liniowe

Pojęcie

Programowanie liniowe zajmuje się rozwiązywaniem takich rzeczywistych problemów decyzyjnych, w których rozpatrywane zależności między obiektami w postaci zbioru funkcji są funkcjami liniowymi wielu zmiennych, oraz warunki zadania również są postaci liniowej, jako równości bądź nierówności. Słowo „programowanie” wskazuje na schemat postępowania – zadania optymalizacyjne rozwiązuje się, wykonując pewne, opracowane wcześniej algorytmy.

✓ **Funkcja liniowa** – funkcja liczbowa, która dla jednej zmiennej określona jest wzorem $f(x) = ax + b$; niewiadoma jest pierwszego stopnia (x^1).
✓ **Algorytm** – dokładny opis postępowania prowadzący do rozwiązania określonego zagadnienia „krok po kroku”.

Zagadnienie optymalizacyjne tej postaci polega zatem na odnalezieniu wartości zmiennych x_1, $x_2, \ldots, x_n$, dla których funkcja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ osiąga maksimum (lub minimum), co jest zapisywane jako:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min) \tag{87}$$

przy założeniu, że zmienne spełniają warunki:

$$\begin{cases} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{cases} \tag{88}$$

dla $j = 1, 2, \ldots, m$, gdzie m to ilość równań typu (88), z jakimi mamy do czynienia. Litery c_n, a_{jn}, b_j są parametrami tych funkcji, które omówię za chwilę. Zapewne zastanawiacie się, w jakim celu dla jednej funkcji podaje się tyle warunków i wprowadza się nowe oznaczenia. Wynika to z postaci macierzowej zadań optymalizacyjnych, którą poznacie na następnych stronach mojej pracy, oraz z prostej potrzeby otrzymania jak najbardziej odpowiedniego rozwiązania.

✕ Oznaczenia i definicje

Zespół zależności, na podstawie których wyznacza się optymalne rozwiązania (decyzje), nazywa się **modelem** matematycznym. Zatem gdy zależności te mają charakter liniowy – nasz model matematyczny (87) i (88) zwany jest modelem programowania liniowego, w skrócie PL.

Zmienne decyzyjne to zmienne (niewiadome), których szukamy, by podjąć daną decyzję optymalizacyjną: x_1, x_2, …, x_n. **Decyzją X** – rozwiązaniem dopuszczalnym naszego zadania jest kolumna zmiennych decyzyjnych w postaci macierzy o wymiarach nx1 (tak samo było w (71), gdy szukaliśmy rozwiązania układu równań):

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{89}$$

Funkcja celu to funkcja f, dla której szukamy maksimum (minimum). Jej współczynniki (parametry) c_1, c_2, …, c_n zwane są po prostu **współczynnikami funkcji celu**. Wartość funkcji celu f, dla której szukamy max (min), zwana jest **kryterium optymalności** z – może to być np. zysk, który chcemy mieć jak największy, a zależy on od wielu warunków.

Nierówności (88) zwane są warunkami:

a) **ograniczającymi** (pierwsza nierówność, która może składać się z kilku linijek, w zależności od m warunków)
b) **nieujemności** (nierówność druga)

Programowanie liniowe zajmuje się nie tylko nierównościami (np. pracownik może wykonać pracę w ciągu 10h, ale może zrobić to krócej, czyli np. $x \leq 10$), ale także równościami. Należy pamiętać, że gdy z treści zadania wynika, iż pewien warunek ograniczający ma postać równania:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j \tag{90}$$

To w układzie możemy zamienić go na parę nierówności:

$$\begin{cases} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j \\ -a_{j1}x_1 - a_{j2}x_2 - \ldots - a_{jn}x_n \leq -b_j \end{cases} \tag{91}$$

Równoważność (90) i (91) można przedstawić na prostym przykładzie:

$$\begin{gathered} ax = b \Rightarrow ax \leq b \wedge -ax \leq -b \\ a = -5 \\ x = -\frac{b}{5} \Rightarrow \left(x \geq \frac{b}{-5} \wedge x \leq \frac{-b}{5}\right) \Rightarrow x = -\frac{b}{5} \end{gathered} \tag{92}$$

Pomimo możliwości zaistnienia ogromnej ilości zmiennych decyzyjnych oraz warunków ograniczających, bardzo łatwo zamienić układ nierówności optymalizacyjnych na prostą nierówność macierzową, która dla nas będzie już bardziej zrozumiała. Wygląda ona mianowicie tak: AX ≤ b, gdzie A to macierz współczynników funkcji ograniczających (a_n) postaci mxn, X to macierz decyzji (już przeze mnie omówiona), a b to macierz wyrazów wolnych b_j postaci mx1:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{93}$$

Wprowadza się również macierz C, która jest macierzą współczynników funkcji celu postaci nx1; korzysta się również z macierzy transponowanej C^T postaci 1xn:

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \tag{94}$$

Wiedząc już, jak wyglądają elementy poszczególnych macierzy, możemy sprowadzić nasze zadanie optymalizacyjne PL (87)-(88) do formalnej postaci:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{C}^T\mathrm{X} \to \max(\min)$$
$$\text{dla} \tag{95}$$
$$\begin{cases} \mathrm{AX} \leq \mathrm{b} \\ \mathrm{X} \geq \mathrm{O} \end{cases}$$

Istnieje jednak pewien problem. Jeżeli (95) to układ **nierówności**, wnioskujemy z tego, iż rozwiązaniem naszego zadania będzie zazwyczaj **nieskończony zbiór** liczb (oczywiście ograniczony), a my przecież szukamy konkretnych wartości zmiennych decyzyjnych! Nie ma się jednak czym martwić. W modelu PL pojawiają się w związku z tym kolejne pojęcia:

Zbiór decyzji wyznaczonych z układu (95) nazywamy **zbiorem decyzji dopuszczalnych** i oznaczamy literą D. Jego elementy określamy mianem **decyzji dopuszczalnych** (kandydatów do rozwiązania).

Zadanie modelu PL sprowadza się do wskazania najlepszych – optymalnych decyzji, czyli takich elementów x_{opt}, że dla każdego $x \in \mathrm{D}$, w przypadku maksymalizacji wartości funkcji celu, $f(x_{\mathrm{opt}}) \geq f(\mathrm{x})$, a minimalizacji – znak odwrotny. Każdą decyzję x_{opt} spełniającą ten warunek nazywamy **decyzją optymalną**, a wartości $f(x_{\mathrm{opt}})$ zwiemy **optymalną wartością funkcji celu**. Zbiór decyzji optymalnych, oczywiście $\mathrm{D}_{\mathrm{opt}} \subset \mathrm{D}$.

Gdy ilość zmiennych decyzyjnych n (ilość kolumn macierzy A) równa jest liczbie ograniczeń m (ilość wierszy macierzy A), to D składa się z jednej decyzji, która, gdy spełnia wszystkie warunki zadania, może zostać zaliczona do $\mathrm{D}_{\mathrm{opt}}$. Kiedy dla n zmiennych mamy różną od n ilość ograniczeń m, to maksymalną ilość możliwych rozwiązań określa wzór:

$$k = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{96}$$

Przy czym, jeśli niewiadomych mamy więcej niż równań, to układ ten jest **nieoznaczony**, więc albo nie ma rozwiązań, albo ma ich nieskończenie wiele. Programowanie liniowe opracowało metodę odnajdywania rozwiązań takich układów, poprzez sztuczne tworzenie nowych równań zerowych.

Macierzą bazową B_l układu równań (nierówności) AX = b nazywamy taką nieosobliwą macierz mxm, gdzie $m = \mathrm{R(A)}$, $l = 1, 2, \ldots, k$ i jest to tablica utworzona z kolumn macierzy A oraz wybranych wierszy (w takiej samej kolejności), czyli po prostu minorów macierzy A, których ilość określona jest właśnie powyższym wzorem. Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{mxn}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{97}$$

Ważne jest zdefiniowanie pojęcia macierzy bazowej, ponieważ w celu rozwiązania układu nierówności potrzebujemy mieć macierze kwadratowe, a to dlatego, że skoro AX = b, to szukany przez nas X = A^{-1}b (dzielenie lewostronne). Dla A niekwadratowego mamy kwadratowe macierze bazowe, więc $X_{Bl} = B_l^{-1} b_{Bl}$. Elementy **rozwiązania bazowego** X_{Bk} to **zmienne bazowe**.

W takim razie, przystępując do zadania optymalizacyjnego, najpierw liczymy liczbę rozwiązań k (chyba, że od razu widzimy, że $m = n$), a następnie na podstawie otrzymanej liczby macierzy bazowych ustalamy kolejne rozwiązania dopuszczalne, które analizujemy.

Nie musimy się bać znaku nierówności, ponieważ w przypadku rozwiązywania zadań PL wystarczy sztucznie dodać do nierówności tak zwaną **zmienną osłabiającą** (bilansującą), nieznaną i tak naprawdę mało nas obchodzącą, a dzięki której nierówność zostaje przekształcona w równość:

$$\begin{aligned} &a)\ a_1x_1 + a_2x_2 \le b \\ &b)\ a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 = b \end{aligned} \tag{98}$$

co można zrobić, ponieważ np.:

$$\begin{aligned} &a)\ 2\cdot 3 + 3\cdot 2 \le 14 \\ &b)\ 6 + 6 + \underset{x_3}{2} = 14 \end{aligned} \tag{99}$$

✖ Wykorzystanie macierzy w programowaniu

Istnieje wiele metod rozwiązywania problemów programowania liniowego, np. używanie tabeli simpleksów czy graficzne szukanie wierzchołka wieloboku zbioru D. W niektórych z nich nie korzysta się z macierzy w ogóle, w innych zamiast na tablicach dokonuje się działań na wektorach. W mojej pracy postanowiłem przytoczyć metodę dla nas najłatwiejszą, opartą na szukaniu decyzji X poprzez mnożenie macierzy i tym podobne operacje, które wykonywać nauczyliśmy się wcześniej.

Programowanie liniowe jest bardzo rozwiniętym i skomplikowanym pojęciem matematycznym, ale pokażę na prostych przykładach, jak łatwo można rozwiązywać zadania tego typu. Zacznijmy od, co prawda niezbyt realnego, ale unaoczniającego problem zadania z sektora usług:

Firma dostawcza do rozsyłania przesyłek zatrudniła dwóch nowych pracowników, którzy razem rozwozili dziennie nie więcej niż 120 przesyłek czekających na oddanie, przy czym pierwszy z nich był w stanie rozwieźć ich 60, a drugi 90. Pierwszy przynosił firmie zysk 6zł od przesyłki, a drugi 5zł. Ile przesyłek powinni dostawać do dostarczenia, by firma zarobiła na tym najwięcej?

Rozpoczniemy od zapisania zadania i układu nierówności:

$$\begin{aligned} &f(x,y) = 6x + 5y \to \max \\ &\begin{cases} x + y \le 120 \\ x \le 60 \\ y \le 90 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{100}$$

gdzie x to ilość dostarczanych przez pierwszego pracownika przesyłek, a y – przez drugiego. Teraz przekształcimy (100) w układ równań dzięki odpowiedniemu dodaniu zmiennych bilansujących:

$$
\begin{cases}
x + y + u_1 = 120 \\
x + u_2 = 60 \\
 y + u_3 = 90 \\
x, y, u_1, u_2, u_3 \geq 0
\end{cases}
\tag{101}
$$

Możemy teraz układać nasze równanie macierzowe:

$$
\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{A}}
\overset{\text{X}}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}
=
\overset{\text{b}}{\begin{bmatrix} 120 \\ 60 \\ 90 \end{bmatrix}}
\tag{102}
$$

Rząd macierzy A wynosi 3. Liczba zmiennych programowania (kolumn macierzy A) n = 5, liczba ograniczeń (wierszy) m = 3, zatem maksymalna liczba rozwiązań bazowych wynosi:

$$
\frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = \frac{20}{2} = 10
\tag{103}
$$

Teraz określić musimy macierze bazowe B, które są minorami 3x3 macierzy A (i jest ich 10). Oto wszystkie możliwości (indeks dolny przy B to numery kolumn):

(104)

$$
1)\ \text{B}_{123} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad
2)\ \text{B}_{124} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad
3)\ \text{B}_{125} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
4)\ \text{B}_{134} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad
5)\ \text{B}_{135} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
6)\ \text{B}_{145} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad
7)\ \text{B}_{234} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad
8)\ \text{B}_{235} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
9)\ \text{B}_{245} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad
10)\ \text{B}_{345} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Jest ich dużo, ale to nam nie przeszkadza, ponieważ część z nich możemy od razu odrzucić jako nie dające odpowiedzi: na pewno są to 4 i 8, ponieważ są to macierze o wyznaczniku równym zero (co wiemy z własności macierzy), więc nie odnaleźlibyśmy ich odwrotności (przypominam, że szukamy

$X_{Bl} = B_l^{-1} b_{Bl}$). Zapewne niektóre z pozostałych macierzy dadzą nam sprzeczny wynik, ale teraz jeszcze tego nie wiemy. Zatem pora odnaleźć rozwiązanie każdego równania bazowego:

1) najpierw szukamy macierzy odwrotnej, później mnożymy ją przez odpowiednią macierz wyrazów wolnych i otrzymujemy wartości odpowiednich zmiennych

(105)

$$X_{123} = B_{123}^{-1} \cdot b_{123}$$

$$B_{123}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X_{123} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 60 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ -30 \end{bmatrix}$$

otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ u_1 miało być większe lub równe 0, zatem X_{123} na pewno nie weźmiemy do D_{opt}

2) w taki sam sposób postępujemy z wszystkimi pozostałymi macierzami bazowymi, pamiętając o poprawnym wpisywaniu branych do równania zmiennych

3) finalnie, tworzymy tabelkę, na podstawie której odnajdziemy szukaną przez nas decyzję optymalną:

(106)

l	***x***	***y***	***u*₁**	***u*₂**	***u*₃**	**z = 6*x* + 5*y***
123	60	90	-30	0	0	*sprz.*
124	30	90	0	30	0	630
125	60	60	0	0	30	660
135	60	0	60	0	90	360
145	120	0	0	-60	90	*sprz.*
234	0	90	30	60	0	450
245	0	120	0	60	-30	*sprz.*
345	0	0	120	60	90	0

Jak widzimy, największy zysk (660zł) firma osiągnie, jeżeli pracownik pierwszy dostanie do rozwiezienia 60 przesyłek, a pracownik drugi – również 60. Analizując tabelę końcową, odnaleźliśmy naszą macierz decyzji X, odpowiedź do zadania brzmi więc:

$$X = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}, \quad f(x,y) = 660 \tag{107}$$

Myślę, że ten przykład pokazuje, jak bardzo znajomość operacji na macierzach przydatna jest w odnajdywaniu decyzji optymalnych. Powoli zmierzamy ku końcowi lektury… Przed nami jeszcze jedno zadanie, już trudniejsze i bardziej realistyczne (choć nadal wymyślone przeze mnie).

☛ PRZYKŁADOWE ZADANIE

Pewna piekarnia zaopatruje w pieczywo pięć pobliskich sklepów, w których codziennie występuje zapotrzebowanie na:

1) 25 bochenków chleba
2) 20 bochenków
3) 14
4) 6
5) 10

Przy czym zazwyczaj część z nich nie jest kupowana. Piekarze są w stanie włożyć do małego pieca 30 bochenków chleba razowego i żytniego, do średniego 35 bochenków razowego i pszennego (różnice te wynikają z wielkości bochenków oraz stosowanej ilości produktów), a do dużego 45 bochenków każdego rodzaju. Na chlebie żytnim piekarnia zarabia 2zł, na razowym 2,50zł, a pszennym 2,60zł. Ile pieczywa i jakiego rodzaju powinna produkować piekarnia, by jej zyski były jak największe?

Zacznijmy od napisania układu nierówności:

$$f(r,z,p) = 2{,}5r + 2z + 2{,}6p \to \max$$

$$\begin{cases} r + z + p \le 25 + 20 + 14 + 6 + 10 \quad ^{(1)} \\ r \le 30 + 35 + 45 \quad ^{(2)} \\ p \le 45 + 35 \quad ^{(3)} \\ z \le 30 + 45 \quad ^{(4)} \\ r, z, p \ge 0 \end{cases} \tag{108}$$

gdzie r to ilość produkowanego chleba razowego, z żytniego, a p pszennego, nierówność (1) określa zapotrzebowanie na chleb w pięciu sklepach, (2) mówi o zdolności piekarzy do wyprodukowania chleba razowego, (3) chleba pszennego, a (4) żytniego. Ustawiamy elementy naszych nierówności w odpowiednim szyku oraz dodajemy zmienne osłabiające:

$$\begin{cases} r + z + p + u_1 \qquad\qquad = 75 \\ r + \qquad\qquad u_2 \qquad = 110 \\ \qquad\quad p + \quad u_3 \quad = 80 \\ \qquad z + \qquad\qquad u_4 = 75 \\ r, z, p, u_1, u_2, u_3, u_4 \ge 0 \end{cases} \tag{109}$$

Nasz układ równań jest gotowy do rozwiązywania. Macierz A współczynników funkcji ograniczających:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{110}$$

Rząd macierzy A wynosi 4, zatem szukamy macierzy bazowych B o wymiarach 4x4, których będzie:

$$\frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 35 \tag{111}$$

Jest to ogromna liczba – trudność zadania jest dość duża, pomimo tego, że macierz A wygląda na bardzo łatwą do rozwiązania, gdyż składa się z samych jedynek i zer. Widzimy teraz, że pomimo małej ilości siedmiu zmiennych i czterech równań, do odnalezienia rozwiązania optymalnego potrzeba będzie naprawdę dużo czasu. Tutaj z pomocą ludziom przychodzą komputery – dzięki nim zadania tego typu bardzo prosto rozwiązać (o ile ma się odpowiedni program), albo inne metody, np. tablica simpleksów, ale o nich nie będziemy dzisiaj mówić.

Tymczasem, wracając do naszego zadania – oto wszystkie macierze bazowe B, jakie możemy otrzymać:

(112)

1234	1235	1236	1237	~~1245~~	1246	~~1247~~
1256	~~1257~~	1267	~~1345~~	~~1346~~	1347	~~1356~~
1357	1367	~~1456~~	~~1457~~	1467	1567	2345
~~2346~~	~~2347~~	2356	2357	~~2367~~	2456	~~2457~~
~~2467~~	2567	~~3456~~	3457	~~3467~~	3567	~~4567~~

Te z nich, które na podstawie analizy na pewno możemy odrzucić (det $B_l = 0$ oraz macierz ostatnia, bo nie otrzymamy w niej żadnej zmiennej potrzebnej do rozwiązania), od razu wykreśliłem. Ostatecznie zostało nam do obliczenia 19 rozwiązań bazowych, na podstawie których odnajdziemy optymalną decyzję piekarzy. Pomijam obliczenia, ponieważ nie o nich w tej chwili chciałbym mówić; zamieszczam wyniki:

(113)

l	*r*	*z*	*p*	u_1	u_2	u_3	u_4	*z*
1234	110	75	80	-190	0	0	0	*sprz.*
1235	-80	75	80	0	190	0	0	*sprz.*
1236	110	75	-110	0	0	190	0	*sprz.*
1237	110	-115	80	0	0	0	190	*sprz.*
1246	110	75	0	-110	0	80	0	*sprz.*
1256	0	75	0	0	110	80	0	150
1267	110	-35	0	0	0	80	110	*sprz.*
1347	110	0	80	-115	0	0	75	*sprz.*
1357	-5	0	80	0	115	0	75	*sprz.*
1367	110	0	-35	0	0	115	75	*sprz.*
1467	110	0	0	-35	0	80	75	*sprz.*
1567	75	0	0	0	35	80	75	187,5
2345	0	75	80	-80	110	0	0	*sprz.*
2356	0	75	0	0	110	80	0	150
2357	0	-5	80	0	110	0	80	*sprz.*
2456	0	75	0	0	110	80	0	150
2567	0	75	0	0	110	80	0	150
3457	0	0	80	-5	110	0	75	*sprz.*
3567	0	0	75	0	110	5	75	$\boxed{195}$

Otrzymałem bardzo wiele sprzecznych z warunkiem nieujemności wyników, jednak odnalazłem decyzję optymalną:

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix}, \quad f(r,z,p) = 195 \tag{114}$$

Przy czym należy zwrócić uwagę na to, dlaczego otrzymaliśmy dla dwóch zmiennych wynik zero – przeanalizujmy odpowiedź:

Rzuca się w oczy fakt, że piekarnia wyprodukuje tylko chleb jednego rodzaju – pszenny, który faktycznie powinien przynieść największe zyski (miał najwyższą cenę), ale dlaczego tak jest? – ano dlatego, iż zapotrzebowanie na chleb w pięciu sklepach wynosiło najwyżej 75 bochenków jakiegokolwiek rodzaju chleba dziennie, a piece mały, średni i duży mogły wyprodukować dziennie 110 bochenków chleba razowego, 80 pszennego lub 75 żytniego. Nie znając metody macierzowej, „prości" ludzie rozpatrywaliby to zagadnienie PL w taki sposób: skoro chleb pszenny przyniesie nam największe zyski, spróbujmy wyprodukować go jak najwięcej, a dopiero później zabierzmy się za pieczenie chleba tańszego. No i faktycznie, tym razem udałoby im się. My jednak musieliśmy to sprawdzić.

Bo gdyby możliwość produkcji chleba pszennego była mniejsza niż zapotrzebowanie na chleb, dowiedzielibyśmy się, jakiego innego pieczywa i ile upiec (oczywiście w pierwszej kolejności byłby to droższy od żytniego razowy), a gdyby piece tej piekarni nie miały tak wielkich pojemności, otrzymalibyśmy jeszcze więcej różnych wyników, z których mielibyśmy odpowiednią „mieszankę" chlebów do zrobienia.

Tak mówi analiza tego zagadnienia, ale czy faktycznie otrzymamy inne wyniki, gdy zmienimy odpowiednie parametry? Dlaczego by tego nie sprawdzić?

Zmieńmy warunki naszego zadania:

$$\begin{cases} r+z+p+u_1 = 100 \\ r+u_2 = 90 \\ p+u_3 = 60 \\ z+u_4 = 150 \\ r,z,p,u_1,u_2,u_3,u_4 \geq 0 \end{cases} \tag{115}$$

Zmieniłem tylko elementy macierzy b w naszym równaniu AX = b, więc ilość rozwiązań bazowych (113) pozostaje taka sama, zmieniają się tylko odpowiednie wartości w komórkach tej tabeli:

(116)

l	*r*	*z*	*p*	u_1	u_2	u_3	u_4	*z*
1234	90	150	60	-200	0	0	0	*sprz.*
1235	-110	150	60	0	200	0	0	*sprz.*
1236	90	150	-140	0	0	200	0	*sprz.*
1237	90	-50	60	0	0	0	200	*sprz.*
1246	90	150	0	-140	0	60	0	*sprz.*
1256	-50	150	0	0	140	60	0	*sprz.*
1267	90	10	0	0	0	60	140	245
1347	90	0	60	-50	0	0	150	*sprz.*
1357	40	0	60	0	50	0	150	256
1367	90	0	10	0	0	50	150	251
1467	90	0	0	10	0	60	150	225
1567	100	0	0	0	-10	60	150	*sprz.*
2345	0	150	60	-110	90	0	0	*sprz.*
2356	0	150	-50	0	90	110	0	*sprz.*
2357	0	40	60	0	90	0	110	236
2456	0	150	0	-50	90	60	0	*sprz.*
2567	0	100	0	0	90	60	50	200
3457	0	0	60	40	90	0	150	156
3567	0	0	100	0	90	-40	150	*sprz.*

Proszę zwrócić uwagę na to, jak pięknie dodatnie elementy spełniają warunki zadania, w szczególności spójrzcie na to, że bochenków zawsze jest wyprodukowanych nie więcej niż sto, gdy układ nie jest sprzeczny – rozwiązywanie zadań tą metodą zatem jest jak najbardziej poprawne. Otrzymaliśmy więc nowy wynik:

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix}, \quad f(r,z,p) = 256 \tag{117}$$

Teraz, przy nowych ograniczeniach, piekarnia sprzeda 40 bochenków chleba razowego i 60 pszennego, ponieważ takie dobranie przysporzy największych zysków, co również wynikało z wcześniejszej, bezobliczeniowej analizy tego zadania.

Właśnie to chciałem pokazać, wcześniej przygotowując was do obliczania macierzy odwrotnych, wyznaczników, rozwiązywania układów równań, mnożenia tablic itp. Nie zostały one stworzone ot, tak, bez celu, ponieważ matematykom się nudziło – znajdują poważne zastosowanie w rozwiązywaniu zadań optymalizacyjnych, z którymi każdy w końcu kiedyś się zetknie w swoim życiu, albo zakładając własną firmę i programując wydatki, albo sporządzając dla siebie dietę, albo szukając najlepszego dla siebie rozwiązania jakiegoś innego problemu ilościowego. Macierze w tym wspaniale pomagają.

☛ JAK ROBIĆ, BY ZAROBIĆ

Już naprawdę ostatnią rzeczą, jaką chcę wam przedstawić, jest zagadnienie czysto ekonomiczne, które przysparza nam samym największy problem i być może jest jedynym poważnym zadaniem programowania liniowego w naszym życiu. Chcę wam powiedzieć (jak mówi tytuł tego rozdziału) „jak robić, by zarobić".

Podczas rozmów z wielu ludźmi czynnymi zawodowo często natrafialiśmy wspólnie na problem wiecznego braku pieniędzy na własne potrzeby. Nie dość, że moi znajomi twierdzili, że zarabiają zbyt mało, to jeszcze mieli tak wiele wydatków – a to rachunki, a to coś jest potrzebne dzieciom do szkoły, a jedzenie, środki czyszczące… Zbierało się tego bardzo dużo i okazywało się, że resztka pieniędzy, która zostawała z wypłaty, nie wystarczyła na zakup nowego mebla, ozdoby, ubrania… Ale co się działo z tymi pieniędzmi, skoro powinny kumulować się na koncie i po pewnym czasie uzbierałaby się odpowiednia suma do wykorzystania? Wyparowywały?

Moim zdaniem, przyszła pora na naukę oszczędzania! Pisząc tę pracę, wpadłem na pomysł, dlaczego by nie zastosować programowania liniowego do planowania wydatków i oszczędności? Dzięki niemu na pewno każdy z nas byłby w stanie dopasować indywidualne potrzeby do własnych zarobków, a posiadanie takiego „planu" zobowiązywałoby nas do odpowiedniego postępowania i pomagałoby w przestrzeganiu postanowień, które sami byśmy sobie wyznaczyli. Zróbmy więc krótką, planowaną miesięczną listę wydatków nastolatka (dorośli mieliby więcej do liczenia):

Finanse
nie więcej niż 400zł miesięcznie
Rachunki i inne wydatki
telefon max. 50zł, jedzenie min. 200zł, autobus min. 80zł
Pragnienia (do późniejszej analizy)
dżinsy 160zł, koszula 100zł, laptop 3000zł, wyjście do kina 40zł, stolik 300zł

Oczywiście nie zamieszczam na tej liście rachunków za media czy inne tego typu, ponieważ tymi sprawami zajmują się rodzice – powyższa lista to własne wydatki nastolatka oraz pragnienia, na które teoretycznie dostaje „tylko" 400zł miesięcznie.

Do funkcji celu określającej oszczędności zaliczę finanse minus rachunki. Szukać będę tym razem maksymalnych ilości możliwych do kupienia przez nastolatka przedmiotów bądź usług. Już przekształcony układ równań tego zadania wyglądać będzie tak:

$$f(r) = 400 - r \to \max,\ r = r_1 + r_2 + r_3$$
$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + u_0 & = 400 \\ r_1 + \qquad\qquad u_1 & = 50 \\ \quad - r_2 + \qquad u_2 & = -200 \\ \qquad - r_3 + \quad u_3 & = -80 \\ r_1, r_2, r_3, u_0, u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{cases} \tag{118}$$

gdzie r_i oznacza rachunek danego rodzaju (i = 1 dla telefonu, 2 dla jedzenia, 3 na autobus).

Nie będzie to pospolite zagadnienie PL, ponieważ szukać będę konkretnych ilości konkretnych pragnień, które będą możliwe do spełnienia, przy czym najlepiej, gdyby było ich jak najwięcej. Dokonam tego jednak po otrzymaniu decyzji.

Jeżeli macie zastrzeżenia co do równania trzeciego i czwartego ze (118), przedstawię transformację jednego z nich:

$$\begin{aligned} &a)\ r_2 \geq 200 \quad |\ \cdot(\text{-}1) \\ &b)\ -r_2 \leq -200 \\ &c)\ -r_2 + u_2 = -200 \end{aligned} \tag{119}$$

Jest to prawdą, ponieważ np. dla r_2 = 300 i u_2 = 100 (co spełnia warunek nieujemności):

a) 300 ≥ 200 *zd. pr.*
b) -300 ≤ -200 *zd. pr.*
c) -300 + 100 = -200 *zd. pr.*

Możemy iść więc dalej z obliczeniami. Maksymalna ilość rozwiązań bazowych określona wzorem (96): 7!/(4!3!) = 35. Tworzę tabelkę rozwiązań, wykreślając niepotrzebne:

(120)

1234	1235	1236	1237	~~1245~~	~~1246~~	1247
~~1256~~	1257	1267	~~1345~~	1346	~~1347~~	1356
~~1357~~	1367	~~1456~~	~~1457~~	1467	1567	2345
~~2346~~	~~2347~~	2356	2357	~~2367~~	~~2456~~	2457
~~2467~~	2567	3456	~~3457~~	~~3467~~	3567	~~4567~~

Przypominam, w jaki sposób oblicza się rozwiązania bazowe:

$$X_{1237} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = B_{1237}^{-1} b_{1237} = \frac{B_{1237}^{D}}{\det B_{1237}} b = \frac{D_{1237}^{T}}{\det B_{1237}} b \tag{121}$$

$$X_{1237} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 400 \\ 50 \\ -200 \\ -80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 50 \\ -200 \\ -80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 200 \\ 150 \\ 70 \end{bmatrix}$$

Dokonuję dalszych obliczeń, zestawiając je w tabelce, jak wcześniej:

(122)

l	r_1	r_2	r_3	u_0	u_1	u_2	u_3	***z***
1234	50	200	80	70	0	0	0	70
1235	120	200	80	0	-70	0	0	*sprz.*
1236	50	270	80	0	0	70	0	0
1237	50	200	150	0	0	0	70	0
1247	50	200	0	150	0	0	-80	*sprz.*
1257	200	200	0	0	-150	0	-80	*sprz.*
1267	50	350	0	0	0	150	-80	*sprz.*
1346	50	0	80	270	0	-200	0	*sprz.*
1356	320	0	80	0	-270	-200	0	*sprz.*
1367	50	0	350	0	0	-200	270	*sprz.*
1467	50	0	0	350	0	-200	-80	*sprz.*
1567	400	0	0	0	-350	-200	-80	*sprz.*
2345	0	200	80	120	50	0	0	$\boxed{120}$
2356	0	320	80	0	50	120	0	0
2357	0	200	200	0	50	0	120	0
2457	0	200	0	200	50	0	-80	*sprz.*
2567	0	400	0	0	50	200	-80	*sprz.*
3456	0	0	80	320	50	-200	0	*sprz.*
3567	0	0	400	0	50	-200	320	*sprz.*

Okazało się to, co było do przewidzenia – największe oszczędności osiągniemy, gdy nie będziemy w ogóle korzystać z telefonu - właściwie nie musieliśmy tego nawet liczyć. Inaczej byłoby, gdybyśmy wyznaczyli minimalną wartość rachunków za telefon, ale nie określiliśmy jej – przyjęliśmy, że za telefon maksymalnie zapłacimy 50zł, a minimalnie – zero. Jeśli nie satysfakcjonują was te wyniki, możecie ułożyć układ równań z kolejnymi ograniczeniami, albo z dodatkowymi rachunkami. Zwiększając układ o jedną nierówność więcej, otrzymalibyśmy już macierz nie 4x7, ale 5x9, więc odpowiednio zamiast 35 możliwych rozwiązań bazowych – 126, a gdy o jeszcze jedną (6x11), to wtedy – 462. Nie chciałem więc urozmaicać tego zadania ze względu na rosnącą szybciej od rozmiarów układu maksymalną liczbę rozwiązań; chciałem tylko zademonstrować, do czego można wykorzystać jeszcze programowanie liniowe – w życiu codziennym.

Będąc ciekawym, sprawdziłem, jakie wyniki otrzymamy, gdy nasze fundusze będą niższe o połowę. Wszystkie rozwiązania były sprzeczne – nasz układ nie miał rozwiązań, a to dlatego, że 200zł nie wystarczy nam na niezbędne wydatki, na które przeznaczyć musimy minimum 280zł.

Zadanie to nie polegało tylko na odnalezieniu odpowiedzi na pytanie, które rachunki i w jakiej ilości płacić, by oszczędzić najwięcej, ale również na dowiedzeniu się, które z pragnień nastolatka będą mogły zostać spełnione.

Nasze oszczędności wynosić będą 120zł, a nastolatek marzy o dżinsach, koszuli, laptopie, wyjściu do kina i o stoliku. Chcąc spełnić jak najwięcej pragnień w jednym miesiącu, nie ma zbyt wielkiego wyboru – może tylko kupić sobie koszulę albo wyjść do kina (teoretycznie aż trzy razy). Zestawię w tabeli, jak długo musiałby oszczędzać na dane pragnienia (w którym miesiącu mógłby je kupić):

(123)

produkt	dżinsy	koszula	laptop	kino	stolik
cena	160	100	3000	40	300
oczekiwanie	2	1	25	1	3

Z zadania tego wyciągnąłem dwa wnioski, którymi chcę się z wami podzielić:
1) układając układ równań do zadania PL, pamiętać należy o wszystkich zastrzeżeniach – każde z nich ogranicza odpowiedź do takiej, jakiej najbardziej potrzebujemy; uważać trzeba jednak na to, by w warunkach domowych, do własnych obliczeń formułować zadania optymalizacyjne w taki sposób, by nie wprowadzać wielu niepotrzebnych zmiennych, które bardzo zwiększają ilość możliwych rozwiązań zadania, a tego nie chcemy
2) na pytanie postawione na początku – „jak robić, by zarobić" nie ma jednoznacznej odpowiedzi; ważne jest jednak to, by rozsądnie planować wydatki, a oszczędności nie marnować na niepotrzebne rzeczy

☛ CO NALEŻY ZAPAMIĘTAĆ

W trakcie pisania mojej pracy o macierzach i programowaniu liniowym za wszelką cenę próbowałem sprawdzić wszystkie przytoczone w niej twierdzenia, a raz nawet udało się jedno obalić! Niektóre z otrzymanych wyników prowadziły do ciekawych wniosków, których na pierwszy rzut oka nie można było dostrzec (na przykład rozszerzyłem kilka twierdzeń o własnościach wyznaczników). Chciałbym podsumować to, czego można było dowiedzieć się z mojej pracy, oraz co warto zapamiętać na przyszłość, gdybyśmy stanęli przed zagadnieniami możliwymi do rozwiązania dzięki programowaniu liniowemu.

Macierze

Dowiedzieliśmy się, czym są macierze, jakie są ich zastosowania. Poznaliśmy własności macierzy oraz zagadnienia je charakteryzujące – wyznacznik, ślad, diagonala. Zapoznaliśmy się z wieloma rodzajami macierzy, poznaliśmy prawa rządzące działaniami na tablicach. Odnajdywaliśmy macierze odwrotne, transponowane, macierze dopełnień algebraicznych. Rozwiązaliśmy wiele układów równań z użyciem macierzy. Zobaczyliśmy, jak wyglądają twierdzenie Kroneckera-Capelliego oraz wzory Cramera, pozwalające odnajdywać rozwiązania układów równań metodą wyznaczników.

Programowanie liniowe

Wiemy już, w jaki sposób rozwiązuje się zadania optymalizacyjne, używając do obliczeń rachunku macierzowego. Potrafimy też zamienić układ nierówności na układ równań. Poznaliśmy nowy sposób planowania wydatków. **Umiemy** rozwiązywać zadania PL!

☛ BIBLIOGRAFIA

1. „Matematyka Fizyka Chemia", Wydawnictwo Naukowe PWN, 2009
2. „Analiza matematyczna w zadaniach", W. Krysicki, L. Włodarski, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991
3. „Programowanie matematyczne", A. Cegielski
4. Wikipedia, wolna encyklopedia
5. WIEM, darmowa encyklopedia
6. „Słownik matematyka", Wydawnictwo „GREG", 2005
7. „Tablice matematyczne", A. Cewe, H. Nahorska, I. Pancer, Wydawnictwo „Podkowa", Gdańsk 2000
8. „Programowanie liniowe. Metody i zastosowania", Saul I. Gass, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1980

☛ NOTY KOŃCOWE

Dziękuję za przeczytanie mojej pracy. Mam nadzieję, że przyda się wam w przyszłej działalności naukowej oraz do rozwiązywania zadań matematycznych, w szczególności programowania liniowego.

autor: Mateusz Pater
mail: mati_pater@o2.pl

szkoła: LO im. Ojca Św. Jana Pawła II
pl. Kazimierza Wielkiego 1
32-005 Niepołomice
tel./fax.: 281 16 94