Od szczegółu do ogółu

Antoni Dera, Arkadiusz Łudzik, Alicja Madeyska

28 lutego 2018

1 Wstęp

Na czwartkowych zajęciach z matematyki w ramach projektu „Laboratorium Twórczej Matematyki” rozwiązywaliśmy pewne zadanie z testu maturalnego. Najprostsze rozwiązanie udało się nam szybko wymyślić, jednak postanowiliśmy pociągnąć nasze rozważania dalej. W tym artykule przedstawiamy efekty naszej pracy. Pokazujemy drogę od prostego zadania do ogólnego wzoru na sumę n-tych potęg dwóch liczb.

2 Wyjściowe zadanie

Oto treść zadania będącego punktem wyjścia do naszych rozważań.

Zadanie 2.1. *Dane są dwie liczby, których suma wynosi* 1*, a suma ich kwadratów wynosi* 61*. Wyznaczyć sumę sześcianów tych liczb.*

Poniżej prezentujemy pierwsze rozwiązanie, do którego doszliśmy.

Oznaczmy szukane liczby przez x i y. Wtedy mamy układ równań

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ x^2+y^2 &= 61 \end{cases}$$

Wyliczając z pierwszego równania $y = 1 - x$ i podstawiając do drugiego równania dostajemy po przekształceniach

$$x^2 - x - 30 = 0,$$

czyli $x = -5$ lub $x = 6$. Dla y dostajemy takie same wartości. Ostatecznie szukane liczby to -5 i 6. Suma ich sześcianów to 91 i zadanie zostało rozwiązane.

Pojawiło się pytanie, czy da się to zadanie rozwiązać nie wyliczając rozwiązań układu równań. Gdyby wyniki nie wyszły takie „ładne”, rachunki mogłyby okazać się bardzo skomplikowane.

Ze wzoru skróconego mnożenia mamy:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Zatem

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y). \tag{1}$$

Z kolei ze wzoru

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

wyznaczamy

$$xy = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 - (x^2+y^2)\right). \tag{2}$$

Podstawiając wyliczony w (2) wzór na xy do (1) otrzymujemy:

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - \frac{3}{2}\left((x+y)^2 - (x^2+y^2)\right)(x+y). \tag{3}$$

Podstawiając do (3) dane z zadania dostajemy

$$x^3 + y^3 = 1^3 - \frac{3}{2}(1^2 - 61) \cdot (1) = 91.$$

3 Pierwsze uogólnienie

Wzór (3) zainspirował nas do postawienia naturalnego pytania, czy w taki sam sposób można wyznaczyć sumy wyższych potęg dwóch liczb. Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy następującą notację:

$$A = x + y \quad \text{oraz} \quad B = x^2 + y^2.$$

Przy tych oznaczeniach mamy z (3)

$$x^3 + y^3 = A^3 - \frac{3}{2}(A^2 - B)A.$$

Po uproszczeniu dostajemy:

$$x^3 + y^3 = -\frac{1}{2}A^3 + \frac{3}{2}AB.$$

Przedstawimy teraz wzór na sumę czwartych potęg liczb x i y za pomocą A i B.

Ze wzoru skróconego mnożenia (albo trójkąta Pascala) mamy

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Zatem

$$x^4 + y^4 = (x+y)^4 - 4xy(x^2+y^2) - 6(xy)^2.$$

Korzystając ze wzoru (2) i wprowadzonych oznaczeń dostajemy

$$x^4 + y^4 = A^4 - 4\left(\frac{1}{2}(A^2 - B)\right) \cdot B - 6\left(\frac{1}{2}(A)^2 - B\right)^2.$$

Upraszczając to wyrażenie, np. za pomocą programu Wolfram Alpha, dostajemy:

$$x^4 + y^4 = -\frac{1}{2}A^2 + 4A^2B - 4B^2.$$

Ten wzór wygląda dość skomplikowanie. Główna trudność wzięła się z tego, że posługujemy się sumą kwadratów dwóch liczb. Okazuje się, że gdy zastąpić tą sumę przez iloczyn obu liczb, wzory wychodzą znacznie prostsze. Zobrazujemy to w kolejnej części.

4 Kolejne etapy

Wprowadzimy teraz następujące oznaczenia:

$$a = x + y, \quad \text{oraz} \quad b = xy.$$

Ponadto, dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ bedziemy pisać

$$S_n = x^n + y^n.$$

Naszym celem jest wyrażenie S_n za pomocą a i b. Kilka pierwszych elementów tego ciągu wyliczyliśmy powyżej. Przypomnimy je teraz:

$$\begin{aligned} S_1 = x + y &= a && (4)\\ S_2 = x^2 + y^2 &= a^2 - 2b, && (5)\\ S_3 = x^3 + y^3 &= a^3 - 3ab, && (6)\\ S_4 = x^4 + y^4 &= a^4 - 4a^2b + 2b^2. && (7) \end{aligned}$$

Z tych wzorów widać, że ogólna formuła na S_n będzie się zaczynała od a^n. Aby móc zauważyć zasadę powstawania kolejnych współczynników, musimy wyprowadzić jeszcze kilka wzorów. Z pomocą programu Wolfram Alpha otrzymaliśmy:

$$\begin{aligned} S_5 = x^5 + y^5 &= a^5 - 5a^3b + 5ab^2, && (8)\\ S_6 = x^6 + y^6 &= a^6 - 6a^4b + 39a^2b^2 - 2b^3. && (9) \end{aligned}$$

Następnie podstawiliśmy do wzorów (8) i (9) wcześniej otrzymane wzory (5), (6) i (7) dostając:

$$\begin{aligned} S_5 &= a^5 - 5b \cdot S_3 - 10b^2 \cdot S1,\\ S_6 &= a^6 - 6b \cdot S_4 - 15b^3 \cdot S_2 - 20b^3. \end{aligned}$$

Pojawiające się w dwóch ostatnich równaniach współczynniki są dwumianami Newtona, czyli wyrażeniami postaci

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dla odpowiednio dobranych n i k. Łatwo przy tym można zauważyć, że we wzorze na S_n pojawiają się kolejne dwumiany Newtona, w których górny wskaźnik jest równy właśnie n, a dolny wzrasta o 1 aż do $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza zaokrąglenie dolne, czyli największą liczbę całkowitą, niewiększą od x.

5 Wzór ogólny, rekurencja

Rozważania prowadzone w poprzedniej części pozwoliły nam na wyprowadzenie ogólnego wzoru na sumę n-tych potęg dwóch liczb.

Niech T_n będzie ciągiem zadanym wzorem:

$$T_n = a^n - \binom{n}{1} b \cdot S_{n-2} - \binom{n}{2} b^2 \cdot S_{n-4} - \binom{n}{3} b^3 \cdot S_{n-6} - \cdots .$$

Można to zapisać prościej jako

$$T_n = a^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} b^k \cdot S_{n-2k}. \tag{10}$$

Przyjmujemy przy tym, że

$$S_0 = 1,$$

czyli **nie zachodzi** $S_0 = x^0 + y^0$, bo to byłoby równe 2. Teraz udowodnimy, że T_n jest równe S_n, czyli, że wzór (10) pozwala wyliczyć sumę n-tych poteg liczb x i y za pomocą sum mniejszych potęg. To jest główny wynik naszej pracy.

Twierdzenie 5.1. *Dla każdego $n \geqslant 1$ mamy*

$$S_n = T_n.$$

Dowód. Zaczniemy, jak zwykle, od wzoru skróconego mnożenia:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \binom{n}{1} x y^{n-1} + y^n.$$

Grupując wyrazy nieco inaczej i stosując wprowadzone oznaczenia mamy:

$$a^n = x^n + y^n + \binom{n}{1} xy(x^{n-2} + y^{n-2}) + \binom{n}{2} x^2 y^2 (x^{n-4} + y^{n-4}) + \ldots,$$

czyli

$$S_n = a^n - \left(\binom{n}{1} b \cdot S_{n-2} + \binom{n}{2} b^2 \cdot S_{n-4} + \ldots \right). \tag{11}$$

Ostatni wyraz w nawiasie zależy od parzystości liczby n. Dla n parzystego, możemy zapisać $n = 2m$ dla pewnego m i wtedy ostatnim wyrazem jest

$$\binom{n}{m} x^m y^m = \binom{n}{m} b^m \cdot S_0.$$

Biorąc pod uwagę, że w tym przypadku $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = m$, widzimy, że po prawej stronie wzoru (11) jest dokładnie T_n, czyli udowodnilismy twierdzenie w tym przypadku.

Dla n nieparzystego postępujemy tak samo. Zapisujemy $n = 2m + 1$. Wtedy ostatnie wyrażenie w nawiasie we wzorze (11) jest równe

$$\binom{n}{m} x^m y^m (x+y) = \binom{n}{m} b^m \cdot S_1.$$

Ponieważ również w tym przypadku $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = m$, prawa strona wzoru (11) jest równa T_n. To kończy dowód całego twierdzenia. $\square$

Z powyższego twierdzenia wynikają dwa wnioski. Po pierwsze, sumę n-tych potęg dwóch liczb można przedstawić za pomocą potęgi ich sumy i sum wszystkich mniejszych potęg tej samej parzystości, co wykładnik n, pomnożonych przez odpowiednią potegę iloczynu tych liczb.

Po drugie, stosując powyższą obserwację rekurencyjnie, tzn. zastępując sumy mniejszych potęg przez sumy jeszcze mniejszych potęg, dochodzimy do ciekawego wniosku.

Wniosek 5.2. *Niech x, y będą dowolnymi liczbami i niech $n \geqslant 1$ bedzie dodatnią liczbą naturalną. Wówczas suma $S_n = x^n + y^n$ daje się wyrazić za pomocą sum i potęg sumy i iloczynu danych liczb. Inaczej mówiąc S_n jest wielomianem zmiennych $a = x + y$ oraz $b = xy$.*

Twierdzenie 5.1 nie podaje jawnej postaci na współczynniki sumy S_n zapisanej jako wielomian od zmiennych a i b. Mamy tu na myśli współczynniki takie jak we wzorach od (4) do (8). Niestety, na razie nie udało nam się znaleźć wzoru na te współczynniki. Nie poddajemy się i kontynuujemy poszukiwania rozwiązania problemu

Problem 5.3. *Wyrazić S_n jako wielomian zmiennych a i b, czyli wyznaczyć współczynniki $s_{i,j}$ w równaniu*

$$S_n = \sum_{i,j=0}^{n} s_{i,j} \cdot a^i b^j.$$

Mamy nadzieję, że nasza praca zachęci również innych do pracy nad problemem 5.3.

Podziękowania. Dziękujemy naszym profesorom, Tomaszowi Szembergowi i Danielowi Wójcikowi za opiekę nad pracą i pomoc przy jej pisaniu. Panu Pawłowi Solarzowi dziękujemy za wprowadzenie do redakcji tekstu w LaTeX-u.