Okręgi w ujęciu Euklidesowym, a płaszczyzna dziewięciu punktów

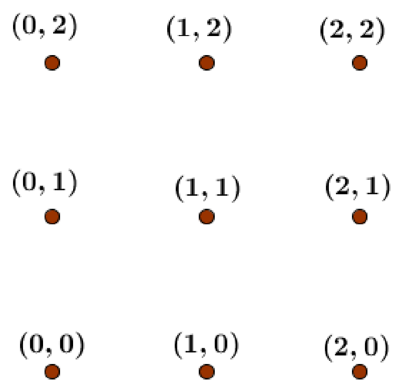
SZYMON KĄDZIELAWA, OLGA PIOTROWICZ

Płaszczyzna dziewięciu punktów jest przykładem geometrii skończonej, czyli takiej, gdzie cały system geometryczny opiera się na skończonej liczbie punktów. Wśród geometrii skończonych wyróżniamy geometrie afiniczne i rzutowe. W naszych rozważaniach skupiamy się na ujęciu afinicznym, czyli takim, gdzie istnieje pojęcie równoległości między prostymi (na płaszczyznach rzutowych każde dwie proste się przecinają).

Wyniki, które tu przedstawiamy są kontynuacją rozważań na temat płaszczyzny dziewięciu punktów przedstawionych w artykule naszych kolegów *"Trójkąty w ujęciu Euklidesowym, a płaszczyzna dziewięciu punktów"*. W tamtej części rozważania koncentrują się wokół relacji między prostymi oraz własności trójkątów. Przeprowadzono porównanie podstawowych twierdzeń w ujęciu euklidesowym z ich analogicznymi wypowiedziami w języku dziewięciu punktów. My proponujemy czytelnikowi podobną analizę ze szczególnym uwzględnieniem własności okręgów.

§ 1
Wprowadzenie do płaszczyzny dziewięciu punktów

Podobnie jak dobrze wszystkim znana płaszczyzna Euklidesowa, również płaszczyzny skończone opierają się na pewnych aksjomatach. Jednym z takich aksjomatów jest warunek, że dla dowolnych dwóch punktów na płaszczyźnie skończonej istnieje dokładnie jedna prosta, która te punkty zawiera. Widzimy tu pewne podobieństwo do płaszczyzny euklidesowej, gdzie również dwa punkty w sposób jednoznaczny determinują prostą przez nie przechodzącą. Szczegółową aksjomatykę afinicznych płaszczyzn skończonych czytelnik znajdzie w artykule [1]. Wynika z niej, że płaszczyzna skończona składająca się z n^2 punktów zawiera n^2+n prostych, takich że na każdej prostej leży n punktów. W naszym przypadku mamy do czynienia z dziewięcioma punktami, które generują 12 prostych zawierających po 3 punkty. Andrzej Szablewski w [2] i [3] podaje nam współrzędne tych punktów (na rysunku obok). Ponieważ wszystkie współrzędne są liczbami ze zbioru $\{0,1,2\}$,



płaszczyzna ta jest czasem nazywana *"płaszczyzną modulo 3"*. W matematyce wyższej słowo modulo oznacza wyznaczanie reszty z dzielenia w zbiorze liczb całkowitych, a tak się akurat składa, że liczby $\{0, 1, 2\}$ są wszystkimi możliwymi resztami z dzielenia przez 3.

W artykule *"Trójkąty w ujęciu Euklidesowym, a płaszczyzna dziewięciu punktów"* została podana definicja prostej. Zachowując notację z tamtej części przypominamy, że płaszczyzna dziewięciu punktów zawiera 12 następujących prostych:

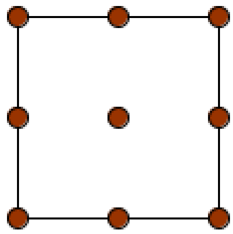
$$L_1 = \{(0,2), (1,2), (2,2)\} \qquad L_7 = \{(0,2), (1,1), (2,0)\}$$
$$L_2 = \{(0,1), (1,1), (2,1)\} \qquad L_8 = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$$
$$L_3 = \{(0,0), (1,0), (2,0)\} \qquad L_9 = \{(0,1), (1,2), (2,0)\}$$
$$L_4 = \{(0,2), (0,1), (0,0)\} \qquad L_{10} = \{(1,2), (2,1), (0,0)\}$$
$$L_5 = \{(1,2), (1,1), (1,0)\} \qquad L_{11} = \{(2,1), (1,0), (0,2)\}$$
$$L_6 = \{(2,2), (2,1), (2,0)\} \qquad L_{12} = \{(0,1), (1,0), (2,2)\}$$

W naszych rozważaniach istotne będzie też pojęcie odległości. Również powołując się na kolegów przypominamy, że na płaszczyźnie dziewięciu punktów odległość między dwoma punktami jest definiowana jako liczba współrzędnych, którymi te dwa punkty się różnią. Zatem wszystkie odcinki (zbiory dwuelementowe) na płaszczyźnie dziewięciu punktów będą miały długości 1 lub 2.

Po tym krótkim wprowadzeniu oraz przypomnieniu podstawowych faktów dotyczących naszej płaszczyzny, możemy przejść do zasadniczej części- a mianowicie do wyników związanych z własnościami okręgów.

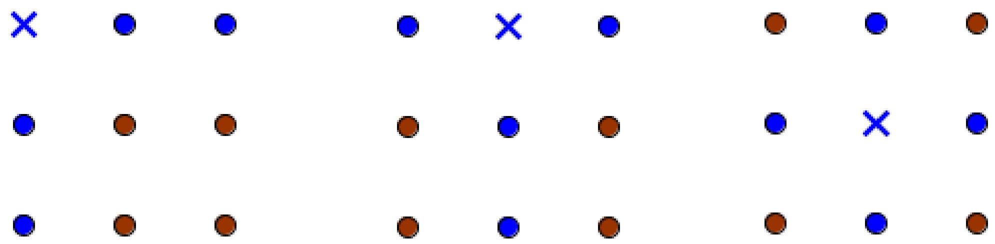
§ 2
Okręgi na płaszczyźnie dziewięciu punktów

Okręgiem o ustalonym promieniu nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny znajdujących się w odległości równej temu promieniowi od jednego punktu płaszczyzny, zwanego środkiem okręgu. Na płaszczyźnie dziewięciu punktów możliwe są jedynie okręgi o promieniach długości 1 lub 2. Ponieważ każdy z punktów tej płaszczyzny może być środkiem okręgu, oznacza to, że w płaszczyźnie dziewięciu punktów zawartych jest dokładnie 18 okręgów- po 9 każdego "rozmiaru". Gdyby narożne punkty tej płaszczyzny traktować jako wierzchołki kwadratu (rysunek obok), to 9 rozważanych punktów można by podzielić na trzy kategorie: wierzchołki kwadratu, środki boków kwadratu oraz środek symetrii kwadratu. Taki podział punktów pozwala dokonać typizacji występujących na

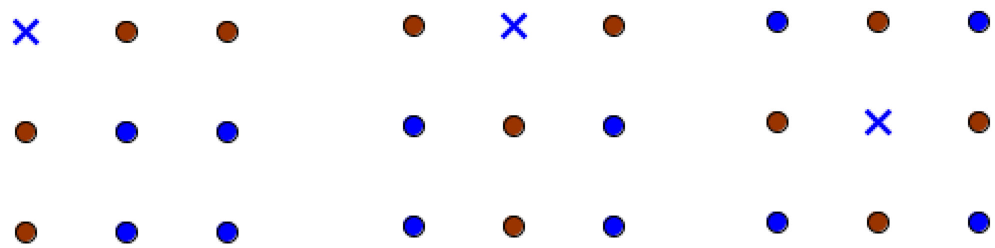


płaszczyźnie dziewięciu punktów okręgów, tak jak w części *"Trójkąty w ujęciu Euklidesowym, a płaszczyzna dziewięciu punktów"* podzielono występujące na płaszczyźnie trójkąty. Poniżej prezentujemy rysunki ilustrujące kształt okręgów każdego z tych typów, gdzie środkami okręgów są kolejno: punkt będący wierzchołkiem kwadratu, punkt będący środkiem boku kwadratu oraz punkt o współrzędnych (1,1). Uwzględniając sytuacje symetryczne mamy:

- okręgi o promieniu długości 1:



- okręgi o promieniu długości 2:

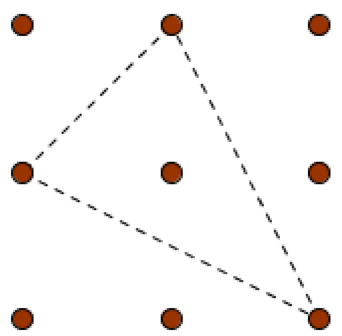


Środki okręgów zostały zaznaczone krzyżykiem, a punkty należące do okręgów kolorem niebieskim. Łatwo można zaobserwować, że niezależnie od długości promienia oraz wyboru środka okręgu, na płaszczyźnie dziewięciu punktów okrąg zawsze składa się z czterech punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Ponadto ciekawym fenomenem jest, że okręgi o wspólnym środku wzajemnie się uzupełniają. To znaczy, jeśli rozważymy dowolny punkt tej płaszczyzny i weźmiemy okrąg o promieniu 1 i środku w tym punkcie oraz okrąg o promieniu 2 i środku w tym samym punkcie, to wówczas te dwa okręgi nie mają żadnych punktów wspólnych, natomiast biorąc zbiór składający się ze wszystkich punktów obydwu okręgów i dokładając do niego środek okręgu ostatecznie otrzymamy całą płaszczyznę. Łatwo to można zauważyć porównując powyższe rysunki kolumnami.

Naturalnym rozszerzeniem pojęcia okręgu jest koło. Jest to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego środka jest mniejsza lub równa promieniowi. Jesteśmy przyzwyczajeni, że na płaszczyźnie euklidesowej koło zawiera dużo więcej punktów, niż okrąg. Tutaj rzecz przedstawia się zupełnie inaczej. W pierwszej kolejności rozważmy koła o promieniu 1. Oczywiście będą do nich należeć punkty znajdujące się na okręgu, ale pozostają jeszcze punkty oddalone od środka o mnie niż 1. Jednak w tej sytuacji może to być wyłącznie odległość równa 0. Zatem koła o promieniu 1 różnią się od okręgów zaledwie jednym punktem- środkiem okręgu. Dla kontrastu przyjrzyjmy się kołom o promieniu 2. Ponieważ wszystkie punkty na płaszczyźnie dziewięciu punktów znajdują się od siebie w odległości mniejszej lub równej 2, wniosek z tego, że każde koło o promieniu 2 w istocie jest całą płaszczyzną. Mając zatem zbiór wszystkich punktów należących do takiego koła, nie jesteśmy w stanie wskazać, który z nich był środkiem. Koła o promieniu 2 są na płaszczyźnie dziewięciu punktów zbiorami nierozróżnialnymi między sobą.

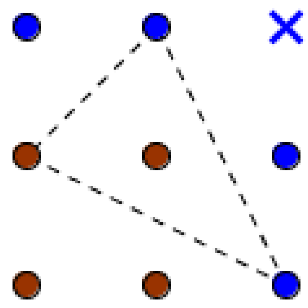
Ciekawym zagadnieniem w geometrii są związki okręgów z innymi figurami geometrycznymi. Zaczniemy od związków z prostymi. Przypomnijmy, że na "zwykłej" płaszczyźnie prosta mogła być z okręgiem rozłączna, mogła być styczną do okręgu lub jego sieczną. Pojęcia te w sposób ścisły wiązały się z odległością prostej od środka okręgu.

Odległość ustalonego punktu od prostej na płaszczyźnie euklidesowej definiuje się jako długość najkrótszego odcinka, którego jednym końcem jest właśnie ten ustalony punkt, a drugim końcem punkt leżący na danej prostej. Definicja ta może być zastosowana również na płaszczyźnie dziewięciu punktów. Chcąc określić odległość punktu od prostej nie zawierającej tego punktu wystarczy wybrać najkrótszą z odległości między tym punktem, a trzema punktami tworzącymi prostą. Jeśli punkt leży na prostej, to wówczas przyjmujemy, że ta odległość wynosi 0.

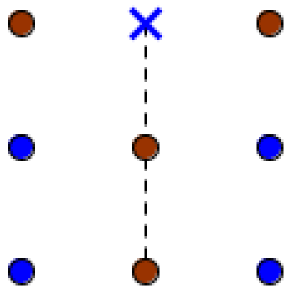


Przykładowo spróbujmy znaleźć odległość punktu $(1,1)$ (punkt środkowy) od prostej L_9 (rysunek po lewej). Przypomnijmy, że prostą tą tworzą punkty o współrzędnych $(0,1), (1,2), (2,0)$ odległe od punktu $(1,1)$ odpowiednio o 1, 1 i 2. Najkrótsza z tych odległości wynosi 1, zatem odległość punktu $(1,1)$ od prostej L_9 wynosi 1.

Wprowadzenie pojęcia odległości punktu od prostej pozwala nam zdefiniować styczną do okręgu. Prostą nazwiemy styczną do okręgu, gdy jej odległość od środka tego okręgu będzie równa promieniowi. Bardzo ważną własnością stycznej na płaszczyźnie euklidesowej jest fakt, że ma ona dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem. Punkt taki nazywamy punktem styczności. Po raz kolejny płaszczyzna dziewięciu punktów ukazuje nam tutaj swoje nieszablonowe własności...



Rozważmy okrąg o środku w punkcie $(2,2)$ i promieniu długości 1 oraz prostą L_9. Na rysunku po prawej punkty okręgu zaznaczono kolorem niebieskim, a punkty prostej połączono pomocniczą linią przerywaną. Odległość prostej od środka okręgu (punkt zaznaczony krzyżykiem) jest równa 1, zatem zgodnie z definicją prosta L_9 jest styczna do tego okręgu. Jednak widzimy też, że prosta ta ma 2 punkty wspólne z okręgiem- punkty o współrzędnych (1,2) i (2,0). Mamy zatem 2 punkty styczności...

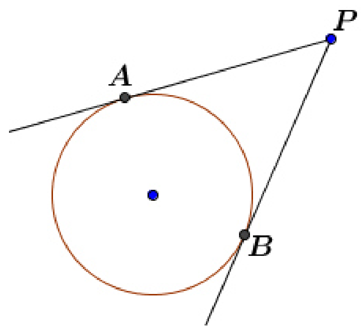


Równie zaskakujące wnioski przynosi analiza innych położeń między prostą, a okręgiem. Raczej nikogo nie zaskoczy fakt, że sieczną zdefiniujemy jako prostą, której odległość od środka okręgu jest mniejsza, niż promień. Na "zwykłej" płaszczyźnie sieczna ma zawsze dwa punkty wspólne z okręgiem. Tutaj potrafimy jednak wskazać sieczną (i to nawet przechodzącą przez środek okręgu), która nie ma z okręgiem żadnych punktów wspólnych. Przykładem może być okrąg o środku w punkcie (1,2) i promieniu 2 oraz prosta L_5 (rysunek po lewej).

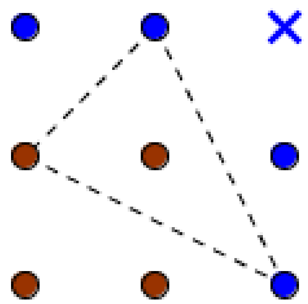
Z pojęciem styczności wiąże się bardzo ważne twierdzenie geometrii euklidesowej, a mianowicie twierdzenie o odcinkach stycznych:

Jeśli przez ustalony punkt P leżący poza okręgiem poprowadzimy obydwie styczne do tego okręgu, to odcinki od punktu P do obydwu punktów styczności będą miały taką samą długość.

$$|PA| = |PB|$$

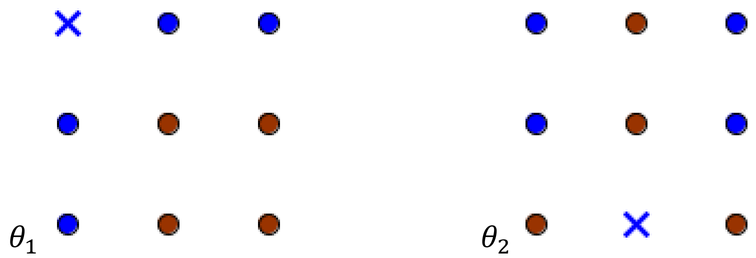


Pojawia się pytanie, czy to twierdzenie można przetłumaczyć na język dziewięciu punktów. Pewien problem związany z interpretacją tego twierdzenia pojawił się już podczas analizy rozpatrywanych wcześniej przykładów. Możemy bowiem wskazać styczną mającą dwa punkty wspólne z okręgiem. Pytanie więc- odległość do którego z nich rozważać? Na szczęście własności, jakie na tej płaszczyźnie posiadają proste czyni nasz dylemat bezzasadnym. Przyjrzyjmy się raz jeszcze okręgowi o środku w punkcie (2,2) i promieniu 1 (rysunek obok). Prosta L_9

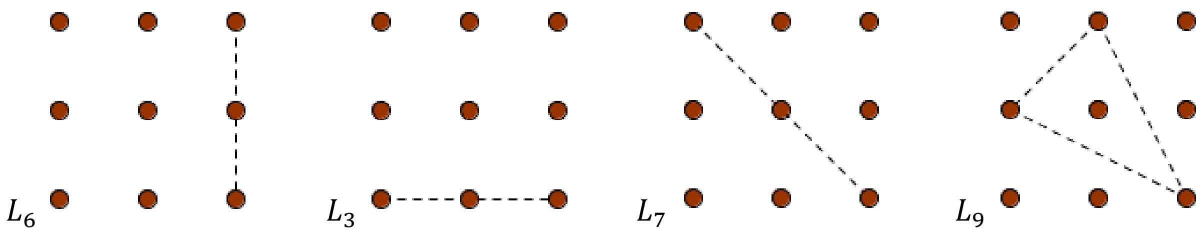


jest styczną do tego okręgu przechodzącą przez punkt $(0,1)$ i ma dwa punkty styczności z okręgiem: (1,2) i (2,0). Pytanie jest więc, którą odległość powinniśmy zmierzyć- między punktami (1,2) i (0,1), czy między punktami (0,1) i (2,0)? Jednak wszystkie te trzy punkty leżą na jednej prostej, a wiemy, że punkty współliniowe na płaszczyźnie dziewięciu punktów zawsze mają jedną współrzędną wspólną, albo wszystkie współrzędne różne między sobą (jeszcze raz zachęcamy czytelnika do lektury artykułów [2], [3] oraz części *"Trójkąty w ujęciu Euklidesowym, a płaszczyzna dziewięciu punktów"*, gdzie można znaleźć szczegółowe objaśnienia). Wszystkie trzy punkty są zatem tak samo od siebie odległe i nie ma znaczenia, którą odległość rozważymy.

Jednak przeniesienie twierdzenia o odcinkach stycznych na płaszczyznę dziewięciu punktów wymaga ustalenia, ile stycznych do okręgu możemy tutaj poprowadzić przez każdy punkt leżący poza okręgiem. W [1] znajdziemy informację, że każdy punkt na naszej płaszczyźnie należy do czterech prostych. Spróbujemy znaleźć wszystkie styczne przechodzące przez ustalony punkt dla następujących dwóch okręgów, okręgu θ_1 o promieniu 1 oraz okręgu θ_2 o promieniu 2:



Dla obydwu wyznaczymy wszystkie styczne przechodzące przez punkt (2,0), czyli punkt w prawym dolnym narożniku kwadratu. W tym celu najpierw ustalamy wszystkie proste przechodzące przez ten punkt:



Zgodnie z definicją do okręgu θ_1 styczne są proste L_3, L_6 oraz L_9, przy czym prosta L_9 ma dwa punkty styczności z okręgiem, a pozostałe po jednym punkcie. Z kolei do okręgu θ_2 żadna z tych prostych nie jest styczna. Ich odległości od środka okręgu θ_2 wynoszą 0 lub 1. Rozważenie wszystkich możliwych przypadków doprowadziło nas do następujących wniosków:

1. Do każdego okręgu o promienu 1 przez ustalony punkt spoza okręgu można poprowadzić dokładnie trzy styczne oraz jedną prostą przechodzącą przez środek okręgu. Dwie z tych stycznych mają po jednym punkcie wspólnym z okręgiem, a jedna posiada dwa punkty styczności.
2. Do żadnego z okręgów o promieniu 2 nie istnieje styczna (wszystkie proste są odległe od środka okręgu o 0 lub 1).

Czytelnikowi polecamy przekonanie się o prawdziwości powyższych stwierdzeń poprzez analizę możliwych przypadków i próbę ich zilustrowania. Ze względu na ich sporą liczbę (4 punkty leżące poza każdym z 18 okręgów) nie jesteśmy w stanie zamieścić tutaj wszystkich ilustracji. Skoro jednak wiemy już, że jeśli styczne istnieją, to jest ich zawsze tyle samo i są one tego samego typu (w sensie liczby punktów wspólnych z okręgiem), możemy zastanowić się nad twierdzeniem o odcinakch stycznych na płaszczyźnie dziewięciu punktów.

Odpowiedzi na ten problem udzielimy analizując raz jeszcze styczne do okręgu θ_1 przechodzące przez punkt $(2,0)$. Punkt styczności prostej L_3 oraz L_6 znajduje się w odległości 1 od punktu $(2,0)$. Gdyby więc to były jedyne styczne do okręgu θ_1, to wynik byłby zgodny z tezą twierdzenia o odcinkach stycznych. Jednak sytuacja wygląda inaczej w przypadku prostej L_9. Ma ona dwa punkty wspólne z okręgiem, obydwa w odległości 2 od punktu $(2,0)$. Zatem twierdzenie o ocinkach stycznych nie jest prawdziwe na płaszczyźnie dziewięciu punktów.

Za pomocą odległości można również określić wzajemne położenie między dwoma okręgami. Porównując sumę bądź różnicę promieni dwóch okręgów z odległością między ich środkami możemy przypisać dwóm okręgom jedną z następujących relacji: styczność (zewnętrzna lub wewnętrzna), rozłączność (zewnętrzna lub wewnętrzna) oraz wzajemne przecinanie się. Po raz kolejny ograniczają nas możliwe długości odcinków. Jeśli przez S_1 i S_2 oznaczymy środki dwóch okręgów, a odpowiednio przez r_1 i r_2 ich promienie, to możliwe są następujące sytuacje:

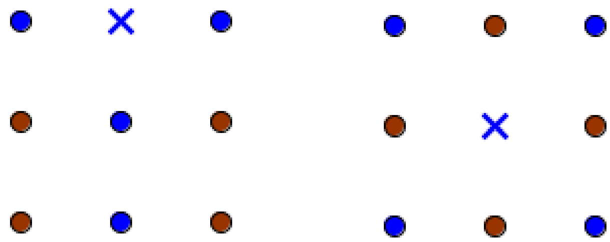
r_1	1	1	2	1	1	2
r_2	1	2	2	1	2	2
$\|S_1S_2\|$	1	1	1	2	2	2

Przypadki przedstawione w kolumnach *I, III, V* i *VI* opisują okręgi przecinające się, gdyż zachodzi tam warunek

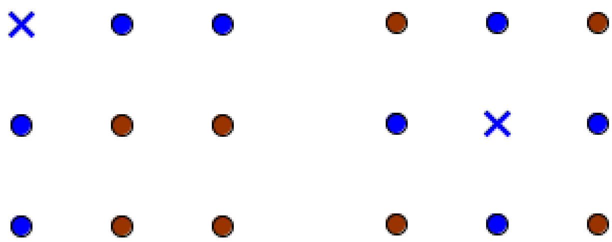
$$|r_1 - r_2| < |S_1S_2| < r_1 + r_2.$$

Ponadto w kolumnie *II* długość odcinka S_1S_2 jest równa różnicy promieni (okręgi styczne wewnętrznie), a w kolumnie *IV* odległość między środkami okręgów jest równa sumie promieni (okręgi styczne zewnętrznie). Ze względu na wartości, jakie mogą być przyjmowane przez liczby $|S_1S_2|$, r_1 i r_2 inne wzajemne położenia dwóch okręgów nie są tu możliwe. Jak zapewne każdy pamięta ze szkolnej ławki, jeśli dwa okręgi są styczne (czy to zewnętrznie, czy wewnętrznie), to na płaszczyźnie euklidesowej mają dokładnie jeden punkt wspólny. Warto sprawdzić, czy ta własność zachowuje się również na płaszczyźnie dziewięciu punktów. Przyjrzyjmy się więc bliżej sytuacji *II* i *IV*. Zaczniemy od styczności wewnętrznej.

Następujące dwa okręgi spełniają warunek $|S_1S_2| = |r_1 - r_2|$. Promień pierwszego okręgu ma długość 1, a promień drugiego długość 2. Ponadto ich środki oddalone są o 1. Mają jednak dwa punkty wspólne.



Teraz przyjrzyjmy się następującym okręgom:



Tym razem promienie obydwu są równe 1, a ich środki są w odległości 2 od siebie, zatem spełniony jest warunek $|S_1S_2| = r_1 + r_2$. Okręgi te są więc styczne zewnętrznie. Ponownie jednak możemy zauważyć, że mają one więcej niż jeden punkt wspólny, co nie jest zgodne ze stycznością, jaką znamy z płaszczyzny euklidesowej. Na płaszczyźnie dziewięciu punktów możemy wskazać okręgi spełniające algebraiczny warunek styczności, ale mające więcej niż jeden punkt przecięcia.

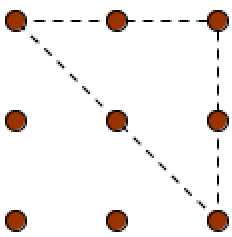
§ 3
Okręgi, a trójkąty

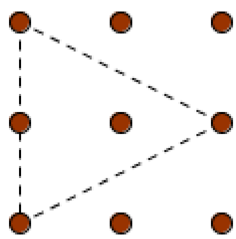
Jedną z najpiękniejszych cech matematyki jest harmonijne przenikanie się różnych jej zagadnień. Jest to nauka, w której wzajemne oddziaływanie między obiektami jest istotą powodującą jej ciągły rozwój. Żaden z działów matematyki nie jest odrębną, hermetycznie zamkniętą dyscypliną. Związki jednych obiektów z innymi, pozornie zupełnie niezależnymi, często prowadzą do bardzo interesujących obserwacji.

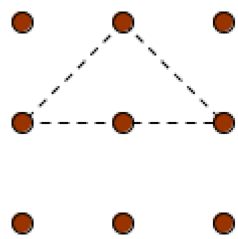
Podsumowując nasze rozważania dotyczące płaszczyzny dziewięciu punktów chemy zwrócić uwagę na związki okręgów z trójkątami. Ten fragment jest syntezą wszystkich uzyskanych przez nas na tym polu wyników- zarówno z części *"Trójkąty w ujęciu Euklidesowym, a płaszczyzna dziewięciu punktów"*, jak i z artykułu bieżącego, z którym właśnie czytelnik się zmaga. W poprzedniej części koledzy szczegółowo opisali trójkąty występujące na tej płaszczyźnie i przybliżyli ich podstawowe własności. My, w ostatnim paragrafie dokonaliśmy podobnego opisu dla okręgów. Na płaszczyźnie euklidesowej związki figur geometrycznych z okręgami stanowią istotny podrozdział geometrii. Fakt, że na danym wielokącie można opisać okrąg, czy też wpisać okrąg w wielokąt daje nam pewne istotne informacje o samym wielokącie. Może to mówić coś o jego bokach, kątach, symetralnych boków itd. Jedynym wielokątem, w który bezwarunkowo zawsze można wpisać okrąg oraz zawsze na nim opisać okrąg jest trójkąt. Wielokąty o większej liczbie boków mają już w tym względzie pewne ograniczenia. Mając przegląd wszystkich trójkątów oraz okręgów na płaszczyźnie dziewięciu punktów możemy zadać pytanie, czy tutaj również zawsze można opisać okrąg na trójkącie oraz wpisać okrąg w trójkąt.

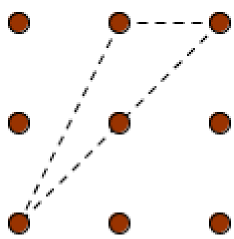
Niestety definicja okręgu wpisanego w trójkąt wymaga pojęcia stycznej do okręgu. Ze względu na niejednoznaczną liczbę punktów styczności, trudno wskazać jednoznaczne warunki, które opisywałyby okrąg wpisany w trójkąt na płaszczyźnie dziewięciu punktów. Definicja okręgu opisanego jest jednak dużo mniej kłopotliwa. Wystarczy, aby każdy wierzchołek trójkąta był punktem okręgu. Jest to uniwersalna definicja okręgu opisanego na dowolnym wielokącie i równie łatwa do zinterpretowania na płaszczyźnie euklidesowej, jak i na płaszczyźnie dziewięciu punktów.

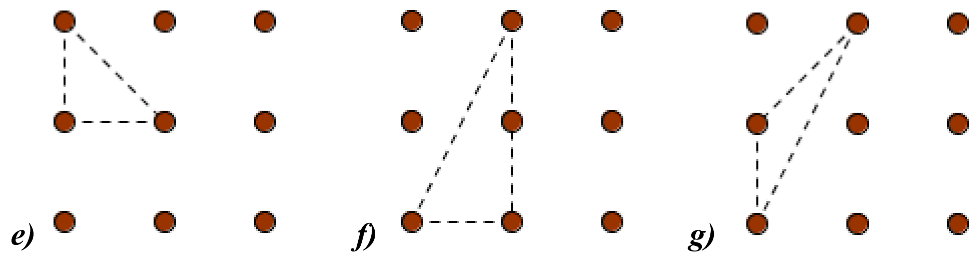
Przypomnijmy, że w poprzedniej części, redagowanej przez naszych kolegów ustalono, że na naszej płaszczyźnie występują 72 trójkąty, które zostały podzielone na 7 następujących typów:

a)


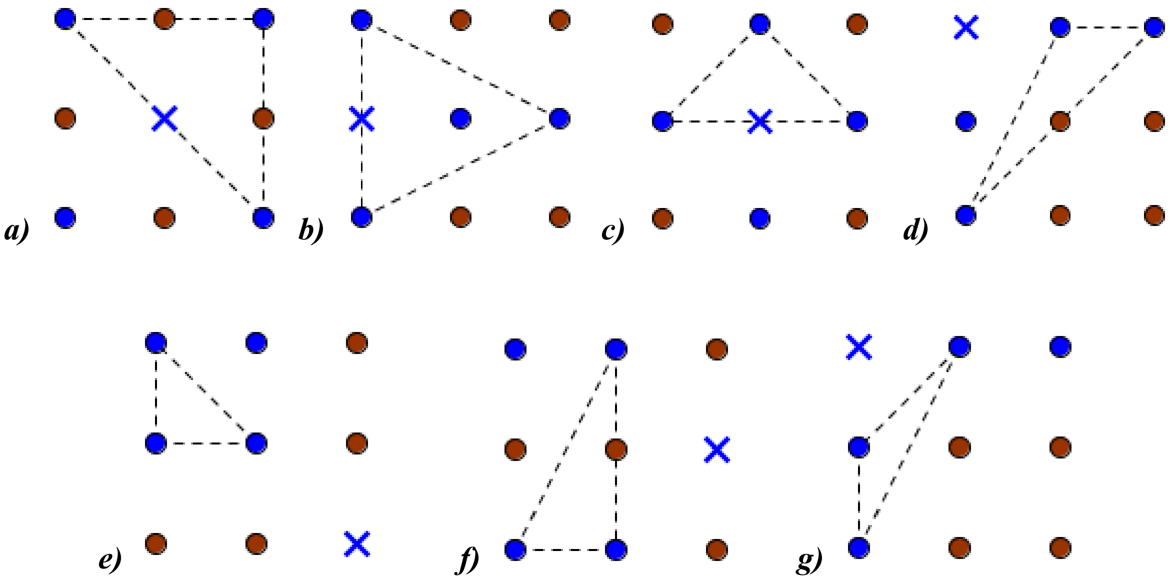
b)


c)


d)




Okazuje się, że na każdym z nich można opisać okrąg i taki okrąg wyznaczony jest w sposób jednoznaczny. Zatem podobnie jak na płaszczyźnie euklidesowej istnieje tylko jeden okrąg opisany na ustalonym trójkącie, ale w ustalony okrąg można wpisać wiele trójkątów (np. trójkąty *d)* i *g)* są wpisane w ten sam okrąg). Poniżej przedstawiamy ilustracje okręgów opisanych na powyższych trójkątach. Ze względu na ich dużą liczbę (w sumie aż 72 trójkąty) ograniczamy się do jednego przykładu dla trójkątów każdego typu. Punkty na okręgu tradycyjnie zaznaczyliśmy kolorem niebieskim, a ich środki wyróżniliśmy krzyżykami.



Przedstawione wyniki to tylko jedna z wielu możliwych dróg prowadzenia badań nad własnościami płaszczyzny dziewięciu punktów. Matematyka jest bardzo obszerną dziedziną i te rozważania mogą być przedłużone na wiele różnych sposobów. Mamy nadzieję, że udało nam się zainteresować czytelnika tym tematem i może nawet zainspirować kogoś do własnych przemyśleń. Być może wkrótce sami podzielimy się z czytelnikami nowymi wynikami na tym polu.

§ 4
Bibliografia

[1] Encyklopedia Internetowa "Wikpedia, the free encyklopedia"
https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_geometry (dostęp 16.01.2018)

[2] Szablewski Andrzej "Geometria dziewięciu punktów"
Portal popularnonaukowy miesięcznika Delta (Mała Delta, lipiec 2016)
http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/geometrie_nieeuklidesowe/2016/06/21/Geometria_dziewieciu_punktow/ (dostęp 10.12.2017)

[3] Szablewski Andrzej "Geometria 9 punktów";
Strona Centrum Młodzieży w Krakowie
http://towarzystwo.edu.pl/assets/prace_matematyczne/sm_15_szablewski.pdf (dostęp 13.11.2017)