Srodek ciężkości

Semen Słobodianiuk

27 lutego 2018

W pracy znajduja sie zupelnie nowe fakty(przynajmniej tak mi sie wydaje) lub nowe i, mam nadzieje, dosyć ciekawe dowody znanych faktow takich jak Twierdzenie Leibniza, badz Twierdzenie o Trójkącie Spodkowym Lemoine'a. Na poczatek chcialbym zaprezentowac kilka prostych zadań, które w dalszej czesci pracy będe traktować jako pomocnicze lematy.

LEMAT 1 Niech M będzie środkiem ciężkości jednakowych mas umieszczonych w wierchołkach n-kąta $A_1, A_2 \dots A_n$. Rzuty prostokątne wierchołków na dowolna prosta k przechodzaca przez M oznaczmy $H_1, H_2, \dots H_n$. Wtedy:

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{MH_k} = \overrightarrow{0}$$

Dowód: odbijmy wyjsciowy n-kąt wzgledem prostej k otrzymujac $B_1, B_2 \dots B_n$ (B_i jest symetryczny A_i) środek ciezkosci otrzymanego w ten sposob wielokata znajduje sie w M srodek ciezkosci punkcie M. A wiec srodek ciężkości wszystkich punktow znajduje sie w M. Dwa punkty A_1 i B_1 o wagach r możemy zastąpić przez H_1 o wadze $2r$. A więc środek ciężkości $H_1, H_2 \dots$ również znajduje się w M.

LEMAT 2 Na płaszczyźnie dany jest wielokąt $A_1A_2 \dots A_n$ i dowolny okrąg g o środku O i promieniu r. Na okręgu g wybieramy punkty D i E takie, że DE jest średnicą g. Wartość wyrażenia
$W = A_1D^2 + A_2D^2 + A_3D^2 + \dots + A_nD^2 + A_1E^2 + A_2E^2 + A_3E^2 + \dots + A_nE^2$ nie zależy od wyboru D i E.

Dowód Zauważmy, że A_kO jest środkową trójkąta DA_kE, a więc $(A_kD^2 + A_kE^2)/2 = r^2 + A_kO^2$. Sumując te wyrażenia stronami po k otrzymujemy

$$W = nr^2 + \sum_{k=1}^{n} A_kO^2$$

LEMAT 3 Zbior środkow wszystkich cięciw przechodzących przez punkt A wybrany wewnątrz okręgu g tworzy okrąg.

Dowód Oznaczmy środek okręgu g literą O. Wybierzmy dowolną cięciwę, jej środek oznaczmy M. Trojkąt AOM jest prostokątny, a wiec M leży na okręgu o średnicy AO.

LEMAT 4 Dany jest wypukly n-kąt X_1. n-kąt X_k jest utworzony ze srodkow boków X_{k-1}. Dla $k \to \infty$ n-kąt X_k degeneruje się do środka ciężkości jednakowych mas, umieszczonych we wierzchołkach X.

Dowód Załóżmy przeciwnie niech $\lim_{n\to\infty} X_k$ nie degeneruje się do punktu, a więc Y_k nie dazy do zera, gdzie Y_k to suma kwadratow długości bokow X_k Zauważmy, że środek ciężkości M jednakowych mas umieszczonych we wierzchołkach X_k pokrywa się ze srodkiem ciezkosci jednakowych mas umieszczonych we wierzcholkach X_{k-1}. Oznaczmy sumę kwadratów odleglości punktu P od wierzcholkow X poprzez $f(P, X)$. Niech A oraz B będą dwoma dowolnymi sąsiadującymi wierzchołkami X_k, a C środkiem boku AB. Ze wzoru na dlugość mediany otrzymujemy, że $AP^2 + BP^2 = 2PC^2 + \frac{AB^2}{2}$. Sumując po wszystkich parach sąsiadujących wierzchołkow i dzieląc obustronnie przez 2 otrzymamy $f(P, X_k) = f(P, X_{k+1}) + Y_k$ Pozwala to na wyprowadzenie rowności

$$f(P, X_1) = f(P, X_k) + \sum_{i=1}^{k-1} Y_i \tag{1}$$

Jeśli Y_k nie dąży do zera to prawa strona dąży do nieskończoności co jest oczywiście nonsensem. Więc Y_k dąży do 0 i X_k dąży do punktu, a dokładnie do M (skoro M jest wewnątrz wszystkich X_k).

LEMAT 5 Twierdzenie o trójlistku - Dany jest trójkąt ABC , dwusieczna kąta A przecina okrąg opisany w punkcie D. Środek okręgu wpisanego oznaczmy I, a dopisanego(i stycznego do boku BC) J. Punkty B, I, C, J leżą na jednym okręgu o środku w D.

Dowód: Kąt BAC oznaczmy α. Analogicznie zdefiniujmy β i γ

$\angle DBI = \angle DBC + \angle CBI = \alpha/2 + \beta/2$

$\angle IDB = \gamma$, więc trójkąt DBI jest równoramienny($DI = DB$). Analogicznie $DI = DC$. Pozostaje zauważyć, że $IBJ = ICJ = \pi/2$ co implikuje tezę.

Teraz przedstawie moją kolekcję 6 dowodow twierdzenia Leibniza.

Twierdzenie 1 (Leibniz) *Suma kwadratów odległości dowolnego punktu P od wierzchołków trójkąta jest równa sumie kwadratów odległości wierzchołków od środka masy trójkąta i potrojonego kwadratu odległości punktu P od środka ciężkości. Dowiodę uogólnienie tego twierdzenia: suma kwadratów odległości dowolnego punktu P od wierzchołków n-kąta X_1 jest równa sumie kwadratów odległości wierzchołków od środka cieżkości jednakowych mas umieszczonych w wierzchołkach wielokąta i n-tej wielokrotności kwadratu odległości punktu P od tegoż środka ciężkości.*

Przez M bede oznaczac srodek cieżkości jednakowych mas umieszczonych we wierzchołkach X_1

Dowód 1 (S. Słobodianiuk) Oznaczmy wierzchołki X_1 jako $A_1 A_2 \ldots A_n$ Rozpatrzmy prostą l przechodzącą przez M. Oznaczmy H_k rzut prostokątny A_k na l. Narysujmy dowolny okrąg g o srodku w M, promieniu r oraz srednicy DE gdzie D leży na l. Niech $V_k = A_k D^2 - A_k E^2$
$V_k = H_k D^2 - H_k E^2 = (H_k M - r)^2 (H_k M + r)^2 = -4r H_k M$ jeśli H_k leży na półprostej OD
$V_k = H_k D^2 - H_k E^2 = (H_k M + r)^2 (H_k M - r)^2 = 4r H_k M$ jeśli H_k nie leży na półprostej OD
Dla punktu P oznaczmy

$$f(P, X_1) = \sum_{k=1}^{n} A_k P^2$$

$$f(D, X_1) - f(E, X_1) = \sum_{k=1}^{n} V_k = 4r |\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{MH_k}|$$

na podstawie *Lematu 1*:

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{MH_k} = \overrightarrow{0}$$

co oznacza, że $f(D, X_1) = f(E, X_1)$
Na podstawie *Lematu 2*:
$f(D, X_1) + f(E, X_1) = 2f(D, X_1) = 2(nr2 + f(M, X_1))$
co kończy dowód twierdzenia.

Dowód 2 (S. Słobodianiuk) Wykorzystując tożsamość (1) z *Lematu 4*

$$f(P, X_1) = f(P, X_k) + \sum_{i=1}^{k-1} Y_i$$

gdzie $k \to \infty$ oraz to że X_k degeneruje się do punktu M otrzymujemy

$$f(P, X_1) = nPM^2 + \sum_{i=1}^{k-1} Y_i$$

Podstawiając $P = M$ otrzymujemy że suma kwadratow odległości wierzcholkow od M

$$f_1(M) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i$$

a wiec $f(P, X_1) = nPM^2 + f(M)$.

Dowód 3 (S. Słobodianiuk) Indukcja ze względu na liczbę wierzchołków X_1. Dla $n = 2$ (zdegenerowany "dwukąt") otrzymujemy wzor na medianę. Załóżmy, że dla $n < k$ udalo nam sie dowieść. Jeśli $k = 2x$ to podzielmy wierzcholki X_1 na dwa zbiory o mocy x i niech to będą wielokąty X_a i X_b . Rozważmy $f(P, X_a)$ oraz $f(P, X_b)$. Oznaczmy srodek ciezkosci mas umieszczonych we wierzchołkach X_a jako M_a. Analogicznie zdefiniujmy M_b.
M jest środkiem odcinka M_aM_b dlugości $2z$. Na mocy założenia indukcyjnego mamy: $f(M_a, X_a) + xPM_a^2 + f(M_b, X_b) + xPM_b^2 = f(P, X_a) + f(P, X_b) = f(P)$
Przekształcając i wykorzystując wzór na medianę

$$f(P) = f(M_a, X_a) + f(M_b, X_b) + x(PM_a^2 + PM_b^2) =$$

$$f(M_a, X_a) + f(M_b, X_b) + 2x(z^2 + PM^2) =$$

$$(f(M_a, X_a) + xz^2) + (f(M_b, X_b) + xz^2) + 2xPM^2 =$$

$$f(M, X_a) + f(M, X_b) + 2xPM^2 = f(M) + 2xPM^2$$

Jeśli X_1 ma nieparzystą liczbę wierchołków $2x - 1$, to należy dodać jeden wierchołek A pokrywający się ze środkiem ciężkości całego układu (wtedy M się nie zmieni i będziemy mogli zastosować powyższe rozumowanie). Podzielmy otrzymane wierzchołki na dwa podzbiory niech $a + A$ i b. a ma $x - 1$ elementow b

jest mocy x. niech M_a to srodek cieżkości mas w punktach zbioru $A+a$, M_b to srodek cieżkości b. Podobnie jak wyżej

$$f(P,X_1)+PA^2 = f(M_a,X_a)+AM_a^2+f(M_b,X_b)+(x-1)PM_a^2+PM_a^2+xPM_b^2 =$$

$$f(M_a,X_a)+AM_a^2+2x(z^2+PM^2) = f(M,X_a)+AM^2+f(M,X_b)+2xPM^2 =$$

$$f(M,X_1)+AM^2+2xPM^2$$

Biorąc pod uwagę, że $AM^2 = 0$ oraz $PA^2 = PM^2$ mamy $f(P,X_1) = f(M,X_1)+(2x-1)PM^2$

Dowod 4(I. Kushnir) jest przeprowadzony dla trojkąta. Oznaczmy Q rzut P na środkową. Niech kąt $\angle PMA$ mniejszy równy $\frac{\pi}{2}$. Z trójkątów PAM i PMM_1:

$PA^2 = PM^2 + AM^2 - 2AM \cdot MQ$

$PM_1^2 = PM^2 + MM_1^2 + 2MM_1^2 \cdot MQ$. Mnożąc drugą równość na 2 i dodając do pierwszej, pamiętając, że $2MM_1 = AM$ otrzymujemy $PA^2 + 2PM_1^2 = 3PM^2 + AM^2 + 2MM_1^2$. Ale PM to środkowa trójkąta BPC, a MM_1 to środkowa BMC. Stosując wzór na środkową otrzymujemy:

$XM_1^2 = \frac{2(PB^2+PC^2)-BC^2}{4}$

$MM_1^2 = \frac{2(MB^2+MC^2)-BC^2}{4}$

Więc:$PA^2 + PB^2 + PC^2 - \frac{BC^2}{2} = 3PM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{BC^2}{2}$ co kończy dowód.

Dowód 5 Wynika to bezposrednio z twierdzenia Steinera dla momentu bezwładności: Moment bezwładności bryły sztywnej względem dowolnej osi jest równy sumie momentu bezwładności względem osi równoległej do danej i przechodzącej przez środek masy bryły, oraz iloczynu masy bryły i kwadratu odległości między tymi dwiema osiami, co można wyrazić wzorem:

$$I = I_0 + md^2$$

I_0 – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy
I – moment bezwładności względem osi równoległej do pierwszej osi
d – odległość między osiami
m – masa bryły.
Jeśli zamiast bryły rozważymy punkty w których są umieszczone masy 1 to otrzymamy uogólnione twierdzenie Leibniza.

Dowód 6 (S. I. Zetel)

Niech P będzie dowolnym punktem i G środkiem ciężkości trójkąta ABC. Oznaczmy przez A_1, B_1, C_1 spodki prostopadłych opuszczonych z wierzchołków A, B, C na prostą PG. Z trójkątów PAG, PBG, PCG mamy:

$$PA^2 = PG^2 + AG^2 - 2PG \cdot GA_1$$

$$PB^2 = PG^2 + BG + PG \cdot GB_1$$

$$PC^2 = PG^2 + CG^2 + 2PG \cdot GC_1$$

Poprowadźmy przez G prostą prostopadłą do PG i opuśćmy na nią z wierzchołków trójkąta prostopadłe AA', BB', CC'. Wówczas $A'A = GA_1, B'B =$

$GB_1, C'C = GC_1$. Na podstawie twierdzenia o siecznych przechodzących przez środek ciężkości mamy $GA_1 - GB_1 - GC_1 = AA' - BB' - CC' = 0$

Tak więc $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2$

Nie sposób nie wspomnieć, że to twierdzenie pozwala na efektywne (i efektowne) obliczanie odległości szczególnych punktów od środka ciężkości. Sztandarowym przykładem jest wzór na odległość pomiędzy środkiem okręgu opisanego O, a środkiem ciężkości M. Z twierdzenia Leibniza mamy bowiem

$$3R^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/3 + 3OM^2$$

a więc

$$OM^2 = R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)/9$$

Podobnych przykładów można podać bardzo dużo, co zostało też zrobione przez ludzkość, więc nie będę się tym szczególnie zajmował. Pozwolę sobie jedynie zauważyć, że szczególne punkty są nie tylko w trójkącie, ale również w czworokącie więc podobny, zwięzły wzór można wyprowadzić dla cyklicznego czworokąta:

$4R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+AC^2+BD^2}{4} = 4OM^2$

gdzie a, b, c, d to długości boków czworokąta $ABCD$, O jest środkiem okręgu opisanego, M środkiem ciężkości jednakowych mas umieszczonych we wierzchołkach.

Twierdzenie 2 (Słobodianiuk) *Dany jest trójkąt o bokach* 1 *oraz* n. *Jeśli środek ciężkości tego trójkąta leży na okręgu wpisanym to długość trzeciego boku wyraża się wzorem* $\frac{5+5n^2-6n}{3(n+1)+4\sqrt{3n-n^2-1}}$

Dowód:

Najpierw przypomnę znany fakt. Dany jest trójkąt ABC, niech a, b, c to boki odpowiednio leżące naprzeciwko wierzchołków A, B i C. Jeśli A', B' i C' to punkty styczności okręgu wpisanego odpowiednio do boków a, b, c to $A'B = \frac{c+a-b}{2}$, $B'C = \frac{a+b-c}{2}$, $C'A = \frac{b+c-a}{2}$.

Oznaczmy długość trzeciego boku danego w zadaniu trójkąta przez k, ponadto, niech I to środek okręgu wpisanego, r to jego promień, a M to środek ciężkości trójkąta. Jako, że środek ciężkości leży na okręgu wpisanym jest równoważne można położyć $IM = r$, ponadto możemy zapisać Twierdzenie Leibniza $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2$ dla $P = I$. Pozwoli nam to uzyskać

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 = 3r^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 \quad (*)$$

. Ale $IA^2 = r^2 + AC'^2, IB^2 = r^2 + BA'^2, IC^2 = r^2 + CB'$ A więc uwzględniając (*) i powyższą równość

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 = 3r^2 + AC'^2 + BA'^2 + CB'^2 = 3r^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2.$$

Przekształcając równoważnie i uwzględniając, że $MA^2+MB^2+MC^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ oraz wykorzystując fakt zaprezentowany na samym początku otrzymujemy:

$$5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(ab + bc + ca) \quad (**)$$

Powyższe równanie można sprowadzić, przekształcając równoważnie i przyjmując $a = 1, b = n, c = k$, do postaci

$$5(1 + n^2) - 6n - 6(n + 1)k + 5k^2 = 0$$

co z kolei można sprowadzić do

$\sqrt{(5(1 + n^2) - 6n)}^2 - 2 \cdot \sqrt{5(1 + n^2) - 6n} \cdot \frac{3(n+1)k}{\sqrt{5(1+n^2)-6n}} + (\frac{3(n+1)}{\sqrt{5(1+n^2)-6n}} \cdot k)^2 = k^2[(\frac{3(n+1)}{\sqrt{5(1+n^2)-6n}})^2 - 5]$

A więc

$$(\sqrt{(5(1 + n^2) - 6n)} - \frac{3(n + 1)}{\sqrt{5(1 + n^2) - 6n}} \cdot k)^2 = k^2[(\frac{3(n + 1)}{\sqrt{5(1 + n^2) - 6n}})^2 - 5]$$

Pierwiastkując obustronnie to równanie i upraszczając otrzymujemy tezę.

Można pokusić się o podobne obliczenia dla trójkąta prostokątnego, w którym środek ciężkości również leży na okręgu wpisanym czego efektem będzie:

Twierdzenie 3 (Słobodianiuk) *Dany jest trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej c długości jeden. Ponadto środek ciężkości leży na okręgu wpisanym. Wtedy jedna z długości przyprostokątnych wynosi* $\frac{\sqrt{1-8\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} - 1}{2}$

Dowód: Podstawiając w (**) $c = 1$ oraz uwzględniając, że $a^2 + b^2 = 1$ otrzymujemy

$$10 = 6(ab + a + b)$$

dodając obustronnie 3 otrzymujemy

$$13 = 3(a^2 + b^2) + 6ab + 6(a + b)13 = 3(a + b)^2 + 6(a + b)$$

Jest to równanie kwadratowe gdzie niewiadomą jest $(a+b)$. Jedynym dodatnim pierwiastkiem tego równania jest $\frac{4}{\sqrt{3}} - 1$. A więc $(a + b) = \frac{4}{\sqrt{3}} - 1$.

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = \frac{16}{3} - \frac{8}{\sqrt{3}}$ więc $2ab = 8 \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{3}$

Zatem $a - b = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} = \sqrt{1 - 8 \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{3}}$

Zatem $a = \frac{(a-b)+(a+b)}{2} = \frac{\sqrt{1-8\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} - 1}{2}$

Twierdzenie 4 (Ceva) *Dany jest trójkąt ABC oraz punkty A', B' i C' leżące odpowiednio na BC, CA i AB. Równość $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trzy proste AA', BB' i CC' są współpękowe.*

Dowód:
$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1 \Rightarrow AA'$, BB' i CC' są współpękowe.

Niech $\frac{AB'}{B'C} = \frac{1}{x}$, $\frac{CA'}{A'B} = y$. Jeśli umieścimy masy x, y, 1 odpowiednio w punktach A, B i C to środek ciężkości całego układu znajduje się jednocześnie na AA' oraz BB', a więc na ich przecięciu M. Środek ciężkości punktów A i B oznaczmy D. $\frac{AD}{DB} = \frac{y}{x}$. A więc środek cieżkości całego układu znajduje się również na CD co implikuje, że M należy do CD. $BA'/A'C * CB'/B'A * AD/DB = 1$ a więc $D = C'$.

Współpękowość AA', BB' i $CC' \Rightarrow \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$

Punkt przecięcia prostych oznaczmy M, niech $\frac{AB'}{B'C} = \frac{1}{x}1/x$, $\frac{CA'}{A'B} = y$. Więc M jest środkiem ciężkości mas $x, y, 1$ umieszczonych odpowiednio w punktach A, B, C. M leży na CC' więc C' jest środkiem ciężkości A i B co implikuje $\frac{AC'}{C'B} = \frac{y}{x}$ co kończy rozwiązywanie zadania.

Twierdzenie 5 (Gergonne) *Przy oznaczeniach jak wyżej* $\frac{A'M}{A'A} + \frac{B'M}{BB'} + \frac{C'M}{C'C} = 1$

Dowód: Istotnie, M jest środkiem ciężkości mas 1 i $(x+y)$ umieszczonych odpowiednio w punktach C i C' więc $\frac{CM}{MC'} = \frac{x+y}{1}$ a więc $\frac{CC'}{MC'} = \frac{CM+MC'}{MC'} = \frac{x+y+1}{1}$, ostatecznie $\frac{MC'}{CC'} = \frac{1}{x+y+1}$. Analogicznie $\frac{MA'}{AA'} = \frac{x}{x+y+1}$ i $\frac{MB'}{BB'} = \frac{y}{x+y+1}$. Ostatecznie

$$\frac{C'M}{C'C} + \frac{A'M}{A'A} + \frac{B'M}{BB'} = \frac{1}{x+y+1} + \frac{x}{x+y+1} + \frac{y}{x+y+1} = 1$$

Twierdzenie 6 *o minimalności sumy kwadratow odległości punku Lemoine'a od boków trójkąta.*

Dowód: Dla dowodu wykorzystam twierdzenie o trójkącie spodkowym Lemoine'a, które orzeka, że punkt Lemoine'a trojkąta ABC jest jednocześnie środkiem ciężkości trójkąta utworzonego ze spodków rzutów prostokątnych tegoż punktu na boki trójkąta ABC Oznaczmy punkt Lemoine'a jako L, a L_a, L_b i L_c to rzuty prostokątne L odpowiednio na BC, CA i AB. Niech P to dowolny punkt, odmienny od L. Analogicznie oznaczmy P_a, P_b i P_c. Wtedy mamy:

$$PP_a^2 = PL_a^2 - L_aP_a^2$$
$$PP_b^2 = PL_b^2 - L_bP_b^2$$
$$PP_c^2 = PL_c^2 - L_cP_c^2$$

Sumując te wyrażenia otrzymujemy

$$PP_a^2 + PP_b^2 + PP_c^2 = PL_a^2 - L_aP_a^2 + PL_b^2 - L_bP_b^2 + PL_c^2 - L_cP_c^2 =$$
$$PL_a^2 + PL_b^2 + PL_c^2 - (L_aP_a^2 + L_bP_b^2 + L_cP_c^2)$$

co, biorąc pod uwagę twierdzenie Leibniza i faktu, że L jest środkiem ciężkości $L_aL_bL_c$, jest równe

$$LL_a^2 + LL_b + LL_c^2 + 3PL^2 - (L_aP_a^2 + L_bP_b^2 + L_cP_c^2)$$

Zauważmy że $LP \geq L_aP_a$, $LP \geq L_bP_b$, $LP \geq L_cP_c$, przy czym równość nie może zachodzić we wszystkich przypadkach. A więc wyrażenie $W = 3LP^2 - (L_aP_a^2 + L_bP_b^2 + L_cP_c^2)$ jest dodatnie.

$$PP_a^2 + PP_b^2 + PP_c^2 = LL_a^2 + LL_b^2 + LL_c^2 + W$$

co implikuje tezę.

Naturalną kontynuacją powyższego rozumowania jest

Twierdzenie 7 (Słobodianiuk) *Dla punktu P suma kwadratów odległości od- boków wielokąta jest najmniejsza wtedy i tylko wtedy, gdy P jest środkiem ciężkości jednakowych mas umieszczonych w spodkach rzutów prostokątnych P na boki wielokąta.*

Dowód: Oznaczmy wierzchołki wielokąta $A_1 \dots A_n$. Niech P będzie punktem dla którego $\sum_{i=1}^{n} PP_i^2$ przyjmuje minimum, gdzieP_i to rzut P na bok A_iA_{i+1} (przyjmijmy, że $A_{n+1} = A_1$).

$\sum_{i=1}^{n} PP_i^2$ jest minimalna $\Rightarrow$ P jest środkiem mas umieszczonych w P_i.

Oznaczmy P_i rzut P na bok A_iA_{i+1}. Rozważmy dowolny punkt P' różny od P. analogicznie oznaczmy P_i'. Wtedy $\sum_{i=1}^{n} P'P_i^2 > \sum_{i=1}^{n} P'P_i'^2 > \sum_{i=1}^{n} PP_i^2$ P, a wiec $\sum_{i=1}^{n} XP_i^2$ przyjmuje minimum gdy $X = P$, więc posiłkując się Twierdzeniem Leibniza, stwierdzamy, że zachodzi pożądana implikacja. Pozostaje dowieść, że jeśli P jest środkiem ciężkości mas umieszczonych w P_i to $\sum_{i=1}^{n} PP_i^2$ jest minimalna. Z tw. Leibniza $\sum_{i=1}^{n} P'P_i^2 = nPP'^2 \sum_{i=1}^{n} PP_i^2$. $PP' \geq PiPi'$ przy czym równość nie zachodzi dla wszystkich i.$\sum_{i=1}^{n} P'P_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} P'P_i^2 - \sum_{i=1}^{n} P'P_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} PP_i^2 + nPP_i - \sum_{i=1}^{n} P'P_i'^2$. Wyrażenie $nPP'^2 - \sum_{i=1}^{n} P'P_i'^2$ jest dodatnie co kończy dowód w drugą stronę.

Twierdzenie 8 (Johnson) *Dany jest trójkąt ABC i punkty A', B', C' odpowiednio na bokach BC, CA i AB takie, że $\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'C}$. Wtedy środek ciężkości $A'B'C'$ pokrywa się z środekiem ciężkości ABC*

Dowód:

Niech $\frac{AC'}{C'B} = \frac{p}{q}$. Umieśćmy w każdym wierzchołku ABC po dwie masy wartości p i q. Środek ciężkości masy p we wierzchołku A i masy q z wierzchołka B znajduje się w C'. Analogicznie środek ciężkości masy p z wierzchołka B i masy q z wierzchołka C znajduje się w A', a środek ciężkości masy p z wierzchołka C i masy q we wierzchołku A znajduje się w B'. Jako, że środek ciężkości nie zmienia się niezależnie od sposobu jego wyznaczania to wnioskujemy, że środek ciężkości $A'B'C'$ pokrywa się z środkiem ciężkości ABC.

Teraz zaczyna się ciekawsza część mojej pracy. Dla porządku przypomnę bez dowodu

Twierdzenie 9 (Wielkie Twierdzenie Ponceleta) *: Dany jest okrąg O_1 oraz okrąg O_2 leżący w jego wnętrzu. Niech A_1 będzie dowolnym punktem na okręgu O_2, zaś A_2, A_3 ... takimi punktami na O_1, że dla każdego I prosta A_iA_{i+1} jest styczna do okręgu O_2 oraz A_i nie rowna sie A_{i+2}. Analogicznie określmy punkty B_i. Wówczas, jeśli dla pewnego n zachodzi $A_n = A_1$ to również $B_n = B_1$.*

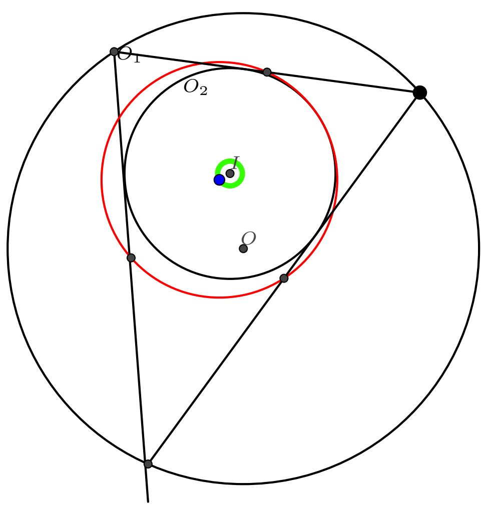
Wprowadźmy pojęcie bicentrycznego wielokąta (ang. Bicentric polygon), które będzie oznaczało, żę dany wielokąt jest wpisany w okrąg O_1 i jednocześnie opisany na okręgu O_2, będziemy mówić, że okręgi O_1 i O_2 generują bicentryczny wielokąt. Warunkiem wystarczającym i niezbędnym do istnienia bicentrycznych wielokątów generowanych przez O_1 i O_2 jest odpowiednia odległość pomiędzy środkami O_1 i O_2, którą można wyrazić przez ich promienie(przypis). Z *WTP* wynika, że jeśli istnieje bicentryczny wielokąt to dla każdego punktu A na O_1

istnieje bicentryczny wielokąt generowany przez O_1 i O_2 mający wierzchołek w A.

Twierdzenie 10 (Tabachnikov, Schwartz) *Dane są okręgi O_1 i O_2. Środki ciężkości jednakowych mas umieszczonych we wierzchołkach bicentrycznych wielokątów generowanych przez O_1 i O_2 leżą na jednym okręgu.*

Dowód przeprowadzony przeprowadzony przez Tabachnikova i Schawartza jest analityczny. Podam kilka przypadków udowodnionych przeze mnie metodami czysto geometrycznymi.

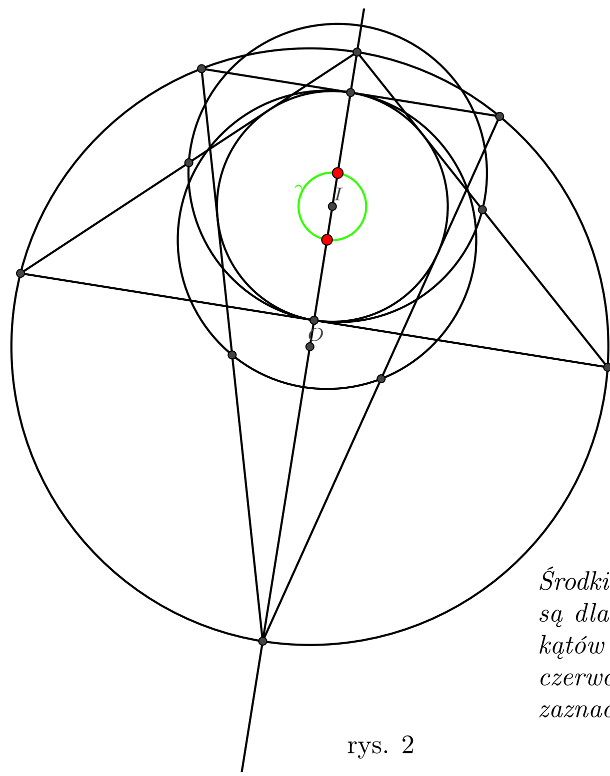
Dowód dla trójkąta: Weźmy dowolny trójkąt ABC. Długość promienia i środek okręgu wpisanego to odpowiednio r oraz I, a sam wpisany okrąg oznaczmy jako O_2, długość promienia i środek okręgu opisanego to R oraz O, przez O_1 będziemy oznaczać okrąg opisany. Przypomnę znane twierdzenie Feuerbacha, które orzeka, że odległość pomiędzy środkiem okręgu Feuerbacha a środkiem okręgu wpisanego jest równa $R-2r$ (okrąg Feuerbacha jest zawsze styczny do okręgu wpisanego). A więc środek okręgu Feuerbacha leży na okręgu o środku I oraz promieniu $R-2r$(rys.1).



Okrąg Feuerbacha jest zaznaczony na czerwono a jego środek na niebiesko. Okrąg na którym znajdują się środki okręgów Feuerbacha wszystkich bicentrycznych wielokątów generowanych przez O_1 i O_2 zaznaczony jest kolorem zielonym.

rys. 1

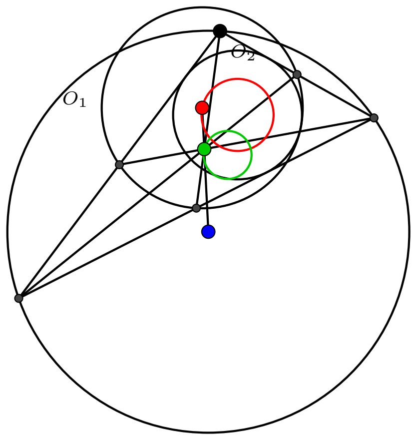
Rozważmy dwa trójkąty generowane przez O_1 i O_2, które są symetryczne względem prostej IO (rys.2)



Środki okręgów Feuerbacha są dla symetrycznych trójkątów są zaznaczone na czerwono. Okrąg gamma zaznaczony jest na zielono.

rys. 2

Środki okręgów Feuerbacha dla każdego z nich leżą na prostej OI. A więc te środki są średnicą okręgu na którym leżą środki okręgów Feuerbacha wszystkich innych trójkątów generowanych przez O_1 i O_2. Okrąg ten nazwijmy γ. Z własności prostej Eulera wiemy, że środek ciężkości trójkąta dzieli odcinek łączący środek okręgu Feuerbacha z O w stosunku $1 : 2$ więc, jako że punkt O jest jednakowy dla wszystkich trójkątów generowanych przez O_1 i O_2, środki ciężkości trójkątów generowanych przez O_1, O_2 tworzą okrąg który jest obrazem gamma w jednokładności o środku O i skali $2/3$ (rys.3)



Środek ciężkości trójkąta zaznaczony na zielono. Środek okręgu Feuerbacha ma kolor czerwony, a niebieskim punktem jest środek okręgu opisanego. Okrąg czerwony zawiera wszystkie punkty Feuerbacha trójkątów generowanych przez okręgi O_1 i O_2. Okrąg zielony zawiera wszystkie środki ciężkości trójkątów generowanych przez okręgi O_1 i O_2

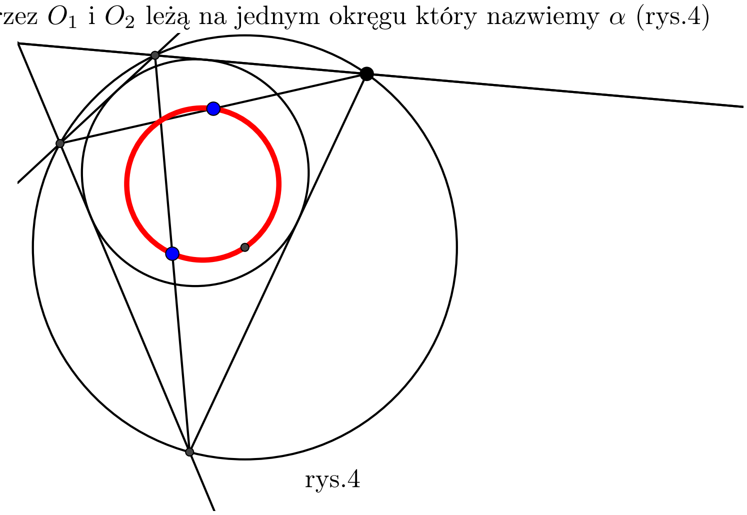
rys. 3

Dowód dla czworokąta: Niech będą dane dwa okręgi O_1 i O_2 które generują nieskończoną ilość bicentrycznych czworokątów. Przypomnę dwa znane fakty:

1.Przekątne wszystkich bicentrycznych czworokątów generowanych przez O_1 i O_2 przecinają się w jednym punkcie(ang. Limiting point)

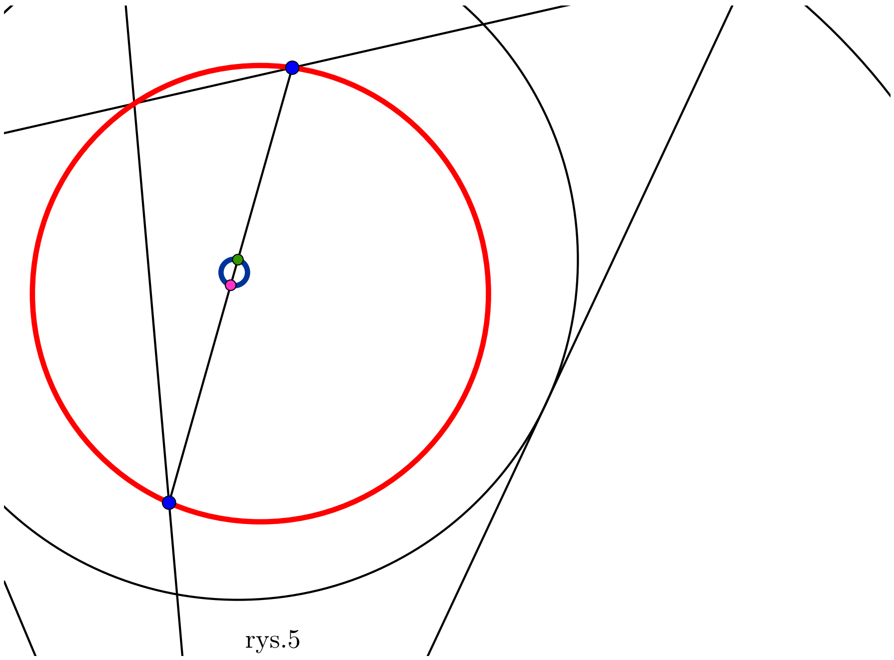
2. Twierdzenie Newtona orzeka, że odcinek łączący środki przekątnych bicentrycznego czworokąta generowanego przez O_1 i O_2 zawiera środek okręgu wpisanego.

Na mocy lematu 3 i faktu 1 środki przekątnych czworokątów generowanych przez O_1 i O_2 leżą na jednym okręgu który nazwiemy α (rys.4)



rys.4

Więc odcinek łączący środki przekątnych to cięciwa okręgu α, która na mocy faktu 2 przechodzi przez pewien stały punkt, wobec czego środek odcinka łączącego środki przekątnych dowolnego czworokąta generowanego przez O_1 i O_2 leży na pewnym okręgu niezależnym od wyboru czworokąta (rys.5)



rys.5

Narzuca się pytanie jak zachowują się inne szczególne punkty trójkąta w konfiguracji Ponceleta. Bezpośrednio z faktu, że środek ciężkości trójkąta zatacza okręgi otrzymujemy podobne zależności dla:

- ortocentrum: mając w pamięci znany fakt orzekający, że odcinek HO (H - ortocentrum, O - środek okręgu opisanego) jest dzielony przez środek ciężkości M w stosunku $2:1$, należy rozważyć jednokładność o środku w O przekształcającą M na H.

- punktu Nagela: tym razem z pomocą przychodzi analogiczny znany fakt orzekający, że odcinek NaI (Na - punkt Nagela, I - środek okręgu wpisanego) jest dzielony przez M w stosunku $2:1$, należy więc rozważyć jednokładność o środku w I, przekształcającą M na Na.

A więc ortocentra i punkty Nagela wszystkich trójkątów generowanych przez dwa wybrane okręgi tworzą okręgi o promieniu $2(R-2r)$ (trzy razy większym niż okrąg utworzony ze środków ciężkości).

- środka ciężkości drucianej ramki trójkąta (masy równomiernie rozłożonej na krawędziach): z listopadowej Delty z 2011 roku dowiadujemy się, że środkiem ciężkości obwodu trójkąta jest środek okręgu wpisanego w trójkąt utworzony przez środki jego boków. Niech Sp to środek okręgu wpisanego w trójkąt utworzony przez środki jego boków. Należy więc rozważyć jednokładność o środku I, przekształcającą M na Sp.

Okazuje się, że podobne właściwości mają też inne punkty trójkąta, niezwiązane bezpośrednio ze środkiem ciężkości(chyba)!

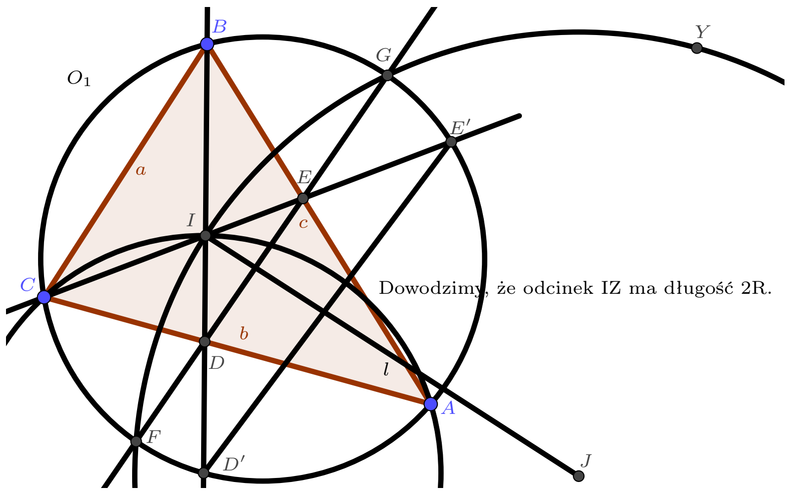
Twierdzenie 11 (Słobodianiuk) *Dane są okręgi O_1 i O_2. Środki okręgów* *dopisanych wszystkich bicentrycznych trójkątów generowanych przez O_1 i O_2 leżą na jednym okręgu o promieniu $2R$*

Dowód: Istotnie, oznaczmy literą D punkt przecięcia dwusiecznej kąta BAC z okręgiem opisanym różnym od A. Ponadto niech I to środek okręgu wpisanego, J dopisanego. Z twierdzenia o trójlistku mamy że $DI = DB = DC = DJ$. Łącząc ten fakt ze współliniowością I, D, J (te punkty leżą na dwusiecznej) widzimy, że J jest obrazem punktu D w jednokładności o środku I skali $2/1$ co daje tezę.

Twierdzenie 12 (Słobodianiuk) *Dane są okręgi O_1 i O_2. Trójkąt ABC jest wpisany w O_1, opisany na O_2. Środek O_2 to I. Dwusieczne kątów ABC oraz BCA przecinają boki b oraz c odpowiednio w punktach D oraz E. Prosta DE przecina okrąg O_1 w punktach F oraz G. Wtedy środki okręgów opisanych na trójkątach IDE leżą na okręgu o środku I i promieniu $2R$ (rys. 6).*

Dowód:

Oznaczmy przecięcie BD z O_1 jako D'. Przecięcie CE z O_1 to E'. Na mocy twierdzenia o trójlistku okrąg opisany na trójkącie CIA ma środek w D'. Nazwijmy ten okrąg α. Okrąg opisany na IFE nazwijmy β. Prosta CA jest prostą potęgową O_1 i α, prosta FG jest prostą potęgową O_1 i β. Jako że proste potęgowe trzech okręgów przecinają się w jednym punkcie widzimy, że prosta potęgowa α i β powinna zawierać punkt wspólny tych okręgów, czyli I oraz punkt przecięcia FG i AC czyli D. A więc prosta ID jest prostą potęgową α i β, co oznacza, że α, β, ID przecinają się w jednym punkcie X. Jako że IX jest średnicą α to D' połowi odcinek IX. Analogiczine definiujemy punkt Y i, ze względu na symetrię rysunku, wnioskujemy, że E' połowi IY. A więc $E'D' = \frac{XY}{2}$. Popatrzmy teraz na okrąg O_1. Kąt oparty na $E'D'$ ma miare $\angle\frac{B+C}{2}$. Teraz zauważmy, że $\angle XIY = \pi - \angle\frac{B+C}{2}$. A więc kąt oparty na XY w okręgu β ma tą samą miarę co kąt oparty na $E'D'$ w okręgu O_1. Jako, że $2 \cdot E'D' = XY$ widzimy, że β jest dwa razy większy od O_1. Oznacza to że odległość punktu I od środka okręgu β zależy tylko od promienia O_1 i jest dwukrotnie od niego większa co implikuje tezę.



W geogebrze sprawdziłem, że cała plejada punktów szczególnych trójkąta ma podobne własności, w konfiguracji Ponceleta porusza się po okręgu, bądź elipsie. Planuje znaleźć jak najwięcej elementarnych dowodów tych faktów. Analogiczne badania można też prowadzić na bicentrycznym czworokącie, co też zamierzam uczynić.