

Małopolski Konkurs Prac Matematycznych

w roku szkolnym 2017/18

**Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo
Przyjaciół Nauk i Sztuk**
pod patronatem Uniwersytetu Jagiellońskiego
w Centrum Młodzieży im. dr. H. Jordana



**CENTRUM MŁODZIEŻY
W KRAKOWIE**

IM. DR. HENRIKA JORDANA

**Polskie Towarzystwo Matematyczne
Oddział Krakowski**



LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE

im. Marii Skłodowskiej-Curie
w Skawinie



OLIWIA FRANKOWSKA

„Heron matematyk, wynalazca i nauczyciel”

Praca konkursowa napisana pod kierunkiem
mgr Karoliny Szymskiej

Skawina 2018

Składam serdeczne wyrazy podziękowania
Pani mgr Karolinie Szymskiej
za pomoc udzieloną mi w czasie pisania tej pracy.

Spis treści

1.Wstęp	4
2.Rys Historyczny	6
3.Treść zadania	9
4.Pierwszy sposób rozwiązania zadania	10
5.Sprawdzenie poprawności toku myślenia w innych przypadkach trójkątów	11
6.I sposób wyprowadzenia wzoru Herona	13
7.II sposób wyprowadzenia wzoru Herona	15
8.Pierwszy dowód twierdzenia Pitagorasa z wykorzystaniem wzoru Herona	17
9.Drugi dowód twierdzenia Pitagorasa z wykorzystaniem wzoru Herona	18
10.Twierdzenie, zagadnienie, problem Herona	19
11.Drugi sposób rozwiązania zadania (z wykorzystaniem wzoru Herona)	23
12.Inna metoda udowodnienia tezy zadania	24
13.Podsumowanie	26
14.Bibliografia	28

Wstęp

Geneza mojego uczestnictwa w konkursie prac matematycznych miała początek w szkole gimnazjalnej. Podczas rozmów z rodzicami wielokrotnie słyszałam komentarze sugerujące, iż w latach, kiedy oni uczęszczali do klas równoległych wiekowo wymagania z matematyki były większe. Odbierałam ich sugestie jako czynnik mobilizujący mnie do jeszcze większej pracy pogłębiającej matematyczną wiedzę. Ciekawość jednak „wzięła górę” i chciałam porównać stawiane przed uczniami wymagania „królowej nauk” z lat szkolnych moich rodziców i obecnie. Wybrałam geometrię, moją ulubioną część matematyki, jedną z najważniejszych dziedzin, która powstała już w starożytności z takimi nazwiskami jak np. Euklides i Pitagoras. Pierwszy z nich już w III w. p.n.e. uporządkował dotychczas poznaną wiedzę z geometrii. Dzięki uprzejmości Pani mgr Karoliny Szymskiej, aktualnie mojej nauczycielce matematyki w liceum, zostały mi udostępnione dwa zbiory zadań (część 1 i część 2) autorstwa Pani Marii Małek- nauczycielki w Liceum Ogólnokształcącym im. Jana Zamoyskiego w Warszawie tj.:

1. Matematyka w szkole średniej. Geometria- zbiór zadań- część 1. Wydanie z 1993 roku przeznaczone przede wszystkim dla uczniów klas pierwszych szkół średnich.
2. Matematyka w szkole średniej. Geometria- zbiór zadań- część 2. Wydanie z 1994 roku przeznaczone dla uczniów klas drugich szkół średnich.

Roczniki wydania tych pozycji mniej więcej pokrywają się z latami, kiedy moi rodzice pogłębiali wiedzę w szkole średniej. Analizując w/w zbiory zadań stwierdziłam, iż w części 1 na 280 zaproponowanych przez autorkę zadań 17 stanowiły zadania o najwyższym stopniu trudności, a w części 2 na 145 zadań było ich 10. Moją szczególną uwagę przyciągnęło jedno zadanie. Treść tego zadania w identyczny sposób przedstawiona została w części 1 i w części 2. W części 1 zadanie to oznaczone zostało najwyższym stopniem trudności, natomiast w części 2 jako zadanie, którego rozwiązanie nie powinno stanowić większego problemu. To zróżnicowanie skali trudności bardzo mnie zainteresowało. Analizując przedstawione dwie metody rozwiązania tego zadania stwierdziłam, że faktycznie sposób rozwiązania zadania w części 1 wymaga sporej intuicji matematycznej, przynajmniej w początkowej fazie rozwiązywania problemu. W części 2 w rozwiązaniu zadania skorzystano ze wzoru Herona. Jako początkująca licealistka pierwszy raz usłyszałam o takim wzorze, ale już od początku miałam wrażenie że sposób rozwiązania zadania z wykorzystaniem tego wzoru jest dużo łatwiejszy. Od Pani mgr Karoliny Szymskiej dowiedziałam się, że wzór Herona jest w programie nauczania w klasie 2. Nadmieniam, że uczę się w klasie o profilu biologiczno-chemicznym. Matematyka jest moją ulubioną dziedziną nauki, ale moje marzenia i plany skierowanie są w stronę medycyny. Jako przedmioty w zakresie rozszerzonym wybrałam więc chemię i biologię, jednak matematykę na egzaminie maturalnym pragnę zdawać również w zakresie rozszerzonym. Zabrzmi to humorystycznie, ale to od poznania wzoru Herona uświadomiłam sobie, że nastał już moment, aby nie odwołując się w czasie rozpocząć intensywne pogłębianie wiedzy matematycznej we własnym zakresie. Po akceptacji mojego ambitnego przemyślenia, oczywiście „pomocną dłoń” po raz kolejny podała mi Pani Karolina, udostępniając swoją pracę magisterską jako absolwentka Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego na temat „Różnych dowodów twierdzenia Pitagorasa”. Ciekawą informacją, o której dowiedziałam się z w/w pracy jest między innymi to, że chociaż twierdzenie Pitagorasa zostało udowodnione, setki, a nawet tysiące lat temu, to matematycy i inni uczeni, wymyślają jego różnorodne dowody. W 1968 roku została wydana książka profesora Elisha Scott Loornis’a

„*The Pythagorean Proposition*”, która zawiera 367 dowodów tego twierdzenia, a niektóre źródła podają, że jest ich więcej, jednak zdarzają się dowody tak podobne, że część osób uznaje je za takie same.

I tak od mojej polemiki z rodzicami w kwestii stawianych wymogów z matematyki dawniej i obecnie, poprzez ciekawość i chęć udowodnienia, że są w błędzie oraz od poznania wzoru Herona zrodził się pomysł uczestnictwa w konkursie prac matematycznych.

Dlatego też w podziękowaniu Heronowi za wpływ na moje ambitne przemyślenia, pozwoliłam sobie poświęcić temu ciekawemu matematykowi i wynalazcy troszeczkę więcej czasu i uwagi.

W mojej pracy przedstawiłam: kilka faktów historycznych dotyczących Herona, dwie metody rozwiązania zadania, które wzbudziło moje zainteresowanie, poprawność rozumowania dla innych przypadków trójkąta, dwa dowody wyprowadzenia wzoru Herona, dwa dowody twierdzenia Pitagorasa z wykorzystaniem wzoru Herona, twierdzenie (zagadnienie) Herona, problem Herona, inną metodę udowodnienia tezy przykładowego zadania oraz wnioski i moje sugestie w podsumowaniu.

Rys Historyczny

„Kilka słów o Heronie matematyku i dowcipnym wynalazcy”

Źródła podają niewiele informacji o tym starożytnym greckim matematyku, fizyku, mechaniku, wynalazcy i konstruktorze, którego najważniejszym matematycznym odkryciem jest wzór na pole trójkąta (zwane właśnie wzorem Herona) oraz wzory na powierzchnie i objętość innych figur geometrycznych, a także metoda przybliżonego obliczania pierwiastków. W latach 148 do 30 p.n.e. Rzymianie podbijali kolejno Macedonię, wszystkie państwa hellenistyczne. Bodaj jako ostatni Egipt w 30r. p.n.e. Gdyby poszukać w tych czasach jakiegoś przedstawiciela nauk ścisłych, to chyba jedynym możliwym kandydatem będzie Heron z Aleksandrii. Sławę i znaczną część majątku zawdzięczał swoim osiągnięciom technicznym. Jest w szczególności autorem kilku cudów, jakie serwowali wiernym kapłani egipscy np. po zakupieniu w świątynnym kiosku stosownej wiązki chrustu i po wrzuceniu jej na święte palenisko przed pielgrzymem otwierały się (same!) drzwi świątyni, których człowiek nie był nawet w stanie poruszyć. Cud ten jest pierwszym odnotowanym w historii zastosowaniem maszyny parowej. Podobną maszynę zamontował Heron w swoim pałacu na Krecie. Służyła ona do delikatnego potrząsania kolumnami co (zważywszy, że Kreta jest terenem nawiedzanym przez trzęsienia ziemi) kończyło zbyt długi pobyt gości w pałacu. Maszyna Herona nie doczekała się żadnego rozsądniejszego zastosowania, ponieważ niedoboru siły fizycznej (dzięki rozwiniętemu niewolnictwu) raczej nie odczuwano. I z maszyną parową Herona pozostało tak- wszyscy dzisiaj wiedzą, że zrobił to półtora tysiąca lat później Watt, bo on zrobił z niej użytek. Innym osiągnięciem Herona był automat, który po wrzuceniu monety nalewał porcję (inną drogą niedostępną) wody święconej. Zupełnie niewyobrażalnym osiągnięciem mechanicznym był zegar wodny, który mierzył czas według przyjętego wówczas obyczaju i przez cały rok, zarówno dzień, jak i noc, były dzielone na 12 godzin. Mimo, że różnice w długości trwania dnia i nocy w niskich szerokościach geograficznych są mniejsze niż np. u nas, to jednak zbudowanie mechanizmu reagującego na nie wydaje się niemożliwe. Od w/w wynalazków bardzo odbiegają osiągnięcia Herona w matematyce. Zwany jego nazwiskiem wzór na pole trójkąta o danych bokach a,b,c mianowicie:

$$\frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

jest typowym przykładem dobrze wykonanej pracy (pochodzi on z dzieła „*Metrica*”).

Pan Marek Kordos wykładowca geometrii na Uniwersytecie Warszawskim i Politechnice Warszawskiej, w swojej książce „Wykłady z historii matematyki” stwierdził, że cyt.: „*Nie każde poprawne uzyskanie nowego twierdzenia jest uprawianiem matematyki: w każdej (praktycznie) teorii jest nieskończenie wiele twierdzeń, więc dla każdego także nieskończenie wiele do odkrycia ich przypada. Warto dowodzić tylko takie (niedowiedzione dotąd) twierdzenia, z których wynikają wnioski odnoszące się do innych, nierozstrzygniętych dotąd pytań. Wzór Herona nie ma tej zalety – jest i już. Pozwala obliczyć pole trójkąta, gdy dane są jego boki i nic więcej*”.

Ciekawa jest natomiast niefrasobliwość (odwaga?) Herona w formułowaniu zadań arytmetycznych. Przykład: „*znaleźć kwadrat, którego suma pola i obwodu wynosi 896*”. Niefrasobliwość polega na tym, że dodaje wielkości odmiennego rodzaju: długość i pole. Oczywiście można domniemywać też (z korzyścią dla Herona), że jest to zdanie sobie sprawy z faktu, iż nie liczymy na podanych w treści zadania obiektach, a tylko na opisujących

je liczbach rzeczywistych – nie sposób jednak takiej tezy (ze względu na szczupłość danych) obronić.

Rozwiązanie zadania przez Herona polega na dopełnieniu do kwadratu:

$$\begin{aligned}x^2 + 4x &= 896 \\x^2 + 4x + 4 &= 900 \\(x+2)^2 &= 30^2 \\x &= 28\end{aligned}$$

co sugeruje, że zadanie było wymyślone „od końca”.

Według historyków (por. „*Geometrię*” Herona, cz.II) początków geometrii należy szukać w Egipcie, gdzie trzeba było stale odtwarzać słupy graniczne pól zniszczonych przez wylewy Nilu. W ten sposób praktyczna potrzeba dała początek dyscyplinie naukowej. Historia algebry zaczyna się w XVI w od rozwiązania przez Cardano, Tartaglię i Ferrariego równań stopnia 3 i 4 w sposób algebraiczny. Rozwiązania zostały jednak znalezione przy pomocy wymyślonej konstrukcji podziału sześcianu na prostopadłościany, która znana była już Heronowi (por. „*Geometria*” Herona, cz.II).

Podobnie początków pojęcia funkcji należy szukać już w Starożytności. Tabliczki babilońskie zawierające tablice odwrotności liczb (igi), tablice pierwiastków kwadratowych i stopnia 3, tablice astronomiczne, tablice mnożenia ułamków (Papiirus Rhinda), tablice zamiany jednostek miar i wag w Grecji, Indiach- to przykłady funkcji zdefiniowanych przy pomocy zbioru ich wartości w zadanych punktach. Inne przykłady zależności funkcyjnych to np. przekroje stożkowe, opisane przez starożytnych w języku geometrii, będące wykresami odpowiednich funkcji, jeśli określać je algebraicznie. Algorytm obliczania pola trójkąta podany przez Herona to typowy przykład słownego opisu funkcji. Heron z Aleksandrii był ostatnim wybitnym geometrą starożytności. Oryginalne teksty Herona pochodzą z jego dzieł „*Stereometrika*” i „*Metrika*”, w których zawarte są przykłady zadań i sposób myślenia Herona w celu ich rozwiązania dotyczące np. znalezienia pola i przekątnej równobocznego i równokątnego czworokąta o boku 50 stóp, obliczenia objętości kuli o średnicy 7 stóp i obwodzie 22 stopy, obliczenia pola pięciokąta, którego każdy z boków ma 10 stóp, mierzenia piramidy (ostroslupa) zbudowanego na kwadracie, znalezienia pola pentagonu (pięciokąta foremnego) sześciokąta i siedmiokąta foremnego itd. W swojej książce „*Poczet wielkich matematyków*” Włodzimierz Kryszewski pisze, iż daty życia Herona zwanego również Heronem Mechanikiem są sporne. Jedni historycy utrzymują, iż działał on w I w. p.n.e. inni natomiast, że w trzecim wieku naszej ery.

Warto zauważyć, iż fakt, że uczeni nie są w stanie ustalić daty powstania dzieła w granicach 400lat, świadczy dostatecznie o skostnieniu i upadku myśli matematycznej. Jako matematyk Heron nie był twórczy, dokonał jednak w matematyce doniosłej przemiany: związał ją z potrzebami człowieka i sprowadził ze świata platońskich idei na ziemię.

Na zakończenie pragnę przytoczyć oryginalny przekaz Herona dotyczący jego sławnego wzoru cyt: „*Istnieje ogólna metoda obliczania pola dowolnego trójkąta o danych bokach, nie biorąc pod uwagę wysokości. Niech np. boki trójkąta mają 7,8,9 jednostek. Dodaj 7,8,9 co daje 24. Weź połowę, w wyniku 12. Odejmij 7, zostanie 5; znów odejmij 8 od 12, pozostaje 4 i znów odejmij 9, reszta 3. Pomnóż 12 przez 5, w wyniku 60, to przez 4, w wyniku 240, a to przez 3, co daje 720. Biorąc pierwiastek kwadratowy otrzymasz pole trójkąta. Ponieważ 720 nie jest kwadratem liczby wymiernej, weźmy pierwiastek z bardzo małą różnicą. Ponieważ następnym kwadratem po 720 jest 729 i pierwiastek kwadratowy jest równy 27, dzielimy 720 przez 27, co daje 26 i dwie trzecie. Dodaj 27, co daje 53 i $\frac{2}{3}$. Połowa z tego to $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Zatem pierwiastek kwadratowy z 720 będzie bardzo blisko $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Istotnie kwadratem $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ jest $720\frac{1}{36}$, a więc różnica jest jedna trzydziesta szósta części jednostki.*

Gdybyśmy chcieli, aby różnica była mniejsza niż $\frac{1}{36}$, należałoby przyjąć znaną wartość $720\frac{1}{36}$ zamiast 729 i obliczając w ten sam sposób otrzymalibyśmy, że różnica jest mniejsza niż jedna trzydziesta szоста część.”

Treść zadania:

Udowodnij, że dla dowolnego trójkąta ABC zachodzi nierówność $h \leq \sqrt{p(p-a)}$, gdzie h jest długością wysokości poprowadzonej z wierzchołka A, a -długością boku BC, a p -połową obwodu tego trójkąta.

Pierwszy sposób rozwiązania zadania

Przekształćmy nierówność, którą mamy udowodnić, do innej równoważnej postaci.

Ponieważ $p = \frac{a+b+c}{2}$, więc $p - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2a}{2} = \frac{b+c-a}{2}$

zatem

$$p(p-a) = \frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} = \frac{b^2 + bc - ab + bc + c^2 - ac + ab + ac - a^2}{4}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{4} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4}$$

mamy więc udowodnić, że

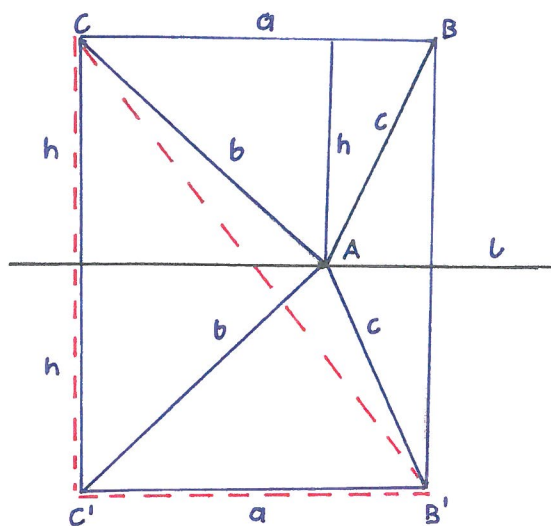
$$h^2 \leq \frac{(b+c)^2 - a^2}{4}$$

lub, że

$$4h^2 + a^2 \leq (b+c)^2$$

Wyrażenie to przypomina twierdzenie Pitagorasa i sugeruje, aby znaleźć trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $2h$ i a .

Trójkąt taki pojawi się, gdy dany trójkąt ABC przekształcimy przez symetrię względem prostej l równoległej do CB i przechodzącej przez punkt A (jak na poniższym rysunku).



W trójkącie prostokątnym $CC'B'$

mamy wówczas:

$$|CC'| = 2h, |C'B'| = a,$$

$$|CB'| \leq |CA| + |AB'| = b+c$$

zatem

$$|CC'|^2 + |C'B'|^2 = 4h^2 + a^2$$

i

$$|CB'|^2 \leq (b+c)^2$$

Ponieważ

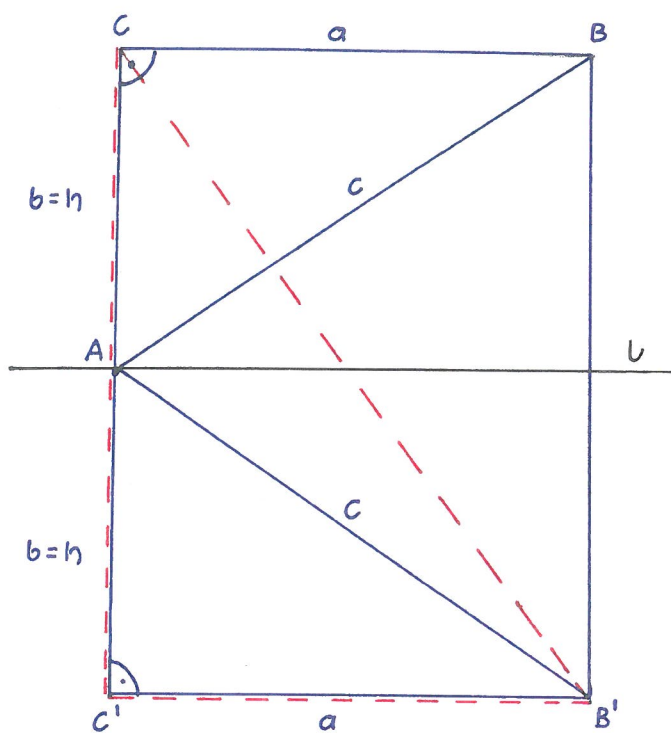
$$|CC'|^2 + |C'B'|^2 = |CB'|^2$$

wynika stąd rzeczywiście, że

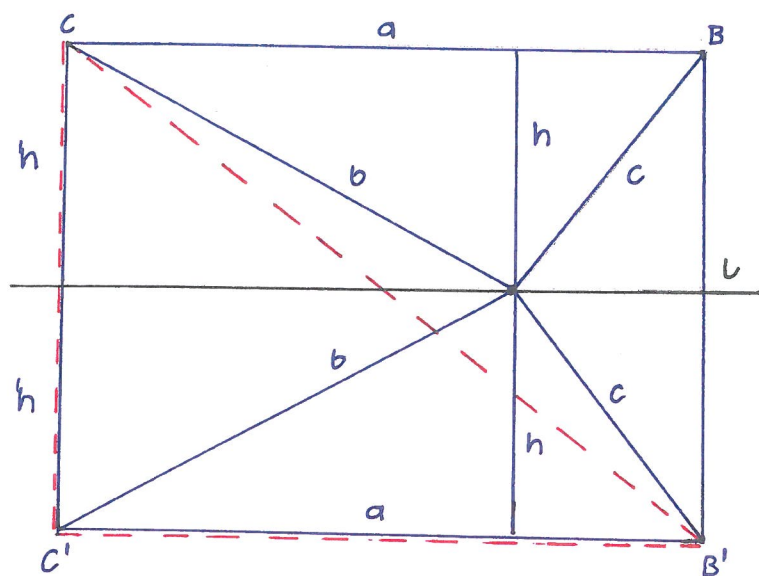
$$4h^2 + a^2 \leq (b+c)^2 \text{ - co mieliśmy udowodnić}$$

Powyższy rysunek dotyczy przypadku trójkąta różnobocznego, ostrokątnego.

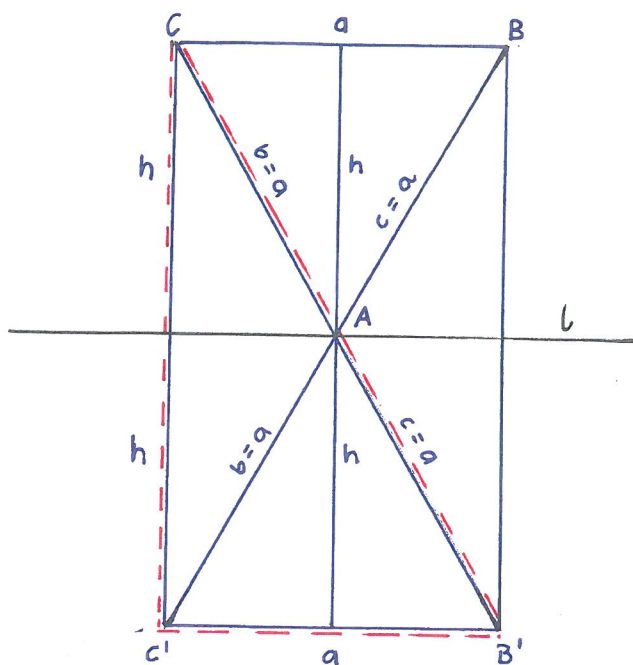
Sprawdziłam, że to samo rozumowanie jest również poprawne w innych przypadkach trójkątów.



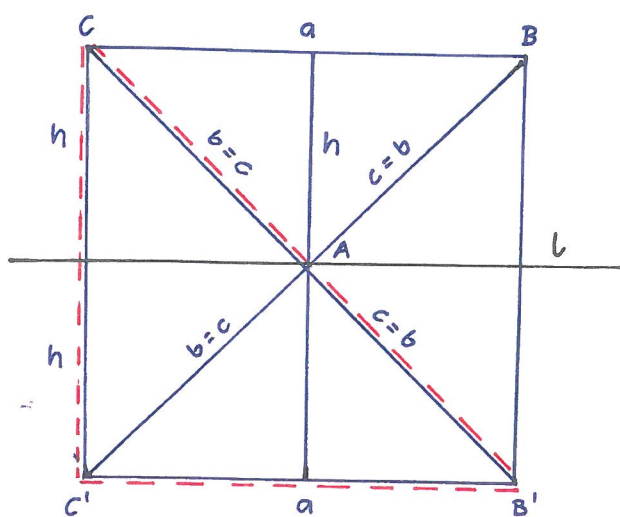
Trójkąt prostokątny
 $(2h)^2 + a^2 < (b + c)^2$



Trójkąt rozwartokątny
 $(2h)^2 + a^2 < (b + c)^2$



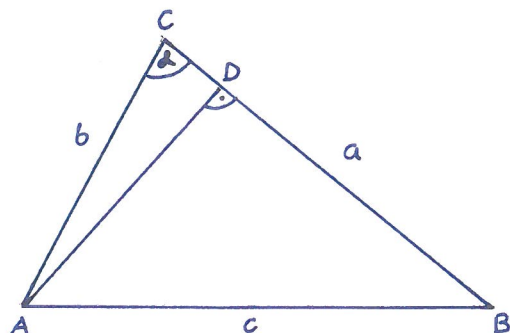
Trójkąt równoboczny
 $(2h)^2 + a^2 = (b + c)^2$



Trójkąt równoramienny
 $(2h)^2 + a^2 = (b + c)^2$

I sposób wyprowadzenia wzoru Herona

Niech dany będzie trójkąt ABC (oznaczenia jak na rysunku poniżej).



$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Aby wyprowadzić występujący we wzorze $\sin \alpha$ za pomocą długości boków wykorzystamy twierdzenie cosinusów:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

oraz jedynkę trygonometryczną:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \right)^2 = \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \right) \cdot \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \right) = \\ &= \left(\frac{2 \cdot a \cdot b - a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot a \cdot b} \right) \cdot \left(\frac{2 \cdot a \cdot b + a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \right) = \left(\frac{(c - a + b)(c + a - b)}{2 \cdot a \cdot b} \right) \cdot \left(\frac{(a + b - c)(a + b + c)}{2 \cdot a \cdot b} \right) \end{aligned}$$

dla uproszczenia przyjmuje się dodatkowe oznaczenia na połowę obwodu trójkąta

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

po jego przekształceniu otrzymujemy następujące zależności:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \cdot p \\ a + b - c &= 2 \cdot p - 2 \cdot c = 2(p - c) \\ c + a - b &= 2 \cdot p - 2 \cdot b = 2(p - b) \\ c - a + b &= 2 \cdot p - 2 \cdot a = 2(p - a) \end{aligned}$$

Podstawiając te równości, otrzymujemy:

$$\sin^2 \alpha = \frac{2 \cdot (p - a) \cdot 2 \cdot (p - b)}{2 \cdot a \cdot b} \cdot \frac{2 \cdot (p - c) \cdot 2 \cdot p}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{4}{a^2 \cdot b^2} \cdot p(p - a)(p - b)(p - c)$$

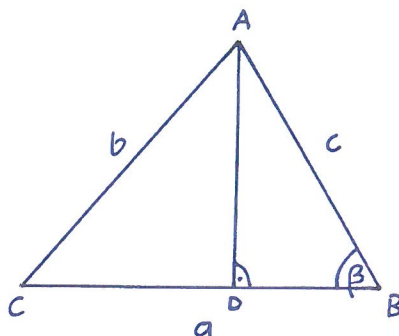
pierwiastkując te równości stronami otrzymamy:

$$\sin \alpha = \frac{2}{a \cdot b} \cdot \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

ostatecznie podstawiając do wzoru $P\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$ otrzymamy:

$$P\Delta = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

II sposób wyprowadzenia wzoru Herona



Jeśli $\beta \leq 90^\circ$ to

$$|BD| = c \cdot \cos \beta$$

$$\text{Z twierdzenia cosinusów: } |BD| = c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

Jeśli $\beta > 90^\circ$ to

$$|BD| = c \cdot \cos(180^\circ - \beta) = -c \cdot \cos \beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2a}$$

wynika stąd, że w obu przypadkach zachodzi wzór:

$$|BD| = \frac{|a^2 + c^2 - b^2|}{2a}$$

Wyberzmy do obliczenia pola taką wysokość trójkąta, której spodek należy do boku trójkąta. Niech będzie to np. wysokość AD ($|AD| = h$)

$$|BD| = \frac{|a^2 + c^2 - b^2|}{2a}$$

W trójkącie ADB mamy:

$$h^2 = c^2 - |BD|^2$$

$$h^2 = c^2 - \frac{|a^2 + c^2 - b^2|^2}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{1}{4a^2} [4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2] =$$

$$= \frac{1}{4a^2} [2ac - (a^2 + c^2 - b^2)][2ac + (a^2 + c^2 - b^2)] =$$

$$= \frac{1}{4a^2} [b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)][(a^2 + 2ac + c^2) - b^2] =$$

$$= \frac{1}{4a^2} [b^2 - (a - c)^2][(a + c)^2 - b^2] =$$

$$= \frac{1}{4a^2} (b - a + c)(b + a - c)(a + c - b)(a + c + b)$$

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2p \\ b - a + c &= 2(p - a) \\ b + a - c &= 2(p - c) \\ a + c - b &= 2(p - b) \end{aligned}$$

$$h^2 = \frac{1}{4a^2} \cdot 2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c)$$

$$h^2 = \frac{4}{a^2} \cdot p(p - a)(p - b)(p - c)$$

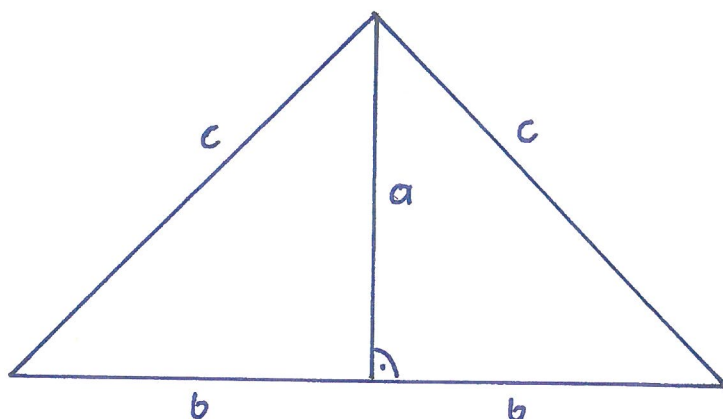
$$h = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

po podstawieniu do wzoru $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah$ otrzymujemy:

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Pierwszy dowód twierdzenia Pitagorasa z wykorzystaniem wzoru Herona.

Dowód autorstwa Jose Antonio Fabiano Mendesa z Rio de Janerio polega na połączeniu dwóch przystających trójkątów prostokątnych. Tym sposobem dostajemy trójkąt równoramienny (rysunek poniżej).



Policzmy pole tego trójkąta korzystając z klasycznego wzoru na pole trójkąta oraz ze wzoru Herona

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot a = ab$$

$$P_{\Delta} = \sqrt{(b+c)b^2(c-b)}$$

Porównując obie równości stronami otrzymujemy:

$$ab = \sqrt{(b+c)b^2(c-b)}$$

$$a^2b^2 = (b+c)b^2(c-b)$$

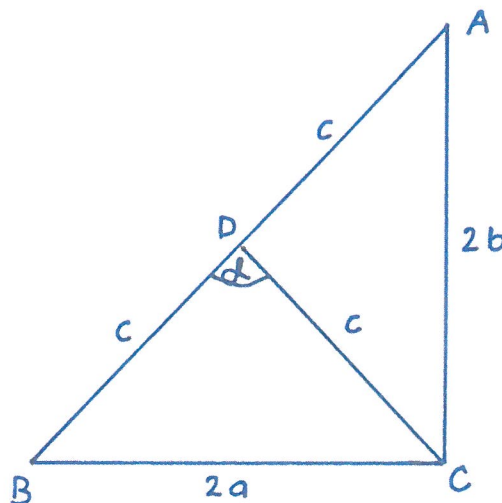
$$a^2 = (c+b)(c-b)$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$$

Drugi dowód twierdzenia Pitagorasa z wykorzystaniem wzoru Herona.

John Molokach znalazł inny sposób wykorzystania wzoru Herona. Podzielił on dany trójkąt na dwa trójkąty równoramienne.



Na początku pokażemy, że oba trójkąty mają takie same pola.

$$P_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} c^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} c^2 \sin(180^\circ - \alpha) = P_{\triangle DCA}$$

A stąd dostaniemy, że

$$P_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = ab$$

Obliczając teraz pole trójkąta DBC ze wzoru Herona otrzymujemy:

$$ab = \sqrt{(a+c)a^2(c-a)}$$

$$a^2 b^2 = (a+c)a^2(c-a)$$

$$b^2 = (c+a)(c-a)$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$4a^2 + 4b^2 = 4c^2$$

$$(2a)^2 + (2b)^2 = (2c)^2$$

Twierdzenie (zagadnienie) Herona, problem Herona.

I. Twierdzenie (zagadnienie) Herona.

Jest to twierdzenie dotyczące drogi promienia światła.

Jedno z najstarszych zagadnień na ekstremum.

Treść twierdzenia:

Niech ustalone punkty P, Q leżą po tej samej stronie l .

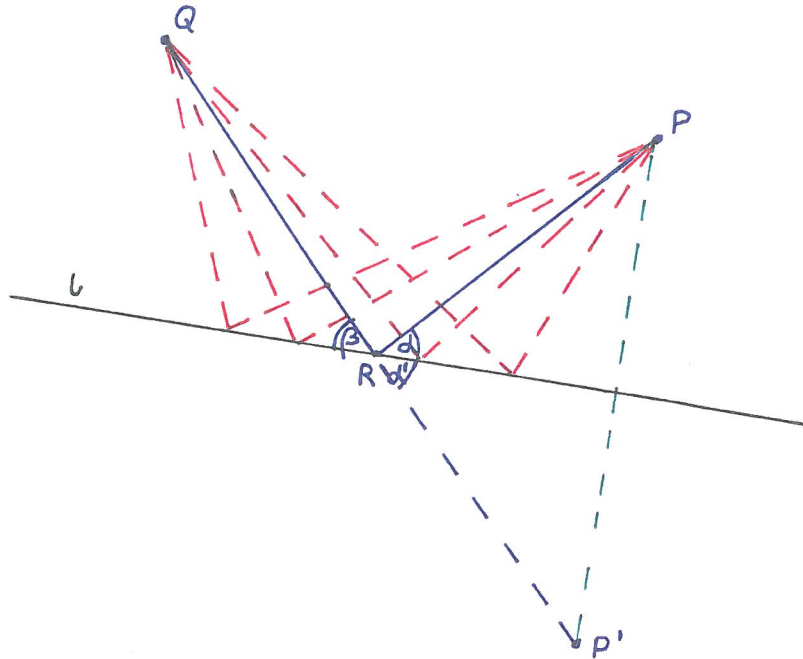
Weźmy dowolny punkt $R \in l$. Oznaczmy przez α miarę kąta pomiędzy odcinkiem RP i prostą l , przez β miarę kąta pomiędzy odcinkiem RQ i l .

Zachodzi wówczas następująca równoważność:

Łamana PRQ ma najmniejszą długość $\Leftrightarrow \alpha = \beta$

Obrazowo treść tego twierdzenia można wyrazić tak:

Łamana PRQ jest najkrótsza wtedy i tylko wtedy, gdy kąt padania jest równy kątowi odbicia.



Dowód

Skonstruujmy punkt P' symetryczny do P względem prostej l i oznaczmy przez α' miarę kąta pomiędzy odcinkami RP' i l .

Zachodzi oczywiście: $|RP| = |RP'|$ oraz $\alpha = \alpha'$

Dostajemy ciąg równoważnych zdań:

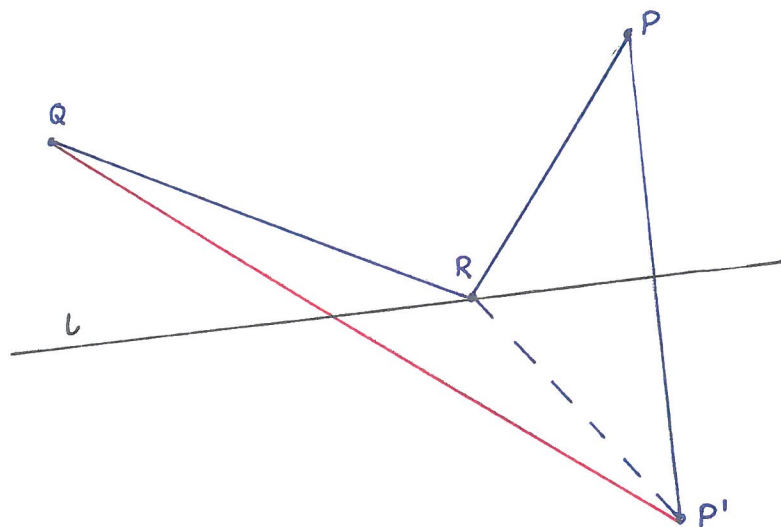
Łamana PRQ ma najmniejszą długość $\Leftrightarrow$ Łamana $P'RQ$ ma najmniejszą długość $\Leftrightarrow$

punkty P', R, Q są współliniowe $\Leftrightarrow \beta = \alpha' \Leftrightarrow \beta = \alpha$

Druga z powyższych równoważności opiera się na nierówności trójkąta, a trzecia na własności kątów wierzchołkowych.

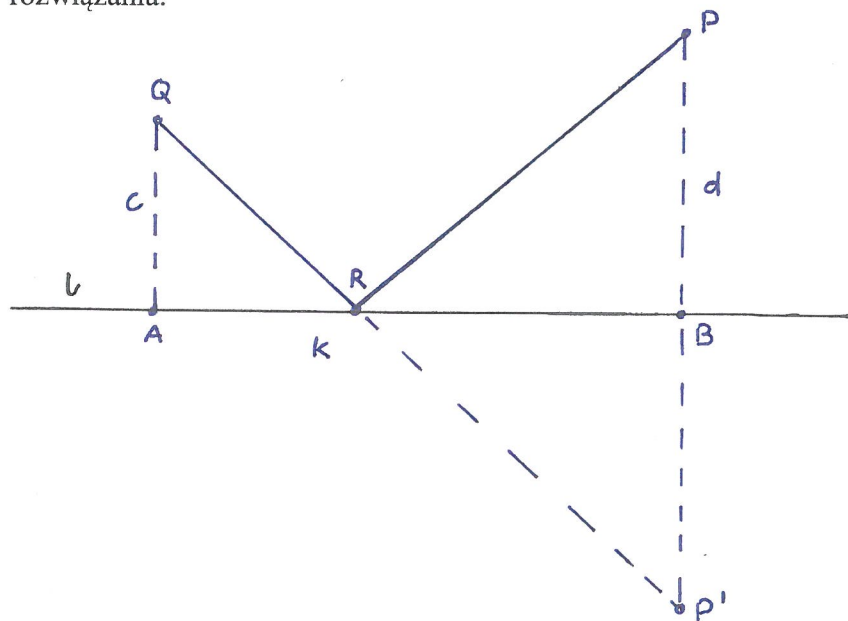
II. Problem Herona.

Problem Herona został omówiony w jego dziele „Catoprica”, które według wszelkiego prawdopodobieństwa ujrzało światło dzienne ok. 2000 lat temu.



Niech P' będzie symetrycznym odbiciem P względem prostej l , PP' jest prostopadłe do l , $RP = RP'$. Dla dowolnego punktu R na l , $QR + RP = QR + RP'$. Przez nierówność trójkąta QRP' , $QR + RP' \geq QP'$, z równością osiągniętą tylko wtedy, gdy R leży na QP' (co zostało udowodnione w twierdzeniu Herona).

Problem znany był w Japonii przez Fukagawę i Pedoe, którzy podkreślili obliczeniowe aspekty rozwiązania.



Niech R jest zmiennym punktem w danym segmencie AB, Q jest stałym punktem na prostopadłej AQ do linii AB, a P jest ustalone po tej samej stronie AB co Q i leży na prostopadłej BP do AB.

Przyjmijmy oznaczenia:

$AQ = c$; $BP = d$; $AB = k$

Znajdźmy $AR = p$ takie, że $QR + RP$ jest minimalne, gdy R porusza się na AB.

Rozwiązanie:

Jeżeli R spełnia wymagania minimalne, trójkąty ARQ BRP' są podobne.

Więc:

$$\frac{AR}{AQ} = \frac{BR}{BP} = \frac{AR+BR}{AQ+BP} = \frac{AB}{AQ+BP}$$

lub po wprowadzonych oznaczeniach:

$$\frac{p}{c} = \frac{k}{c+d}$$

$$p = \frac{kc}{c+d}$$

Powyższe zależności znalazły zastosowanie w matematyce przy rozwiązywaniu zadań o trójkątach oraz dotyczących drogi o najmniejszej długości (czyli minimum). W fizyce stosuje się je w optyce przy konstrukcji obrazu w zwierciadle płaskim.

Treść zadania, które wybrałam dotyczy udowodnienia tezy: $h \leq \sqrt{p(p-a)}$ w dowolnym trójkącie. Pierwszy sposób rozwiązania zadania nazwałam sposobem z „wykorzystaniem przekształcenia geometrycznego jakim jest symetria osiowa”. Drugi sposób rozwiązania sposobem „z wykorzystaniem wzoru Herona”. Poznając osiągnięcia matematyczne Herona doszłam do następujących wniosków:

W źródłach, z których korzystałam spotkałam się z zadaniem i jego rozwiązaniem o treści: Dany jest trójkąt o danym polu S i boku $c=PQ$. Spośród wszystkich takich trójkątów znaleźć ten, w którym suma pozostałych boków $QR = a$ i $RP = b$, a więc $a+b$ jest najmniejsza (sytuację można sobie wyobrazić na poprzednich rysunkach).

Rozwiązanie:

Z warunku pierwszego (ustalone pole) wynika, że szukany trzeci wierzchołek znajduje się na prostej l równoległej do boku c , ponieważ odległość tego wierzchołka od prostej stanowiącej przedłużenie danego boku trójkąta musi być stała i wynosi $h = \frac{2S}{c}$ (wynika to ze wzoru na pole trójkąta $S = \frac{1}{2}hc$). Punkty P i Q są zatem jednakowo oddalone od prostej l . W tym szczególnym przypadku zgodnie z twierdzeniem Herona szukany trzeci wierzchołek trójkąta będzie równoodległy od punktów P i Q a otrzymany trójkąt równoramienny.

Przykład ten ewidentnie potwierdza sytuacje z trójkątem równoramiennym i równobocznym, które obrazowo przedstawiłam podczas sprawdzenia poprawności toku myślenia sposobem „z wykorzystaniem symetrii osiowej” w innych przypadkach trójkątów.

Reasumując:

1. Korzystając z zależności $|CB'| = |CA| + |AB'| = b+c$ mówiącej o współliniowości punktów C,A,B' (czyli o tzw. minimum) automatycznie korzystamy z twierdzenia Herona.

2. Korzystając z zależności $|CB'| < |CA| + |AB'| = b+c$ automatycznie korzystamy z tzw. nierówności trójkąta CAB', która dotyczy przypadków trójkątów: ostrokątnego, rozwartokątnego, prostokątnego.

Drugi sposób rozwiązania zadania (z wykorzystaniem wzoru Herona)

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} ah = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)} \cdot \sqrt{(p-b)(p-c)}$$

stąd:

$$\frac{h}{\sqrt{p(p-a)}} = \frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{\frac{1}{2}a}$$

$$h \leq \sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{1}{2}a$$

$$\frac{1}{2}a \geq \sqrt{(p-b)(p-c)}$$

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 \geq (p-b)(p-c)$$

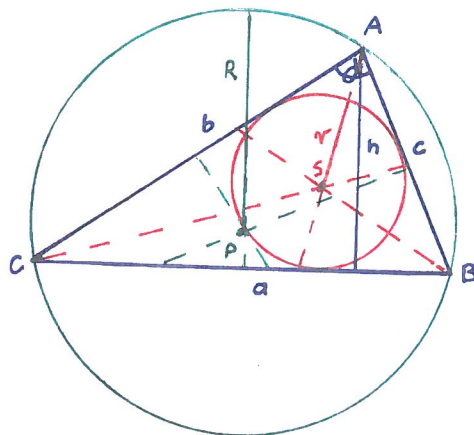
$$\frac{1}{4}a^2 \geq \left(\frac{a+b+c-2b}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2c}{2}\right)$$

$$a^2 \geq (a+c-b)(a+b-c)$$

$$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2$$

A ta nierówność jest oczywiście prawdziwa.

Inna metoda udowodnienia tezy zadania.



$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ah = rp \text{ więc:}$$

$$\frac{h}{p} = \frac{2r}{a}$$

$$\frac{h}{p \cdot \sqrt{p-a}} = \frac{2r}{a \sqrt{p-a}}$$

$$\frac{h}{\sqrt{p} \cdot \sqrt{p} \cdot \sqrt{p-a}} = \frac{2r}{a \sqrt{p-a}}$$

$$\frac{h}{\sqrt{p(p-a)}} = \frac{2r\sqrt{p}}{a \sqrt{p-a}}$$

Mamy udowodnić, że:

$$h \leq \sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow \frac{h}{\sqrt{p(p-a)}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2r\sqrt{p}}{a \sqrt{p-a}} \leq 1 \Leftrightarrow 2r\sqrt{p} \leq a \sqrt{p-a}$$

Wykażemy, że

$$a \sqrt{p-a} \geq 2r \sqrt{p}$$

$$a^2(p-a) \geq 4r^2p$$

$$a^2p - a^3 \geq 4r^2p$$

$$4r^2p \leq a^2p - a^3 \leq a^2p$$

$$4r^2p \leq a^2p$$

$$4r^2 \leq a^2$$

$$2r \leq a$$

Z twierdzenia sinusów :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

$$a = 2R \sin\alpha$$

$$\sin\alpha \leq 1$$

$$2R\sin\alpha \leq 2R$$

$$a \leq 2R$$

$$2r \leq a \leq 2R$$

$$2r \leq 2R$$

$$r \leq R$$

A to jest oczywiście prawdą.

PODSUMOWANIE

Na zakończenie pragnę przedstawić moje wnioski i sugestie wynikające z niniejszej pracy:

1. Wybrane zadanie w swojej treści i problemie do rozwiązania nie jest być może wyjątkowe i bardzo ciekawe. Wspomniałam wcześniej, iż zainteresowało mnie z uwagi na przedstawienie sposobów jego rozwiązania o różnym stopniu trudności. Ważne jest, że rozstrzygnięcie poprawności tezy opiera się na przeprowadzeniu stosownego dowodu, a z praktyki wiem, że zadania tego typu nam uczniom sprawiają spore problemy. Postać tezy do udowodnienia od razu sugeruje, że dowód należy przeprowadzić z wykorzystaniem wzoru Herona i metoda ta będzie najprostsza. Jedynym warunkiem jest, aby rozwiązujący zadanie posiadał wiedzę, że jednym z wzorów na obliczenie pola powierzchni dowolnego trójkąta jest wzór wyprowadzony przez Herona i znać jego postać, a nawet jeśli postać ta umknęła z pamięci wystarczy jak to się potocznie mówi „*wiedzieć gdzie poszukać*”. Potwierdza to, wiadomą każdemu, priorytetową zasadę, że warto poznać to co udowodnili wcześniej inni aby nie „*męczyć umysłu*” i „*utrudniać sobie życia*” np. podczas matury, jednego z najważniejszych egzaminów w życiu człowieka.

2. Z analizy dowodu przeprowadzonego z wykorzystaniem wzoru Herona doszłam do wniosku, że idąc tym tokiem myślenia i wykorzystując inne znane wzory na pole powierzchni dowolnego trójkąta (np. z okręgiem wpisanym w trójkąt i okręgiem opisanym na trójkącie) można również po przeprowadzeniu odpowiednich przekształceń udowodnić tezę zadania.

3. W części „*Rys historyczny*” zacytowałam Pana Marka Kordosa z jego książki „*Wykłady z historii matematyki*”, który stwierdził, że wzór Herona pozwala obliczyć pole trójkąta, gdy dane są jego boki i **nie więcej**.

Owszem znając boki trójkąta ABC możemy w sposób bezpośredni obliczyć jego obwód i pole. Dane pole trójkąta ABC przy wykorzystaniu innych wzorów na pole powierzchni dowolnego trójkąta pozwala obliczyć inne wielkości tego trójkąta:

a) wysokości h_a , h_b , i h_c opuszczone na poszczególne boki trójkąta ABC z wzoru $P = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$

b) promień koła r wpisanego w trójkąt ABC z wzoru $P = r \cdot p$ (gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$)

c) promień koła R opisanego na trójkącie ABC z wzoru $P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

d) sinusy kątów α , β , γ w trójkącie ABC z wzoru

$$P = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

e) znając wartości sinusów kątów, znamy wartości kątów α, β, γ

Podsumowując, to właśnie obliczenie pola powierzchni trójkąta ABC mając dane długości jego boków umożliwia korzystając z innych wzorów obliczyć inne jego parametry.

Ponadto w pracy przedstawiłam dwa dowody twierdzenia Pitagorasa z wykorzystaniem wzoru Herona. Dlatego też, wydaje mi się, że stwierdzenie „*i nic więcej*” zbyt mocno obniża wartość funkcjonalną tego wzoru.

4. Sposób rozwiązania zadania „z wykorzystaniem symetrii osiowej” nie jest odosobniony od wpływu innych osiągnięć matematycznych Herona tj: tzw. „*minimum*” i „*nierówności trójkąta*”.

5. W kwestii mojej polemiki z rodzicami muszę z pełnym szacunkiem dla nich przyznać, że mają dużo racji, a przekonałam się o tym porównując skalę trudności zadań z ich zbiorów i obecnych.

Bibliografia

1. Marek Kordos „*Wykłady z historii matematyki*”, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994,
2. Witold Więśław „*Matematyka i jej historia*”, Wydawnictwo NOWIK, Opole 1997,
3. Włodzimierz Krysicki „*Poczet wielkich matematyków*”, Nasza Księgarnia, Warszawa 1965,
4. Dawid Wells „*Cudowne i interesujące łamigłówki matematyczne*” ZYSK i S-KA Wydawnictwo, Poznań 1992,
5. Maria Małek „*Matematyka w szkole średniej*” Geometria. Zbiór zadań cz.1, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1993,
6. Maria Małek „*Matematyka w szkole średniej*”. Geometria. Zbiór zadań cz.2, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1994,
7. Karolina Szyska „*Praca Magisterska – Różne dowody twierdzenia Pitagorasa*” Uniwersytet Jagielloński – Wydział Matematyki i Informatyki. Instytut Matematyki, Kraków 2016,
8. https://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_Herona
9. <https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/HeronsProblem.shtml>