Trójkąty w ujęciu Euklidesowym, a płaszczyzna dziewięciu punktów

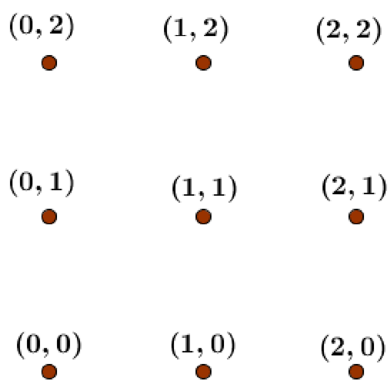
OLAF CHRZANOWSKI, WOJCIECH MIŚKOWICZ, MIKOŁAJ ROZMUS

Choć większości uczniów z pewnością trudno to sobie wyobrazić, istnieje wiele różnych geometrii. To, co ze szkolnej ławki kojarzy nam się z geometrią, matematycy znają jako geometrię euklidesową. Wyróżnia się jeszcze geometrię sferyczną, hiperboliczną, eliptyczną... Można by tak długo wymieniać. My zaś w ostatnim czasie zetknęliśmy się z płaszczyzną dziewięciu punktów, która jest przykładem geometrii skończonej, czyli takiej, gdzie prosta zawiera skończoną liczbę punktów.

Zetknięcie się z tą ciekawą płaszczyzną w artykule Andrzeja Szablewskiego *"Geometria dziewięciu punktów"* ([2]) zainspirowało nas do porównania jej z dobrze nam znaną płaszczyzną euklidesową. Niniejszy artykuł jest jedną z dwóch części, jakie powstały w wyniku kilkumiesięcznej pracy pięcioosobowego zespołu nad własnościami płaszczyzny euklidesowej oraz płaszczyzny dziewięciu punktów. W tej części przedstawiamy czytelnikowi wyniki związane z relacjami między prostymi oraz główne własności trójkątów na płaszczyźnie dziewięciu punktów i płaszczyźnie euklidesowej. W drugiej części *"Okręgi w ujęciu Euklidesowym, a płaszczyzna dziewięciu punktów"* zredagowanej przez naszych kolegów czytelnik znajdzie podobne porównanie własności na obydwu tych płaszczyznach, ze szczególnym uwzględnieniem własności okręgów. Naszą część rozpoczynamy od zdefiniowania płaszczyzny dziewięciu punktów i przedstawienia jej podstawowych cech.

§ 1
Podstawowe informacje na temat płaszczyzny dziewięciu punktów

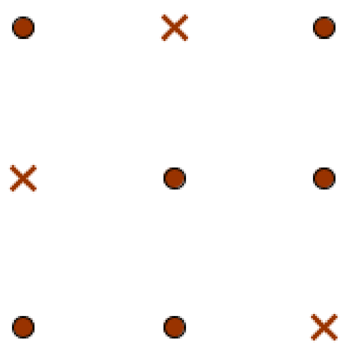
Andrzej Szablewski w [2] opisał, jak wygląda taka płaszczyzna i jak definiuje się na niej podstawowe figury geometryczne, które my jak dotąd znaliśmy jedynie w ujęciu euklidesowym. Choć trudno to sobie wyobrazić, cała płaszczyzna składa się dokładnie z dziewięciu punktów, których współrzędne widzimy na rysunku obok. Skoro mamy skończoną liczbę punktów, to z pewnością prosta nie może ich zawierać nieskończenie wiele, jak to było na płaszczyźnie euklidesowej. Tutaj prostą definiuje się jako zbiór utworzony z trzech punktów mających dokładnie jedną wspólną współrzędną albo takich, że żadne 2 punkty nie mają



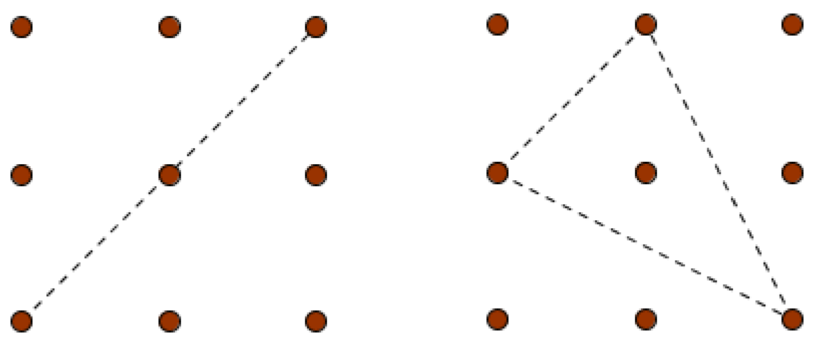
wspólnej. Takich zbiorów jest dokładnie 12, zatem płaszczyzna dziewięciu punktów zawiera 12 prostych. Oto one:

$$L_1 = \{(0,2),(1,2),(2,2)\} \qquad L_7 = \{(0,2),(1,1),(2,0)\}$$
$$L_2 = \{(0,1),(1,1),(2,1)\} \qquad L_8 = \{(0,0),(1,1),(2,2)\}$$
$$L_3 = \{(0,0),(1,0),(2,0)\} \qquad L_9 = \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$$
$$L_4 = \{(0,2),(0,1),(0,0)\} \qquad L_{10} = \{(1,2),(2,1),(0,0)\}$$
$$L_5 = \{(1,2),(1,1),(1,0)\} \qquad L_{11} = \{(2,1),(1,0),(0,2)\}$$
$$L_6 = \{(2,2),(2,1),(2,0)\} \qquad L_{12} = \{(0,1),(1,0),(2,2)\}$$

O ile proste $L_1, \dots , L_8$ są zgodne z intuicją prostej, którą mamy z płaszczyzny euklidesowej (wszystkie punkty leżą w jednej linii), to pozostałe cztery proste mogą budzić wątpliwości u czytelnika. Punkty tych prostych nie leżą w jednej linii i tak na prawdę o tym, że te zbiory tworzą proste decyduje całkowicie abstrakcyjna definicja prostej na płaszczyźnie dziewięciu punktów współrzędnej (w [1] czytelnik może się dowiedzieć, jak ogólnie definiuje się proste na płaszczyznach skończonych). Na rysunku obok widzimy punkty tworzące prostą L_9 wyróżnione krzyżykiem. Szablewski w [3] rozróżnia te dwa rodzaje prostych nazywając je odpowiednio zbiorami pierwszego i drugiego typu.



Jesteśmy przyzwyczajeni, że na "zwykłej" płaszczyźnie mogliśmy ustalać relacje między dwiema prostymi. Mogły one być równoległe, prostopadłe, lub przecinać się pod kątem innym, niż kąt prosty. Stąd pojawiło się pytanie, czy podobne rozważania są możliwe dla prostych na płaszczyźnie dziewięciu punktów. Pojawia się jednak problem, który nie występował na płaszczyźnie euklidesowej. Mianowicie jak ustalić tego typu relacje dla prostych $L_9, \dots , L_{12}$? Na płaszczyźnie euklidesowej wszystkie proste mają bardzo ważną własność. Otóż jeśli rozważymy odcinki, których obydwa końce leżą na tej samej prostej, to wszystkie takie odcinki wyznaczają ten sam kierunek. Własność ta charakteryzuje również proste $L_1, \dots , L_8$. Ale punkty prostych $L_9, \dots , L_{12}$ wyznaczają trzy różne kierunki.



Na rysunkach powyżej zaznaczono przerywaną linią kierunek wyznaczony przez prostą L_8 (po lewej) oraz trzy kierunki wyznaczone przez punkty prostej L_9 (po prawej).

Próbując zbadać prostopadłość albo równoległość między tymi dwiema prostymi musielibyśmy wybrać jeden z trzech kierunków prostej L_9. Ale to powoduje pytanie, jak tego wyboru dokonać. Mogłoby się przecież zdarzyć, że dla każdego kierunku otrzymalibyśmy inną relację. Tymczasem wzajemne położenie między dwiema prostymi musi zostać ustalone w sposób jednoznaczny. Wniosek z tego, że ustalenie relacji między prostymi nie zawsze jest możliwe. Na pewno ustalenie takich relacji nie nastręcza żadnych trudności, jeśli wszystkie odcinki zawarte w prostych wyznaczają jeden kierunek. W innym przypadku (zgodnie z [1]) przyjmujemy, że dwie proste są równoległe, jeśli nie mają punktów wspólnych.

Na pewno możemy więc ustalić relacje między prostymi $L_1, \dots, L_8$ (zbiory typu pierwszego, czyli punkty leżące w jednej linii) oraz niektóre relacje między pozostałymi prostymi, analizując ich ewentualne punkty przecięcia. Pozostaną jednak sytuacje, w których relacji między dwiema prostymi nie będziemy mogli ustalić. Bardziej szczegółowo opowiemy o tym za chwilę.

Jak wspomnieliśmy wcześniej, wszystkie punkty prostych pierwszego typu wizualnie tworzą linię. Łatwo więc na podstawie położenia tych linii dostrzec zależności między prostymi. Możemy też użyć ogólnie znanych warunków algebraicznych na prostopadłość i równoległość prostych, pozwalających rozstrzygnąć położenie prostych względem siebie, jeśli tylko znamy współrzędne dwóch punktów należących do tych prostych (z taką sytuacją mamy do czynienia na płaszczyźnie dziewięciu punktów).

Rozważmy więc punkty o następujących współrzędnych: $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ oraz $D = (d_1, d_2)$. Symbolem $\overline{AB}$ oznaczmy prostą przechodzącą przez punkty A i B. Wówczas prawdziwe są dwa następujące warunki:

1) $\overline{AB} \perp \overline{CD} \Leftrightarrow (b_1 - a_1) \cdot (d_1 - c_1) + (b_2 - a_2) \cdot (d_2 - c_2) = 0$,

2) $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Leftrightarrow (b_1 - a_1) \cdot (d_2 - c_2) - (b_2 - a_2) \cdot (d_1 - c_1) = 0$.

W tym miejscu warto przypomnieć, że warunek pierwszy został też podany w [2].

Kryteria te pozwalają nam rozstrzygnąć położenie dwóch prostych względem siebie, ale jedynie w przypadku, gdy punkty prostej wyznaczają jeden kierunek. Zatem i ta własność może zostać zastosowana wyłącznie dla prostych $L_1, \dots, L_8$. Zachęcamy czytelnika do zbadania odpowiednich przykładów i samodzielnego przekonania się, że proste wizualnie wyglądające na prostopadłe bądź równoległe w istocie spełniają odpowiedni z powyższych warunków. Korzystając z tych zależności oraz z dodatkowej informacji o prostych równoległych ustaliliśmy, że pomiędzy prostymi na płaszczyźnie dziewięciu punktów zachodzą następujące relacje:

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}
L_1	╳	$\parallel$	$\parallel$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	╲	╲	?	?	?	?
L_2		╳	$\parallel$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	╲	╲	?	?	?	?
L_3			╳	$\perp$	$\perp$	$\perp$	╲	╲	?	?	?	?
L_4				╳	$\parallel$	$\parallel$	╲	╲	?	?	?	?
L_5					╳	$\parallel$	╲	╲	?	?	?	?
L_6						╳	╲	╲	?	?	?	?
L_7							╳	$\perp$	?	$\parallel$	?	$\parallel$
L_8								╳	$\parallel$	?	$\parallel$	?
L_9									╳	?	$\parallel$	?
L_{10}										╳	?	$\parallel$
L_{11}											╳	?
L_{12}												╳

Zależności dla prostych $L_1, \dots, L_8$ wynikają z omówionych warunków algebraicznych. Przekreślone komórki mówią nam, że dane proste nie są ani prostopadłe, ani równoległe. Gdyby istniały narzędzia definiujące miarę kąta na płaszczyźnie dziewięciu punktów, to moglibyśmy przyjąć, że proste te przecinają się pod kątem innym niż 90°. Ponieważ proste tej grupy wyznaczają jeden kierunek, to taki kąt byłby wyznaczony jednoznacznie. Równoległości między prostymi typu drugiego wynikają z braku punktów wspólnych. Jak zwróciliśmy uwagę wcześniej, dla prostych z tej grupy nie można użyć warunku algebraicznego, więc umownie przyjmujemy, że proste nie mające punktu przecięcia są równoległe. Komórki oznaczone znakiem zapytania informują nas, że w tym przypadku nie jesteśmy w stanie określić wzajemnego położenia dwóch prostych. Mają one jakiś punkt wspólny, więc nie są równoległe, a z drugiej strony ich punkty wyznaczają trzy różne kierunki na płaszczyźnie, więc warunek algebraiczny jest w tej sytuacji bezużyteczny i nie można na jego podstawie rozstrzygnąć wzajemnego położenia między prostymi.

Z prostopadłością i równoległością wiąże się wiele fundamentalnych twierdzeń matematycznych. W niniejszej pracy podjęliśmy próbę ustalenia, które twierdzenia z klasycznej geometrii euklidesowej mogą zostać przeniesione na płaszczyznę dziewięciu punktów. Ze względu na ograniczenia, jakie ta płaszczyzna ze sobą niesie, w swoich rozważaniach skupiliśmy się jedynie na tych własnościach, które mogą zostać zbadane na podstawie wzajemnego położenia prostych, bądź długości odcinków. Musimy więc zdefiniować odległość między dwoma punktami tej płaszczyzny.

Definicja ta jest całkowicie abstrakcyjna i nie ma nic wspólnego z długościami, które można wyrazić znanymi nam jednostkami. Przyjmujemy, że odległość między dwoma punktami wynosi 1, jeżeli różnią się one między sobą jedną współrzędną, natomiast jeżeli różnią się obydwoma współrzędnymi, to odległość między nimi wynosi 2. Z tego wynika, że wszystkie wielokąty na płaszczyźnie dziewięciu punktów będą miały boki długości 1 lub 2. Przez bok (odcinek) będziemy tu rozumieć dowolny zbiór składający się z dwóch punktów. Używając wspomnianych wcześniej warunków algebraicznych możemy badać też wzajemne relacje między dwoma odcinkami.

Po przybliżeniu najważniejszych pojęć związanych z płaszczyzną dziewięciu punktów możemy przystąpić do badania jej własności. Nasze rozważania rozpoczynamy od najbardziej elementarnego wielokąta- mianowicie trójkąta. W [2] czytelnik może dowiedzieć się na temat konstrukcji czworokątów (w szczególności prostokątów) oraz związanych z tym tematem wątpliwości.

§ 2
Trójkąty na płaszczyźnie dziewięciu punktów

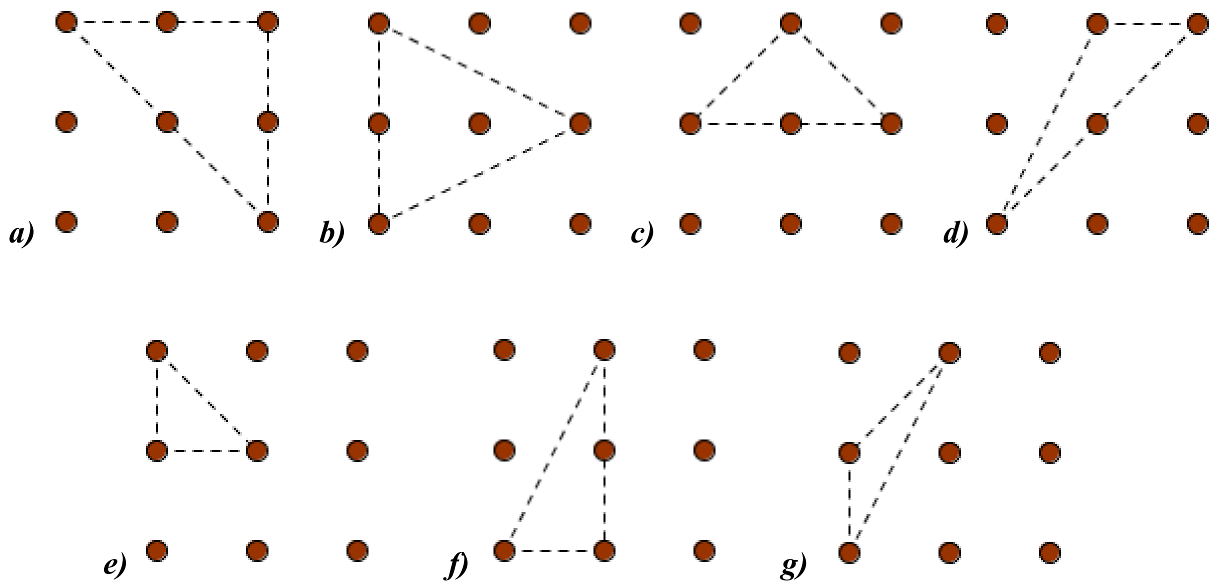
Przypomnijmy, że trójkąt to wielokąt o trzech bokach. Tą definicję kojarzy chyba każdy. Aby jednoznacznie wyznaczyć trójkąt na płaszczyźnie euklidesowej wystarczy wskazać trzy niewspółliniowe punkty, które będą jego wierzchołkami. W analogiczny sposób możemy postawić definicję trójkąta na płaszczyźnie dziewięciu punktów.

Trzy wierzchołki spośród dostępnych dziewięciu punktów można wybrać na

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$$

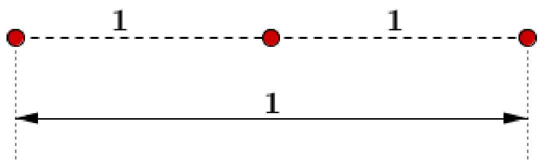
sposoby. Wynika to stąd, że pierwszy wierzchołek możemy wybrać na 9 sposobów, drugi na 8, a trzeci na 7 (po wskazaniu jakiegoś wierzchołka mamy zawsze do wyboru o jeden mniej). Ale licząc w ten sposób traktujemy, że kolejność punktów ma dla nas znaczenie. Tymczasem tworząc trójkąt z trzech wierzchołków, ich kolejność nie jest ważna. Ponieważ 3 elementy można ustawić w różnej kolejności na 6 sposobów, tyle razy został policzony każdy trójkąt. Musimy więc podzielić całość przez 6.

Wiemy już, że dwanaście z tych osiemdziesięciu czterech "trójek" tworzy proste. Są to więc punkty współliniowe. Wszystkie pozostałe "trójki" utworzą trójkąty. Ostatecznie zatem otrzymaliśmy, że na płaszczyźnie dziewięciu punktów istnieją dokładnie 72 trójkąty. Uwzględniając między nimi pewne symetrie, możemy je podzielić na 7 następujących rodzajów:



Oczywiście odcinki zaznaczone przerywaną linią nie istnieją na płaszczyźnie dziewięciu punktów (istnieją jedynie wyróżnione na czerwono punkty). Linie te mają ułatwić zauważenie, które z punktów są wierzchołkami trójkąta. Łatwiej też dzięki temu dostrzec, gdzie znajdują się wierzchołki innych trójkątów tego samego typu. Na przykład występują dokładnie 4 trójkąty typu *a)*. Są to trójkąty, których wierzchołkami są trzy kolejne wierzchołki dużego "kwadratu" 3×3. Czytelnik łatwo zauważy, że trójkątów kolejnych typów jest odpowiednio $4, 4, 8, 8, 16, 16, 16,$ co rzeczywiście daje łącznie 72. Wśród nich mamy dokładnie 44 trójkąty prostokątne. Są to trójkąty typu *a), c), e)* oraz *f)*. Korzystając z wprowadzonych wcześniej warunków algebraicznych można sprawdzić, które boki trójkątów są prostopadłe.

Obok trójkąta prostokątnego bardzo szczególnym rodzajem trójkąta jest trójkąt równoboczny. Ponieważ na płaszczyźnie dziewięciu punktów istnieją tylko dwie możliwe długości odcinków, a mianowicie 1 i 2, to możemy rozważać tylko dwa różne (uwzględniając sytuacje symetryczne) trójkąty równoboczne- o bokach długości 1 oraz o bokach długości 2. Oznacza to, że wszystkie wierzchołki takich trójkątów mają jedną współrzędną wspólną, albo mają wszystkie współrzędne różne między sobą. Ale trzy punkty spełniające któryś z tych warunków tworzą na płaszczyźnie dziewięciu punktów prostą. Wniosek z tego, że gdyby istniały tu trójkąty równoboczne, to ich wierzchołki byłyby współliniowe. Na tradycyjnej płaszczyźnie nie jest możliwe znalezienie trzech punktów współliniowych, z których każde dwa byłyby w takiej samej odległości (na co również Szablewski zwraca uwagę w [3]). Punkty skrajne zawsze byłyby bardziej od siebie oddalone, niż jakiekolwiek inne. Dość zaskakujący jest zatem fakt, że istnieje geometria, gdzie takie coś jest możliwe...

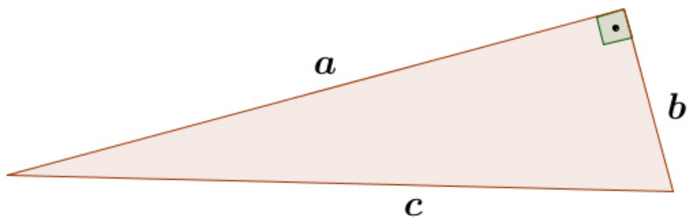


Skoro wiemy już, że ta "najładniejsza" sytuacja nie zachodzi- w końcu trójkąt równoboczny jest najbardziej symetrycznym trójkątem- to przyjrzyjmy się tym trójkątom, które istnieją na płaszczyźnie dziewięciu punktów. Choć trójkąty są najprostszymi możliwymi wielokątami, to paradoksalnie spośród innych wielokątów wyróżnia je mnóstwo własności i twierdzeń. Mowa tu oczywiście o trójkątach w ujęciu euklidesowym. Sprawdźmy, które z tych własności da się przetłumaczyć na język dziewięciu punktów.

Pierwszym twierdzeniem, które w sposób naturalny przychodzi na myśl jest twierdzenie Pitagorasa. To chyba najsłynniejsze twierdzenie matematyczne. Na dzień dzisiejszy znanych jest aż kilkaset jego dowodów. Na rozważanej przez nas płaszczyźnie dziewięciu punktów istnieją trójkąty prostokątne, możliwe jest więc rozważenie tego twierdzenia. Przypomnijmy jego klasyczną wypowiedź:

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Na zwykłej płaszczyźnie liczby a, b, c mogą przyjmować dowolne wartości będące liczbami rzeczywistymi. Tymczasem będąc na płaszczyźnie dziewięciu punktów dysponujemy jedynie bokami długości *1* lub *2*. Przyjrzyjmy się występującym tu trójkątom prostokątnym. Trójkąty typu *a), e)* oraz *f)* mają przyprostokątne długości *1* oraz przeciwprostokątną długości *2*. Z kolei trójkąty typu *c)* mają przyprostokątne długości *2* oraz przeciwprostokątną długości *1*. Jednak żadna z równości:

- $1 + 1 = 4$,
- $4 + 4 = 1$,

nie jest prawdziwa. Wniosek z tego, że na płaszczyźnie dziewięciu punktów nie zachodzi twierdzenie Pitagorasa. Co więcej nie istnieje tu żaden trójkąt prostokątny, dla którego suma kwadratów długości dwóch boków byłaby równa kwadratowi długości trzeciego boku.

Wynika to z faktu, że nie jest możliwe dobranie takich wartości dla liczb $a, b, c \in \{1,2\}$, aby spełniona była równość

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Wszystkie możliwe wartości dla liczb $a, b, c \in \{1,2\}$ (z dokładnością do symetrii między bokami długości a i b) przedstawiamy w poniższej tabeli:

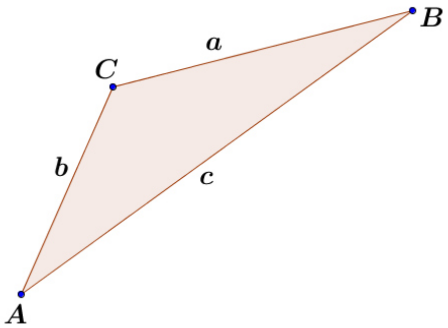
a	1	1	1	2
b	1	2	2	2
c	2	1	2	1

Warto tu przypomnieć, że nie rozważamy sytuacji, gdzie wszystkie boki miałyby taką samą długość. Wcześniej wyjaśniliśmy, że trójkąty równoboczne na płaszczyźnie dziewięciu punktów nie występują, bo wówczas z definicji wierzchołki takich trójkątów byłyby punktami współliniowymi. Skoro w żadnym z powyższych czterech przypadków nie zachodzi równość $a^2 + b^2 = c^2$, to oznacza, że również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa nie może tu być spełnione. Tak na prawdę tego twierdzenia nie ma sensu w ogóle rozważać, bowiem nigdy nie będą spełnione jego założenia.

Do zaskakujących obserwacji doprowadziła nas dokładniejsza analiza trójkątów z ostatnich trzech kolumn powyższej tabeli. Zauważyliśmy bowiem, że na płaszczyźnie dziewięciu punktów istnieją trójkąty prostokątne, których przyprostokątne mogą mieć długości takie same, jak długość przeciwprostokątnej, a nawet że przeciwprostokątna może być krótsza niż przyprostokątne (trójkąty typu *c*). Taka sytuacja nie mogłaby się zdarzyć na płaszczyźnie euklidesowej, gdzie jak powszechnie wiadomo, przeciwprostokątna jest zawsze najdłuższym bokiem trójkąta. To nakierowało nas na pewne bardzo elementarne, ale często zapominane twierdzenie związane z długościami boków trójkąta, a mianowicie twierdzenie o nierówności trójkąta.

Spróbujemy czytelnika wprowadzić w to zagadnienie w sposób obrazowy. Oczywistym wydaje się fakt, że jeśli mamy przybyć z miasta *A* do miasta *B*, to najkrótsza możliwa droga będzie prowadzić bezpośrednio z jednego miasta do drugiego, w linii prostej. Jeśli jednak postanowimy zboczyć z trasy, aby "przy okazji" zwiedzić miasto *C*, to wówczas droga z miasta *A* do miasta *B* ulegnie wydłużeniu. Taki właśnie jest zasadniczy sens twierdzenia o nierówności trójkąta. Jego klasyczna wypowiedź brzmi:

W dowolnym trójkącie długość każdego boku jest mniejsza od sumy długości dwóch pozostałych boków.



$$c < a + b$$

$$a < b + c$$

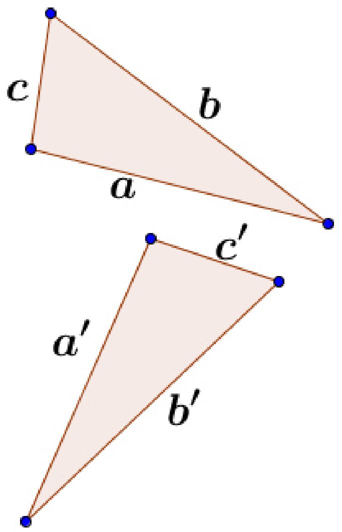
$$b < a + c$$

Oczywiście mówimy tu o długości boków w ujęciu klasycznym- euklidesowym. Już na trójkątach prostokątnych typu *a), e)* oraz *f)* mogliśmy zaobserwować, że własność ta nie przekłada się na płaszczyznę dziewięciu punktów. Wspomniane trójkąty prostokątne mają boki długości $1, 1, 2$, a więc suma długości dwóch krótszych boków nie będzie większa niż długość trzeciego boku. Wniosek z tego, że wybierając się na wycieczkę po płaszczyźnie dziewięciu punktów, w pewnych sytuacjach korzystniej jest jednak zboczyć z trasy. Nie wydłuży to drogi, którą będziemy musieli pokonać, a na pewno trochę więcej zobaczymy... Oczywiście mamy tu na myśli wycieczkę metaforyczną.

Jak wspomnieliśmy wcześniej spośród wszystkich wielokątów trójkąty odznaczają się bogactwem własności. Wśród twierdzeń bardzo przydatnych należy wymienić cechy przystawania trójkątów. Dwie figury geometryczne w ujęciu euklidesowym nazywamy przystającymi, gdy mają wszystkie boki równej długości oraz odpowiednie kąty takiej samej miary. W praktyce oznacza to, że jeśli chcielibyśmy zbadać przystawanie dwóch, dajmy na to, stukątów, to musielibyśmy porównać długości wszystkich stu boków oraz miary wszystkich stu kątów. Wyjątkiem tutaj jest trójkąt, gdzie dzięki cechom przystawania wcale nie musimy znać długości wszystkich trzech boków i miar wszystkich trzech kątów.

Na płaszczyźnie dziewięciu punktów, jak dotąd, nie potrafimy zdefiniować miary kąta- poza kątem prostym, który jest określony za pomocą warunku algebraicznego na współrzędnych punktów. Problem zdefiniowania tutaj dowolnego kąta jest problemem wciąż otwartym. Wspominaliśmy o tym w paragrafie wstępnym, przy okazji badania zależności między prostymi. Dla prostych typu pierwszego, gdzie punkty prostych wyznaczają jednoznacznie ich kierunek taki kąt mógłby być wyznaczony jednoznacznie. Póki jednak problem ten nie został jeszcze rozstrzygnięty, nie wszystkie cechy przystawania trójkątów możemy tutaj rozpatrywać. Ale na pewno możemy mówić o cechach opartych na długościach boków:

- cecha przystawania trójkątów *"bok-bok-bok"*:



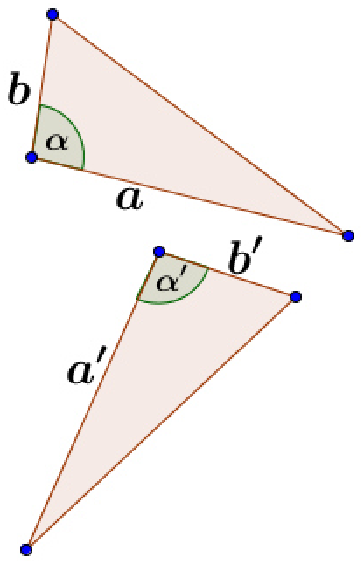
Dwa trójkąty są przystające, gdy długości boków jednego trójkąta są takie same, jak długości boków drugiego trójkąta.

$$a = a'$$

$$b = b'$$

$$c = c'$$

- cecha przystawania trójkątów *"bok-kąt-bok"*:



Dwa trójkąty są przystające, gdy dwa boki jednego z nich mają takie same długości, jak dwa boki drugiego trójkąta i kąty między tymi bokami w obydwu trójkątach mają takie same miary.

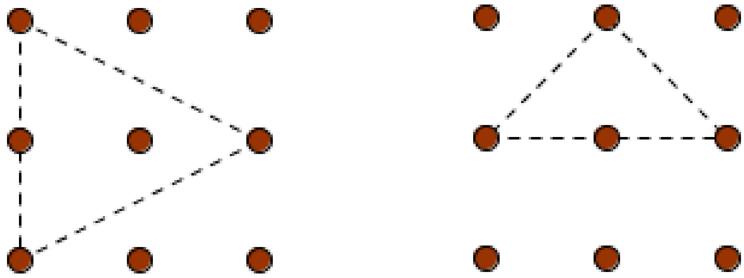
$$a = a'$$

$$b = b'$$

$$\alpha = \alpha'$$

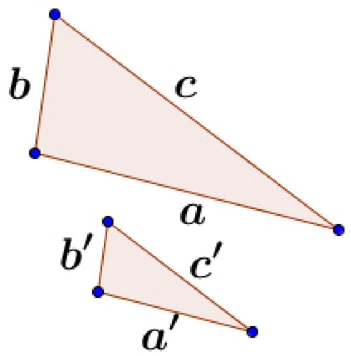
Oczywiście w przypadku cechy *"bok-kąt-bok"* na płaszczyźnie dziewięciu punktów jedynym kątem, który możemy rozpatrywać jest kąt prosty. Okazuje się jednak, że tutaj, jeśli nawet dwa trójkąty spełniają którąś z powyższych cech przystawania, to niekoniecznie muszą być przystające, na co przedstawimy odpowiednie kontrprzykłady.

Zaczniemy od cechy *"bok-bok-bok"*. Porównajmy trójkąty typu *b)* i *c)*. Wszystkie one mają boki długości $2, 2, 1$. Zatem zgodnie z cechą przystawania powinny to być trójkąty przystające. Jednak trójkąty przystające miałyby również wszystkie kąty o takich samych miarach. Tymczasem trójkąty typu *c)* (po prawej) są trójkątami prostokątnymi, podczas gdy wśród trójkątów typu *b)* nie ma żadnego trójkąta prostokątnego (po lewej). Zatem cecha przystawania trójkątów *"bok-bok-bok"* nie rozstrzyga jednoznacznie o przystawaniu na płaszczyźnie dziewięciu punktów.



Problem pozostaje jednak otwarty w przypadku cechy przystawania *"bok-kąt-bok"*. Tym razem porównajmy trójkąty typów *a), e)* oraz *f).* Wszystkie one mają przyprostokątne długości *1* oraz przeciwprostokątną długości *2.* Nasuwa się jednak pytanie, czy są to trójkąty przystające. Zgodnie z cechą przystawania moglibyśmy przyjąć, że przystawanie w tym przypadku zachodzi. Jednak poprzedni przykład pokazał, że nawet trójkąty mające wszystkie boki takich samych długości (jak tutaj) nie muszą być przystające na płaszczyźnie dziewięciu punktów. Należałoby się upewnić badając miary pozostałych dwóch kątów. Ponieważ jednak nie mamy narzędzi, które pozwoliły nam te miary porównać, nie umiemy na to pytanie póki co odpowiedzieć. Mamy nadzieję, że kiedyś uda nam się postawić poprawną definicję miary kąta na płaszczyźnie dziewięciu punktów i wówczas rozstrzygniemy ten oraz wiele innych problemów.

Równie interesujące wydają się nam zagadnienia związane z podobieństwem trójkątów, ale ponownie pojawia się pytanie, jak zdefiniować podobieństwo trójkątów, nie mając miary dowolnego kąta? Jedyną cechą, która znów mogłaby okazać się rozstrzygająca wydaje się cecha podobieństwa trójkątów *"bok-bok-bok"*:

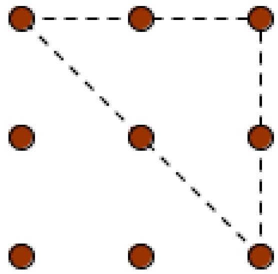


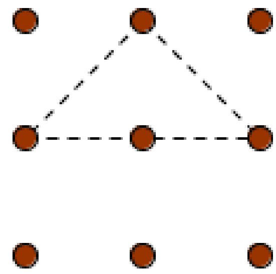
Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Jednakże dysponując jedynie odcinkami długości *1* i *2* trudno o proporcje między bokami- chyba, że mielibyśmy do czynienia z trójkątami równobocznymi, a takie, jak wiemy, na płaszczyźnie dziewięciu punktów nie istnieją. Jedyne proporcje, jakie możemy tu uzyskać to $\frac{1}{2}$

lub $\frac{2}{1}$. Co możemy zatem powiedzieć o dwóch trójkątach prostokątnych równoramiennych? Na płaszczyźnie euklidesowej nie mielibyśmy najmniejszych wątpliwości , że muszą być one podobne. Ale tutaj potrafimy wskazać takie trójkąty, które zgodnie z cechą podobieństwa *"bok-bok-bok"* podobne być nie mogą. Przyjrzyjmy się trójkątom typu *a)* i *c)*. Trójkąty z grupy *a)* (po lewej) mają przyprostokątne długości *1*, a przeciwprostokątną długości *2*. Trójkąty z grupy *c)* (po prawej) odwrotnie.





Zatem ramiona są do siebie w stosunku $\frac{1}{2}$ (trójkąt *a)* do trójkąta *c)*), ale przeciwprostokątne są do siebie w stosunku $\frac{2}{1}$. Zgodnie z cechą podobieństwa trójkątów, wbrew elementarnej intuicji, trójkąty te nie są podobne.

Na płaszczyźnie euklidesowej można wymienić jeszcze wiele własności dotyczących trójkątów, jednak większości z nich nie sposób nawet wypowiedzieć w języku dziewięciu punktów. Brak do tego narzędzi, które można zdefiniować na "zwykłej" płaszczyźnie, ale na płaszczyźnie dziewięciu punktów już nie. Można jednak badać związki trójkątów z innymi figurami geometrycznymi, jak choćby z okręgami.

W odniesieniu do tego zagadnienia czytelnik znajdzie informacje w siostrzanym artykule naszych kolegów *"Okręgi w ujęciu Euklidesowym, a płaszczyzna dziewięciu punktów",* który jest kontynuacją rozważań na temat tej płaszczyzny oraz możliwych jej powiązań z płaszczyzną euklidesową. Zachęcamy również do tej lektury.

§ 4
Bibliografia

[1] Encyklopedia Internetowa "Wikpedia, the free encyklopedia"
https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_geometry (dostęp 16.01.2018)

[2] Szablewski Andrzej "Geometria dziewięciu punktów"
Portal popularnonaukowy miesięcznika Delta (Mała Delta, lipiec 2016)
http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/geometrie_nieeuklidesowe/2016/06/21/Geometria_dziewieciu_punktow/ (dostęp 10.12.2017)

[3] Szablewski Andrzej "Geometria 9 punktów";
Strona Centrum Młodzieży w Krakowie
http://towarzystwo.edu.pl/assets/prace_matematyczne/sm_15_szablewski.pdf (dostęp 13.11.2017)