

Parabolograf Fransa van Schooten'a jako pomoc dydaktyczna

Julia Włoszek

Piotr Włoszek

Liceum Ogólnokształcące im. ks. Stanisława Konarskiego w Oświęcimiu

Praca matematyczna napisana pod opieką

mgr Pawła Pająka

SPIS TREŚCI

Wstęp	3
Rozdział I - Ogólne zagadnienia.....	3
Rozdział II	7
Kreślenie paraboli przy pomocy parabolografu Fransa van Schooten'a - matematyzacja urządzenia	7
Zbudowanie urządzenia do kreślenia paraboli.....	12
Podsumowanie.....	15
Bibliografia	16

WSTĘP

W czasach przed wprowadzeniem komputerów, wielokrotne i precyzyjne rysowanie różnorodnych krzywych matematycznych mogło szybko stać się niezwykle uciążliwe oraz czasochłonne. W odpowiedzi na te trudności, na przestrzeni wieków opracowano wiele ciekawych mechanizmów kreślących, które umożliwiały szybkie i dokładne tworzenie takich krzywych.

Nazywamy się Julia i Piotr Włoszek. Podczas wieloletniej nauce w szkole spotkaliśmy się z różnymi przyborami geometrycznymi, których używają nauczyciele podczas zajęć, takimi jak drewniana linijka, ekierka czy cyrkiel. Po zapoznaniu się z działem „funkcja kwadratowa” zastanowiliśmy się, czy istnieje urządzenie, dzięki któremu na tablicy można wykreślić parabolę. Okazało się, że w szkole nie ma takiego. Postanowiliśmy wtedy, że przyjrzymy się bliżej temu zagadnieniu i spróbujemy skonstruować interesujący nas sprzęt. Z matematyki, zagłęбилиśmy się ogólnie w teorię mechanizmów przegubowych, a najbardziej uwagę naszą skupił jeden z nich – parabolograf Fransa van Schooten’a. Zaznaczyć chcemy, że naszym celem nie była dogłębna analiza wspomnianej teorii, a jedynie skonstruowanie pomocy dydaktycznej przy jej użyciu.

Niniejsza praca składa się ze wstępu, dwóch rozdziałów, podsumowania oraz bibliografii. Rysunki umieszczone w rozdziale drugim zostały wykonane z pomocą opiekuna pracy w programie GeoGebra. W pracy umieszczono 17 rysunków (zdjęć).

ROZDZIAŁ I

Ogólne zagadnienia

Czym są mechanizmy przegubowe?

Mechanizmy przegubowe to ramiona, zazwyczaj wykonane z metalowych prętów, połączone przegubami, które umożliwiają im swobodne ruchy obrotowe lub przesuwne. Są one używane w urządzeniach mechanicznych i maszynach w celu osiągnięcia określonych rezultatów.

Wśród mechanizmów przegubowych wyróżnić możemy kilka rodzajów:

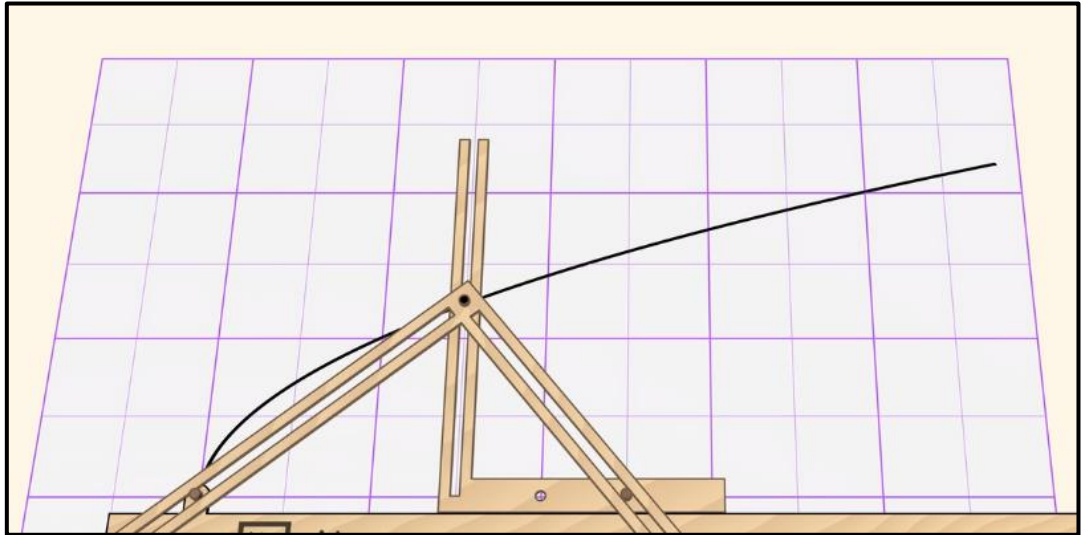
1. inwersory - zamieniające ruch po odcinku na ruch po łuku i na odwrót,
2. trysektory - mechanizmy dzielące kąt na trzy równe części,
3. mechanizmy kreślące rozmaite krzywe m. in.: elipsografy, parabolografy i hiperbolografy.

Czym jest parabolograf?

Parabolograf to urządzenie do kreślenia paraboli.

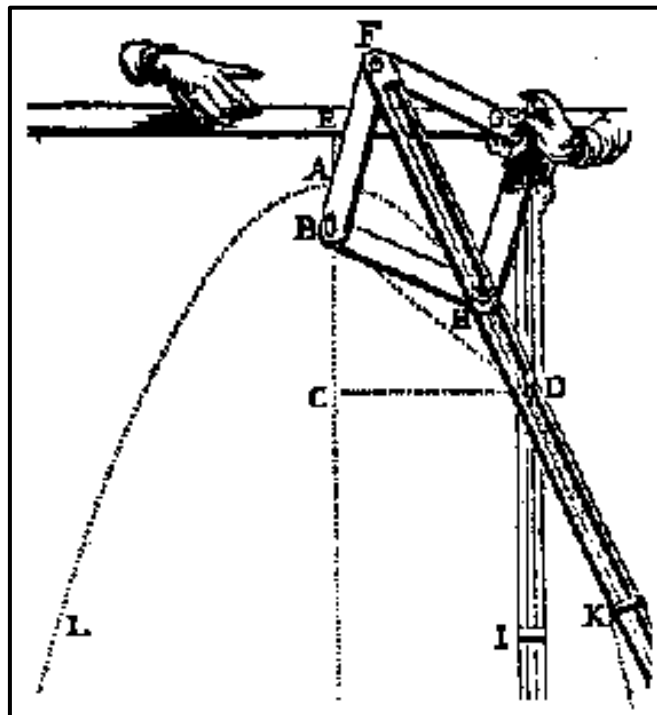
Wyróżnić możemy następujące:

1. parabolograf Cavalieriego:

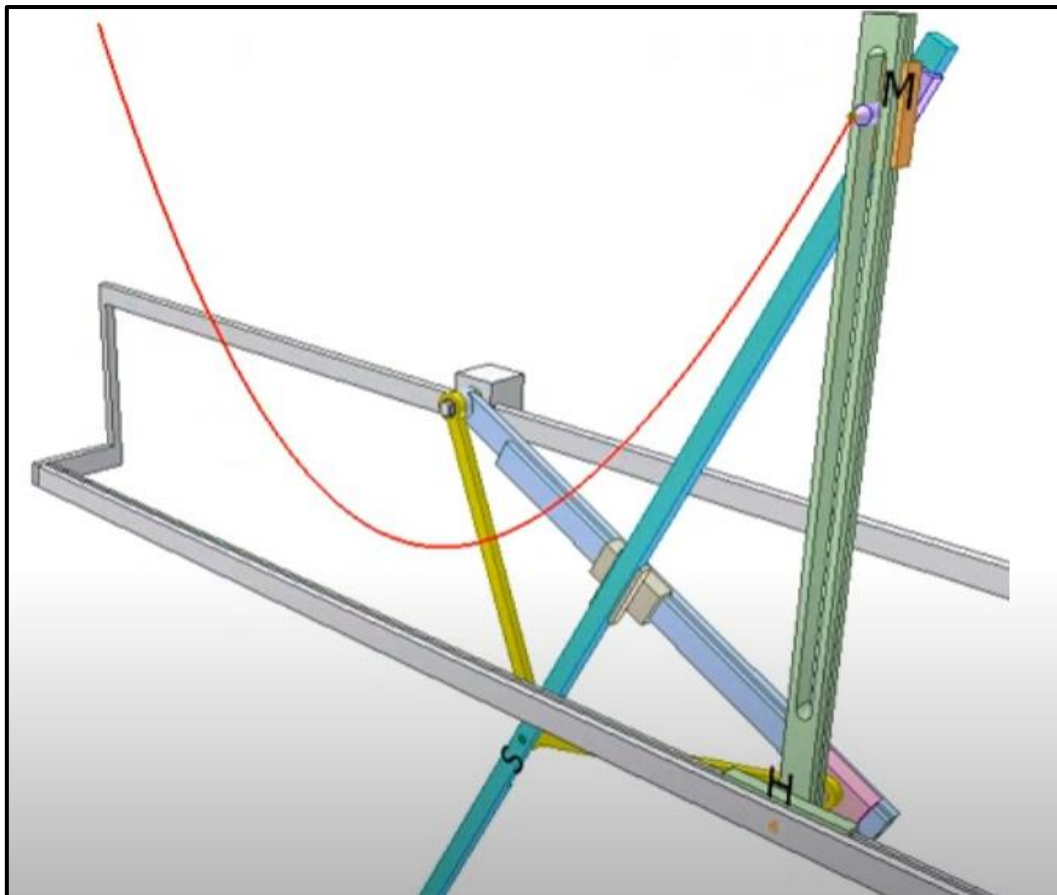


rys. 1

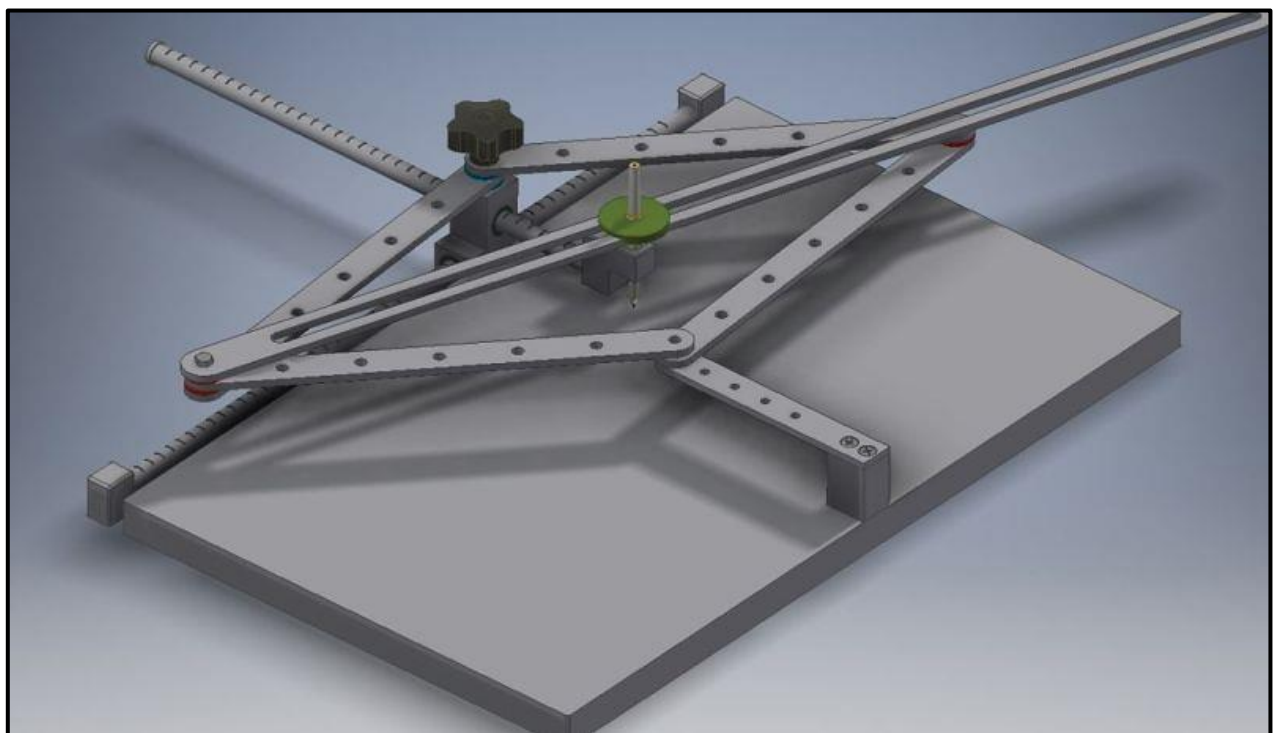
2. parabolograf Fransa van Schooten'a:



rys. 2



rys. 3



rys. 4

Kim był Frans van Schooten?

Frans van Schooten (15 maja 1615 - 29 maja 1660) był holenderskim matematykiem, najbardziej znanym z popularyzacji geometrii analitycznej Kartezjusza.



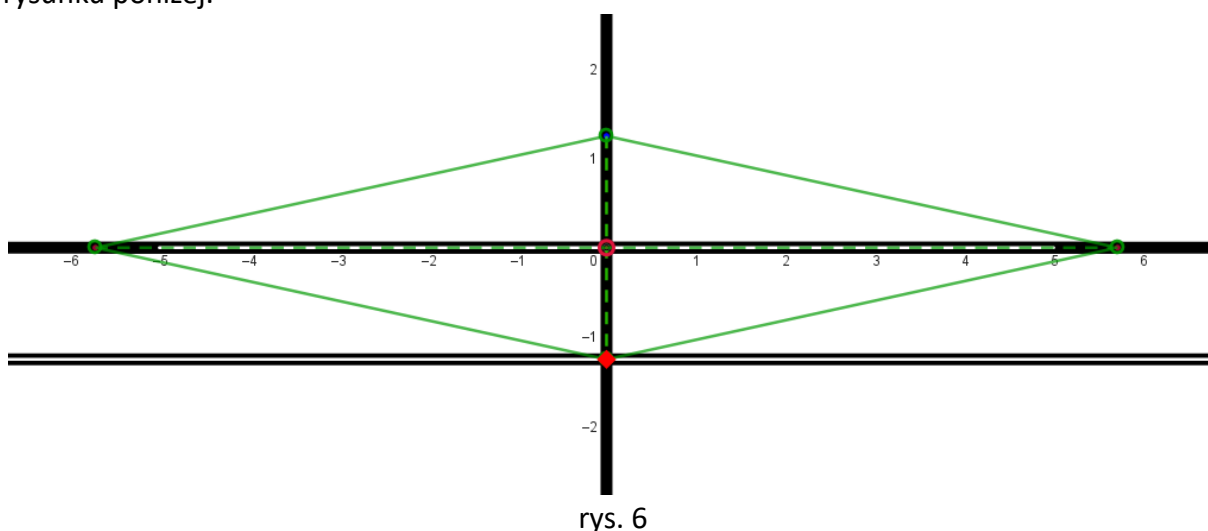
rys. 5

ROZDZIAŁ II

Kreślenie paraboli przy pomocy parabolografu Fransa van Schooten'a - matematyzacja urządzenia

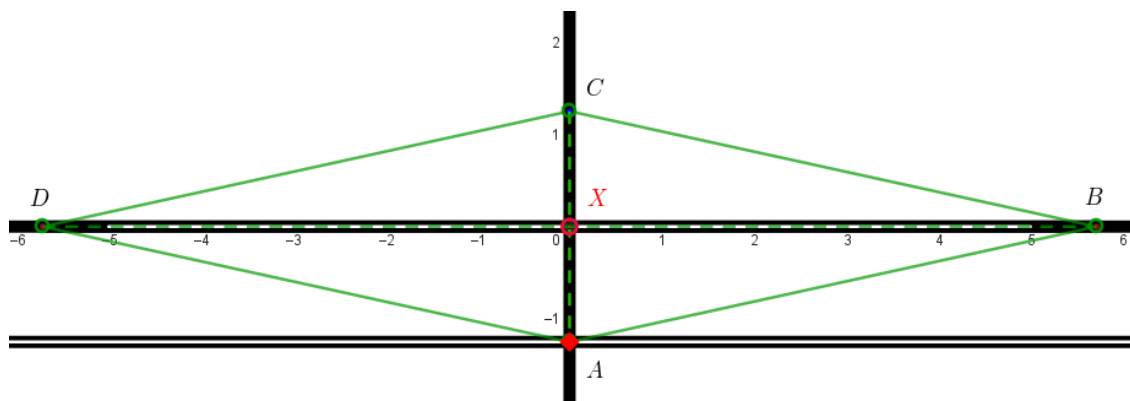
W rozdziale tym, omówiony zostanie mechanizm kreślący dowolną parabolę w układzie współrzędnych. Poddamy analizie związek między długością odpowiednich przegubów mechanizmu a współczynnikiem kierunkowym paraboli $y = ax^2, a \neq 0$. Na końcu rozdziału przedstawimy zbudowany przez nas parabolograf.

1. Dany mamy układ współrzędnych, a w nim osadzony parabolograf w położeniu standardowym¹, jak na rysunku poniżej.



rys. 6

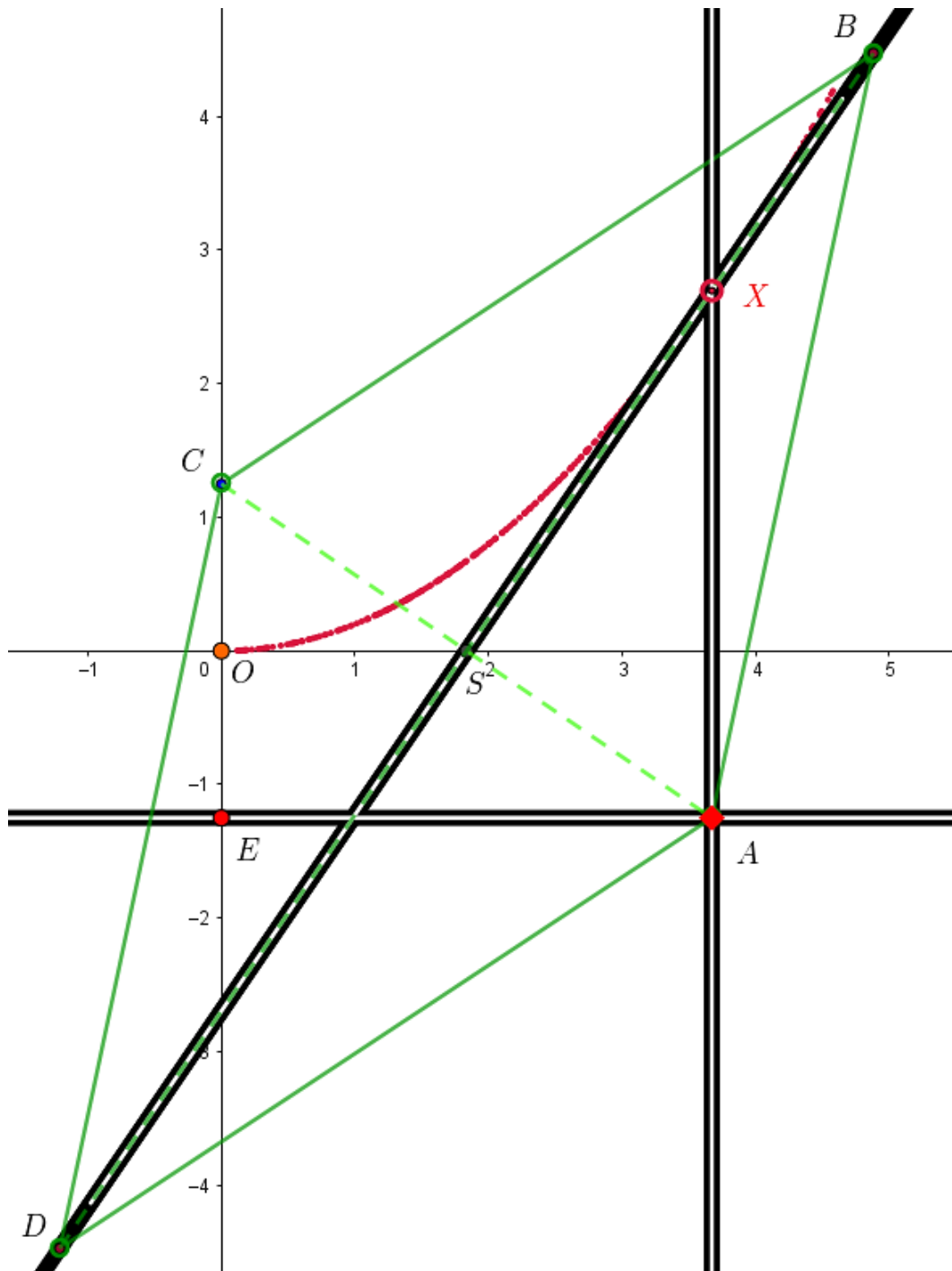
2. Dla ułatwienia rachunków przypiszmy odpowiednim obiektom mechanizmu nazwy. Niech długość przekątnej w **położeniu standardowym** (przegub) $|AC| = t$. Od wartości t zależęć będzie wartość współczynnika a naszej krzywej $y = ax^2, a \neq 0$. Punktem kreślącym krzywą, po uprzednim wprowadzeniu mechanizmu w ruch jest punkt X , zaś punktem wprowadzającym mechanizm w ruch punkt A .



¹ Położenie standardowe parabolografu u nas to takie, w którym jedna z przekątnych t rombu zawiera się w osi Oy , a druga zawiera się w osi Ox .

rys. 7

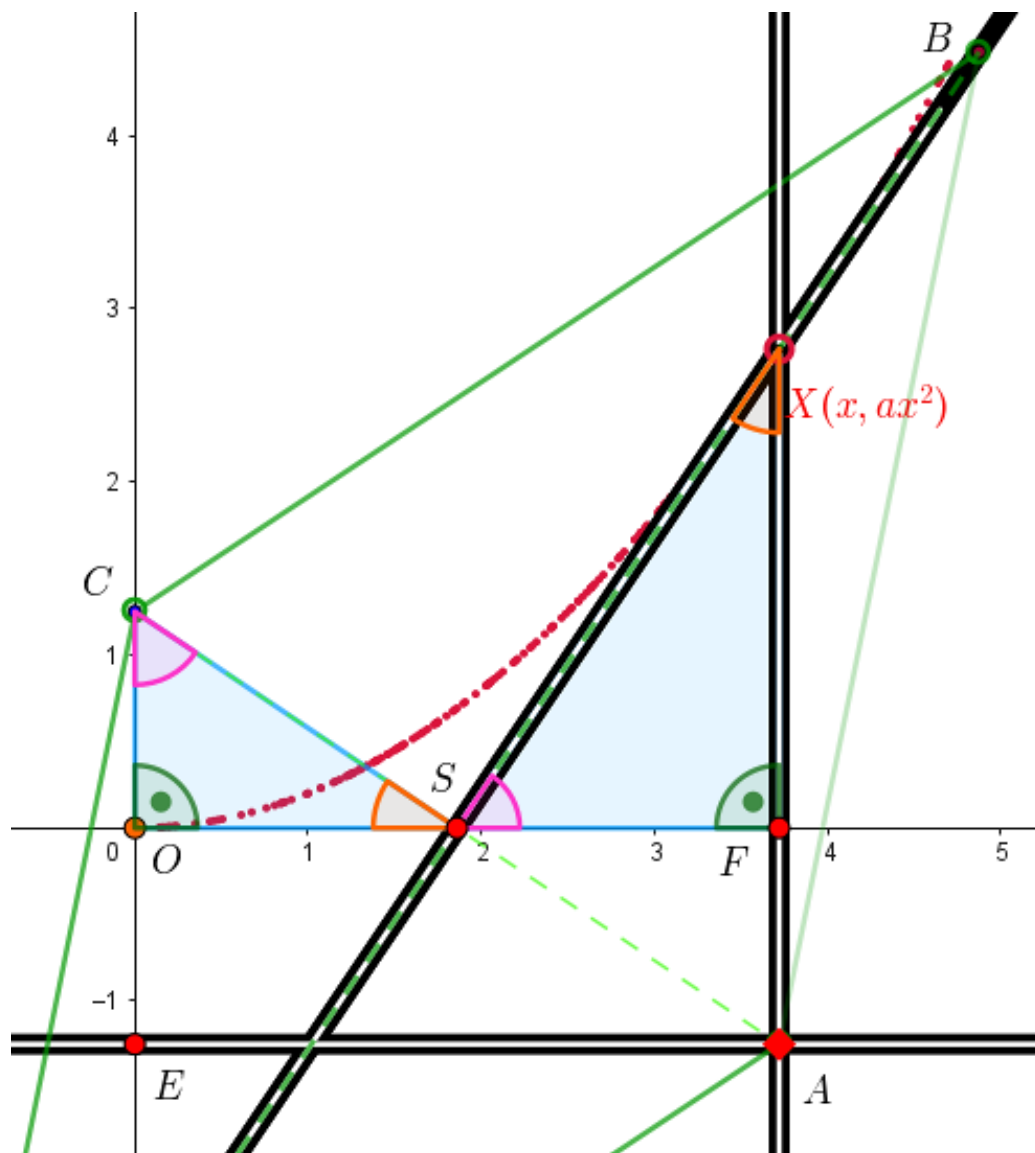
3. Przesuńmy punkt A wzdłuż prowadnicy, jak na rysunku poniżej.



rys. 8

Zauważmy, że wprowadzony w ruch parabolograf wykreślił w układzie współrzędnych fragment paraboli. Zaznaczmy wyraźnie, że po zmianie położenia punktu A długość odcinka $|AC| \neq t$. Natomiast $|CE| = t$.

4. Wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku poniżej.



rys. 9

Zauważmy, że trójkąty $\triangle OSC$ oraz $\triangle SFX$ są podobne, na mocy cechy $kqt - kqt - kqt$. Zachodzi więc proporcja:

$$\frac{|CO|}{|OS|} = \frac{|SF|}{|FX|}.$$

Niech $|OC| = \frac{1}{2}|CE| = \frac{1}{2}t$, $|OS| = \frac{1}{2}x = |SF|$, $|FX| = ax^2$. Podstawmy te wartości do powyższej proporcji. Otrzymujemy:

$$\frac{\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}x} = \frac{\frac{1}{2}x}{ax^2}.$$

Wyznamy z powyższej proporcji zmienną a . Mamy więc:

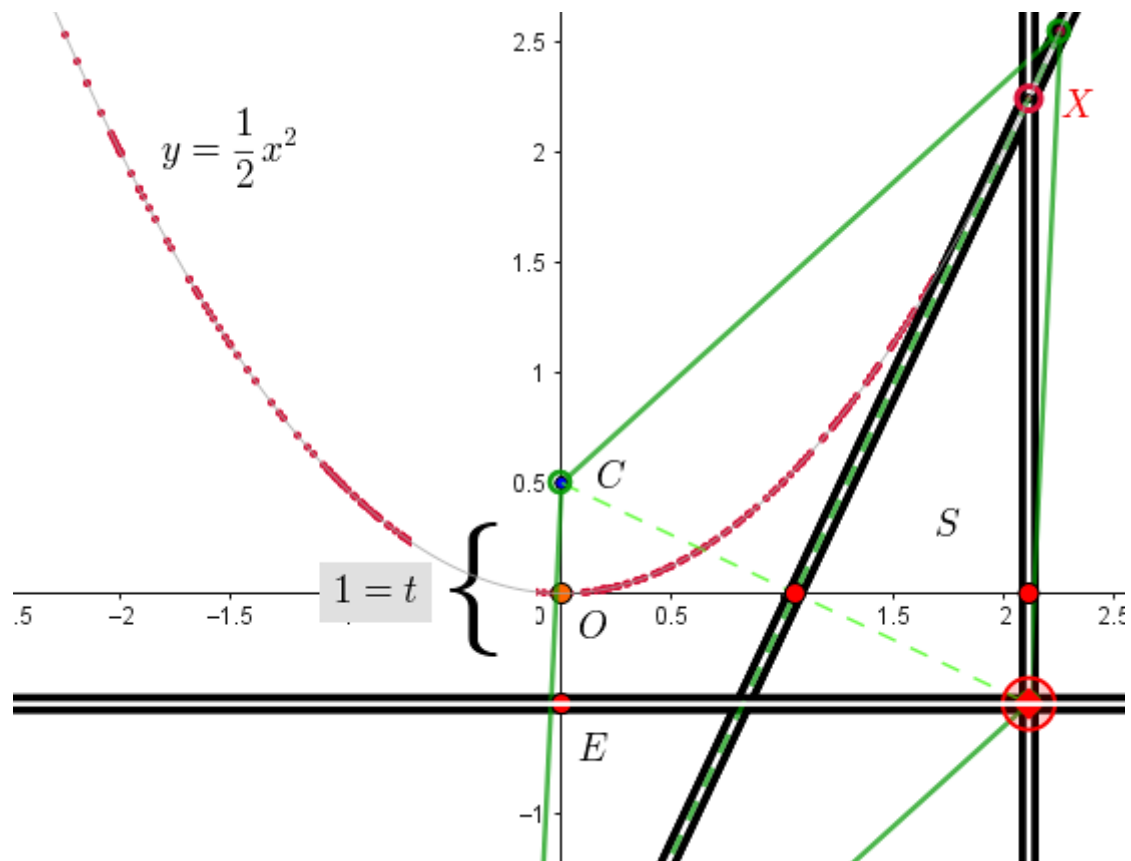
$$\frac{tax^2}{2} = \frac{1}{4}x^2,$$

zatem:

$$a = \frac{1}{2t}.$$

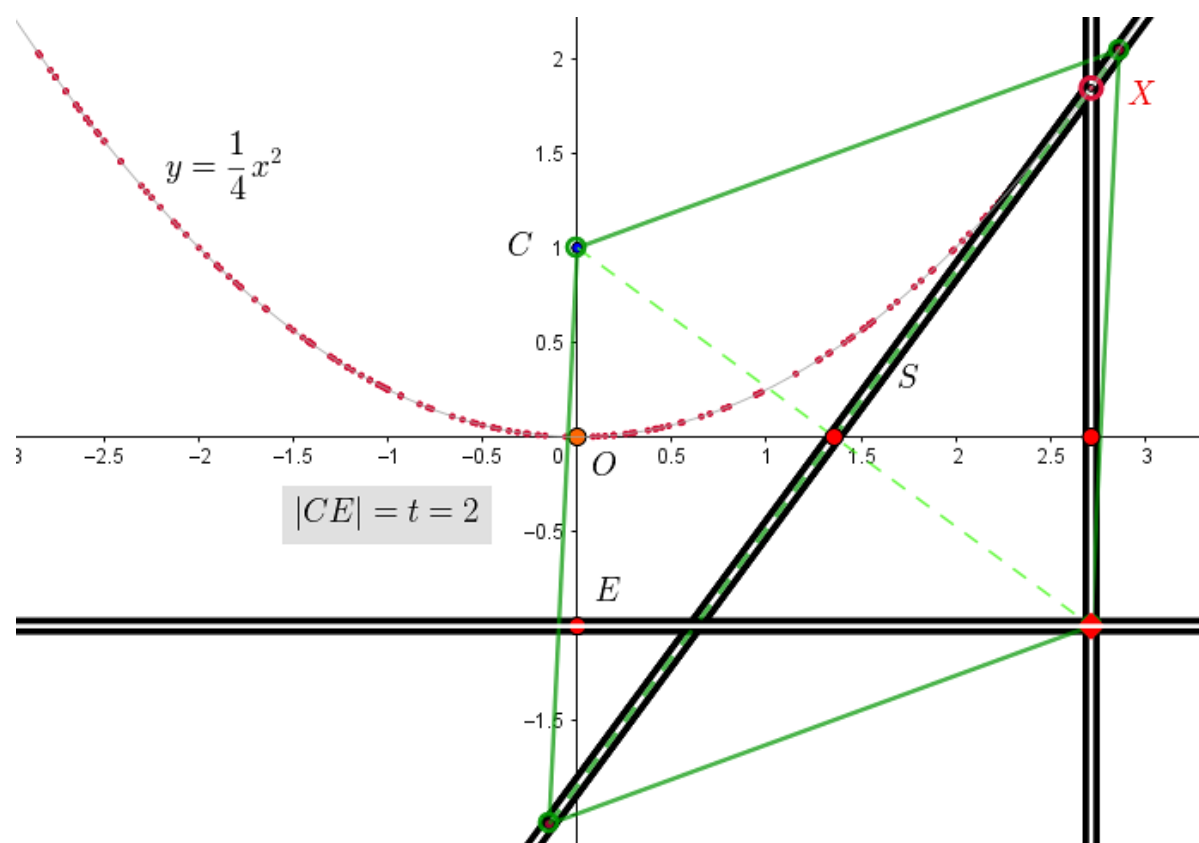
5. Podsumowując, współczynnik a paraboli o równaniu $y = ax^2, a \neq 0$ stanowi odwrotność podwojonego t . Aby wyrysować parabolę, której ramiona skierowane są w dół, wystarczy obrócić nasz mechanizm o 180° .
6. Aby dokładniej przyjrzeć się powyższej zależności posłużmy się przykładami.

a) Dla $t = 1$ mamy $a = \frac{1}{2}$. Czyli $y = \frac{1}{2}x^2$:



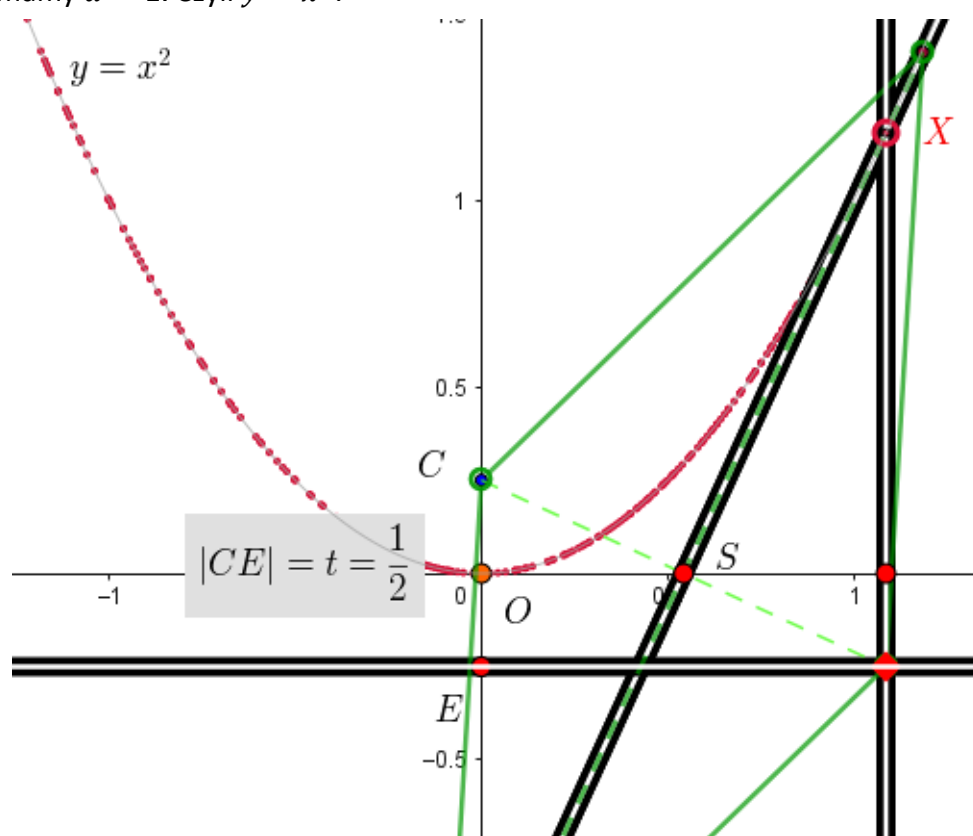
rys.10

b) Dla $t = 2$ mamy $a = \frac{1}{4}$. Czyli $y = \frac{1}{4}x^2$.



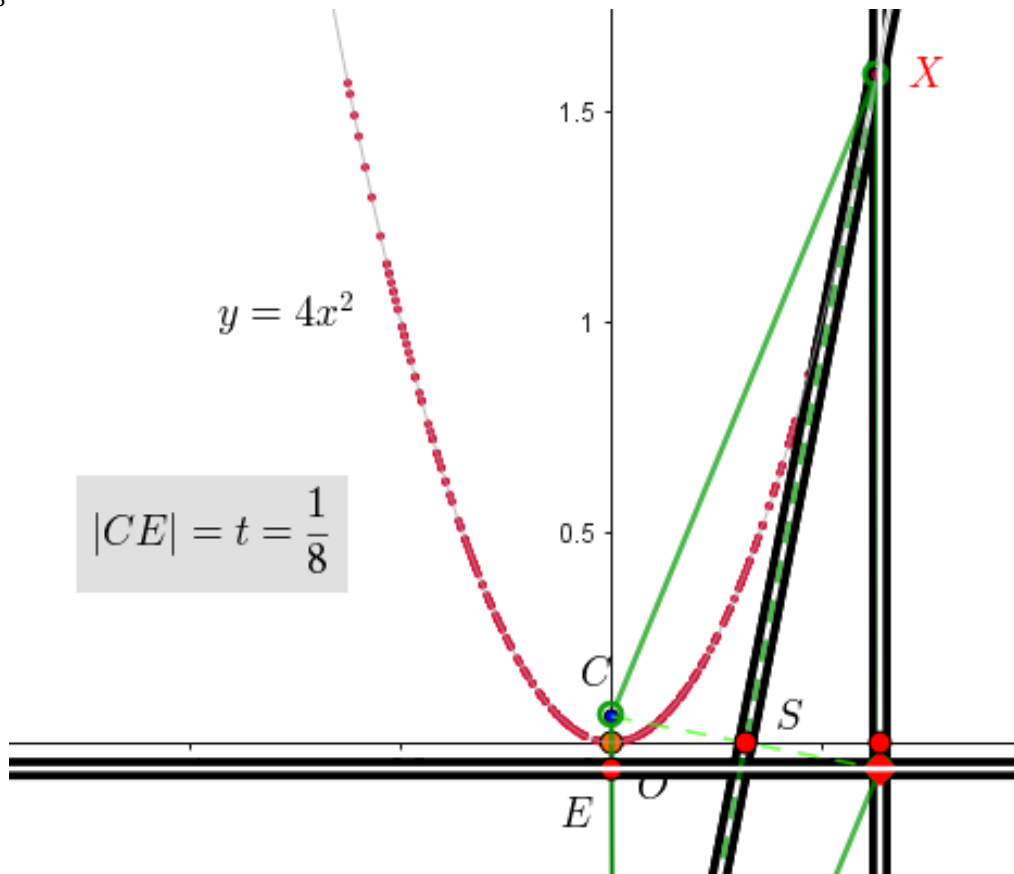
rys. 11

c) Dla $t = \frac{1}{2}$ mamy $a = 1$. Czyli $y = x^2$.



rys. 12

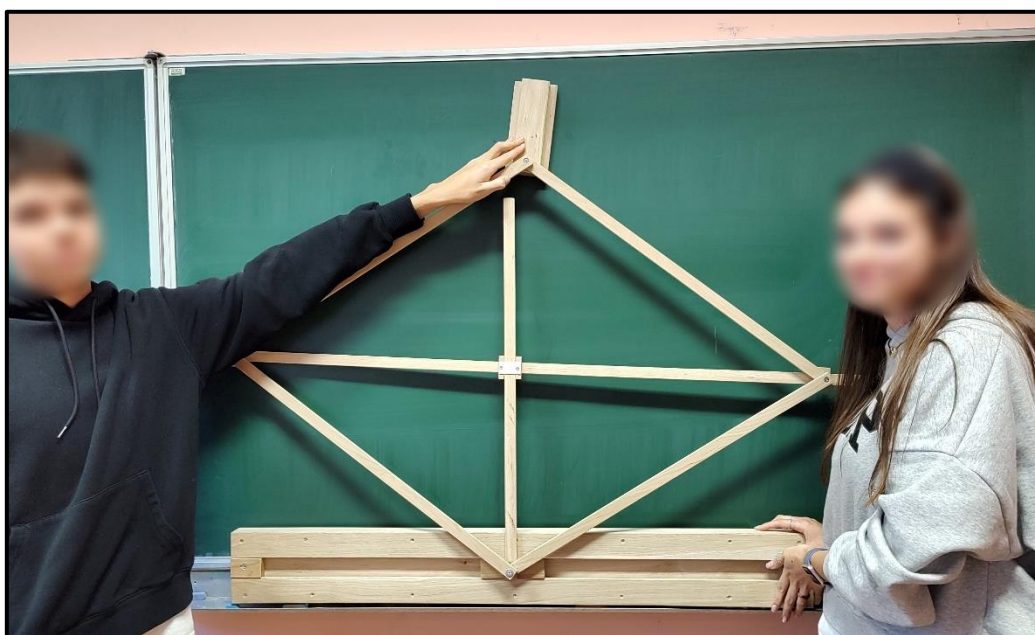
d) Dla $t = \frac{1}{8}$ mamy $a = 4$. Czyli $y = 4x^2$.



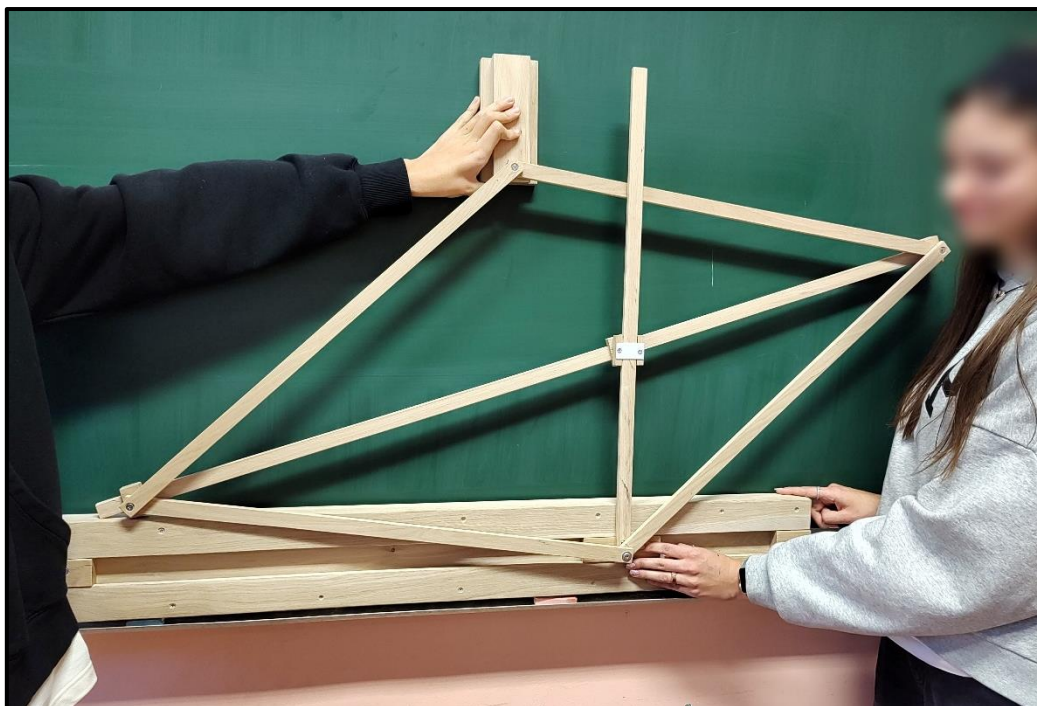
rys. 13

Zbudowanie urządzenia do kreślenia paraboli

Poniżej przedstawimy kilka zdjęć własnej pracy. W podsumowaniu podzielimy się wnioskami z jej realizacji.



rys. 14



rys. 15



rys. 16



rys. 17

PODSUMOWANIE

Zbudowanie urządzenia kreślącego parabolę, które może być pomocą dydaktyczną podczas lekcji matematyki, okazało się być sporym wyzwaniem. Początkowo nie byliśmy świadomi ile czasu, pomysłu i wytrwałości należy włożyć, aby tego dokonać. Im dłużej zajmowaliśmy się tym problemem, tym więcej dostrzegaliśmy niedogodności. Sam fakt, że w Internecie takiej pomocy kupić nie można, już o tym świadczy. Znaleźliśmy mnóstwo rysunków, schematów, animacji wykonanych w profesjonalnych programach, jednak wykonanie ich odpowiedników z drewna, czy metalu często było niemożliwe. Konstrukcje te były gotowe, nie było podanych wymiarów oraz etapów ich składania. Skorzystaliśmy z pomocy stolarza, z którym spędziliśmy dużo czasu, aby ten projekt wykonać. Finalnie urządzenie spełnia swoje zadanie, jednak jako pomoc dydaktyczna jest nieporęczne. Należy je traktować jako ciekawostkę. Mimo wszystko bardzo się cieszymy, że mogliśmy zrealizować tak interesujące zadanie. Inaczej teraz patrzymy na konstrukcje mechaniczne. Nabraliśmy więcej pokory w ich ocenie. Dodatkowo niesamowitym doświadczeniem było przejście ze świata matematycznego do rzeczywistego i z powrotem. Z innej perspektywy mogliśmy zobaczyć „królową nauk”.

BIBLIOGRAFIA

W niniejszej pracy korzystaliśmy z następujących źródeł:

1. <https://math-comp-educ.pl/mechanizmy-przegubowe/>
2. <https://home.agh.edu.pl/~zobmat/2024/lis/index.html>
3. <https://www.youtube.com/watch?v=zV8Ed1GgKJs>
4. https://www.fransvanschooten.nl/fvs_java.htm#parabolograaf
5. <https://etudes.ru/models/conic-sections-cavalieri-parabolograf/?ref=calso>
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Frans_van_Schooten

Opinia opiekuna

Julia Włoszek z klasy trzeciej i Piotr Włoszek z klasy drugiej są uczniami Liceum Ogólnokształcącego im. ks. Stanisława Konarskiego w Oświęcimiu. Nauczycielem matematyki Julii i Piotra jest mgr Paweł Pająk. Rodzeństwo sukcesywnie, co tydzień, od początku listopada brało udział w dodatkowych zajęciach, znacznie poszerzając swoją wiedzę z zakresu geometrii, algebry oraz trygonometrii. Byli otwarci na nowe propozycje, nie zniechęcali się, doczytywali różne wykłady, czy skrypty dotyczące teorii mechanizmów przegubowych. Dali się poznać również jako zgrany i ambitny zespół, z wielkim potencjałem matematycznym. Treści zawarte w niniejszej pracy wykraczają poza podstawę programową w liceum. Z pomocą opiekuna uczniowie edytowali tekst matematyczny oraz uczyli się wykonywania rysunków w programie GeoGebra. Po za szkołą poświęcali ogrom czasu na zbudowanie z drewna własnego parabolografu. Julia i Piotr włożyli dużo wysiłku i serca w stworzenie tej pracy. Skrupulatnie analizowali treści w niej zawarte opierając się na pomocach ujętych w bibliografii. Praca z Nimi sprawiała mnie, jako nauczycielowi, wiele radości i satysfakcji.

Paweł Pająk