

**XX Liceum Ogólnokształcące im. Leopolda Staffa
w Krakowie**

Grzegorz Lis

Nietypowe transformacje geometryczne

**Małopolski konkurs prac matematycznych
Kraków 2025**

Opiekun pracy
dr Bronisław Pabich

Spis treści

1	Wprowadzenie.....	2
2	„Nakładanie”	3
3	Inwersje	9
3.1	Czym jest inwersja	9
3.2	Modyfikacja inwersji.....	10
3.3	Inwersja względem elipsy	10
3.4	Inwersja względem trójkąta	12
3.5	Inwersja względem kwadratu.....	13
3.6	Inwersja względem sześciokąta.....	14
4	Obrót eliptyczny.....	15
4.1	Standardowy obrót eliptyczny.....	15
4.2	Inny obrót eliptyczny	17
5	„Spiralizacja”	19
	Podziękowanie	21
	Bibliografia.....	21

1 Wprowadzenie

Celem niniejszej pracy jest zgłębienie i przedstawienie pomysłów autora na nietypowe transformacje geometryczne na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, od strony analizy matematycznej.

Dowiemy się jak wykreślić sinusoidę dosłownie na innej sinusoidzie i jak rozszerzyć pojęcie inwersji geometrycznej, oraz co można rozumieć poprzez "obrót eliptyczny".

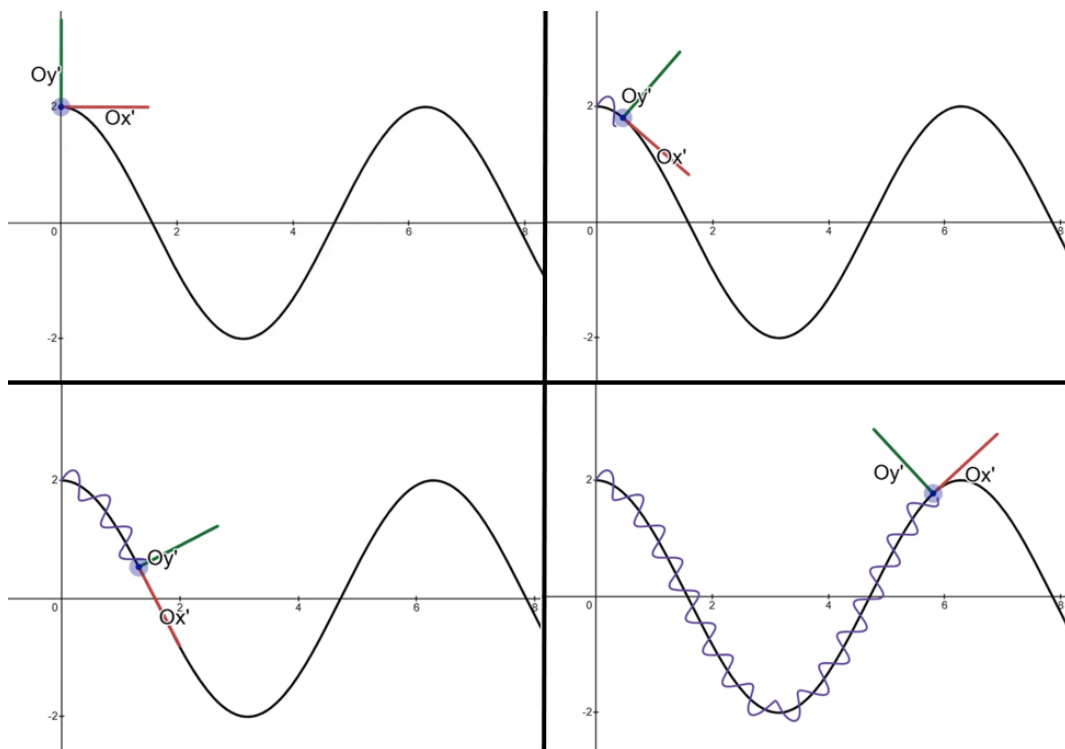
Ponadto zobaczymy sinusoidę płynnie przechodzącą w spiralę, oraz wiele innych krzywych i kształtów podlegających transformacji "spiralizacji".

Wszystkie obiekty geometryczne omówione w pracy zostały wykonane przez autora pracy w programach dynamicznych GeoGebra oraz Desmos. Obrazy tych obiektów w pracy są zrzutami ekranu tych programów.

2 „Nakładanie”

Aby wprowadzić pojęcie transformacji „nakładania”, wprowadźmy pewną krzywą M i funkcję $f(x)$.

Transformacja „nakładania” polega na umieszczeniu lokalnego układu współrzędnych, na początku wybranej krzywej M (np. półokręgu) i przemieszczaniu go wzdłuż tej krzywej tak aby Ox był styczną do tej krzywej w tym punkcie, a Oy prostopadła do niej o orientacji dodatniej. Argumentem tworzonej funkcji staje się wówczas długość łuku przebytego przez ten punkt od jego początku, a wartością funkcji wartość funkcji $f(x)$.



rys 1 – proces umieszczania lokalnego układu współrzędnych na wybranej krzywej

Wzory na tą transformację otrzymałem w następujący sposób:

Dla krzywej M zdefiniowanej parametrycznie w następujący sposób: $M: \begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases}$

$$\text{Długość krzywej } M: L(s) = \int_0^s \sqrt{\left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1(t)}{dt}\right)^2} dt$$

$$\text{Styczna w punkcie } (x_1(t), y_1(t)): k: y = \frac{\frac{dy_1(t)}{dt}}{\frac{dx_1(t)}{dt}} (x - x_1(t)) + y_1(t)$$

Zatem prostopadła będzie wyrażona jako: $p: y = -\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{\frac{dy_1(t)}{dt}}(x - x_1(t)) + y_1(t)$

Funkcja nałożona będzie postaci: $\begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$

Wtedy współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej do stycznej:

$$-\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{\frac{dy_1(t)}{dt}} = \frac{y_2(t) - y_1(t)}{x_2(t) - x_1(t)}$$

$$y_2(t) - y_1(t) = -\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{\frac{dy_1(t)}{dt}}(x_2(t) - x_1(t)) \quad \wedge \quad x_2(t) - x_1(t) = -\frac{\frac{dy_1(t)}{dt}}{\frac{dx_1(t)}{dt}}(y_2(t) - y_1(t))$$

Z tw. Pitagorasa: $f(L(t)) = \sqrt{(x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2}$

Po podstawieniu: $f(L(t)) = \sqrt{(x_2(t) - x_1(t))^2 \left(1 + \left(\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{\frac{dy_1(t)}{dt}}\right)^2\right)}$

$$f(L(t)) = (x_2(t) - x_1(t)) \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{\frac{dy_1(t)}{dt}}\right)^2}$$

$$x_2(t) = \frac{f(L(t))}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dx_1(t)}{dt}}{\frac{dy_1(t)}{dt}}\right)^2}} + x_1(t)$$

$$f(L(t)) = (y_2(t) - y_1(t)) \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dy_1(t)}{dt}}{\frac{dx_1(t)}{dt}}\right)^2}$$

$$y_2(t) = \frac{f(L(t))}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dy_1(t)}{dt}}{\frac{dx_1(t)}{dt}}\right)^2}} + y_1(t)$$

Ze względu na utraconą przez podniesienie do kwadratu informacje o znaku współczynnika kierunkowego należy przemnożyć otrzymane wzory przez odpowiednią korektę, a wtedy otrzymujemy finalnie:

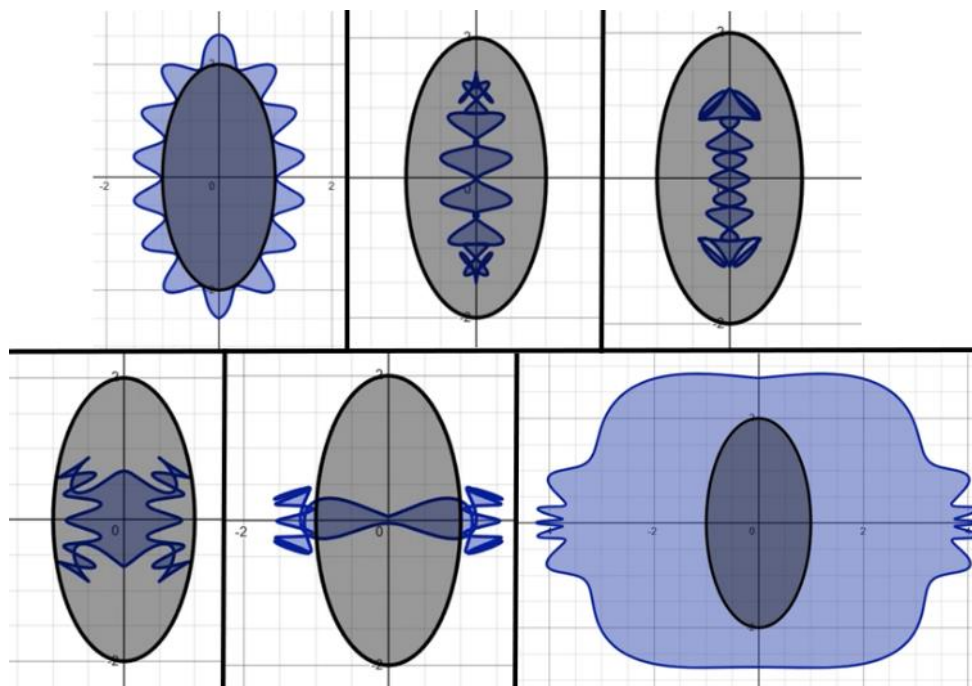
$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(t) = \frac{-\operatorname{sign}\left(\frac{dx_1(t)}{dy_1(t)}\right) \frac{|y_1(t)|}{y_1(t)} f(L(t))}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx_1(t)}{dy_1(t)}\right)^2}} + x_1(t) \\ y_2(t) = \frac{\frac{|y_1(t)|}{y_1(t)} f(L(t))}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx_1(t)}{dy_1(t)}\right)^2}} + y_1(t) \end{array} \right.$$

Ponieważ wzory na funkcję nałożoną są wyrażone w postaci parametrycznej tak samo jak wzory na krzywą na której funkcję tą nakładaliśmy, proces ten można iterować. Ciekawym pomysłem z tego wynikającym jest tworzenie w ten sposób fraktali, jednakże przez ograniczenia software'owe nie byłem w stanie zgłębić tego pomysłu.

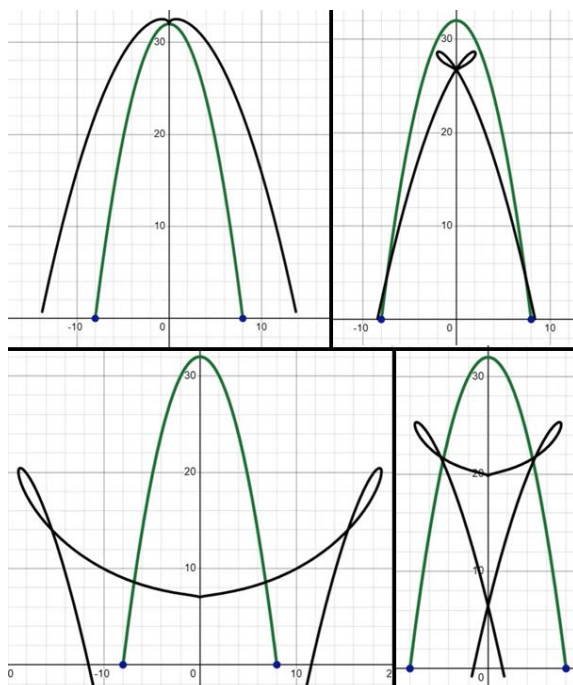
Ciekawą modyfikacją jest dodanie wybranego odsunięcia do nakładanej funkcji, tak jak poniżej:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(t) = \frac{-\operatorname{sign}\left(\frac{dx_1(t)}{dy_1(t)}\right) \frac{|y_1(t)|}{y_1(t)} (f(L(t)) + c)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx_1(t)}{dy_1(t)}\right)^2}} + x_1(t) \\ y_2(t) = \frac{\frac{|y_1(t)|}{y_1(t)} (f(L(t)) + c)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx_1(t)}{dy_1(t)}\right)^2}} + y_1(t) \end{array} \right.$$

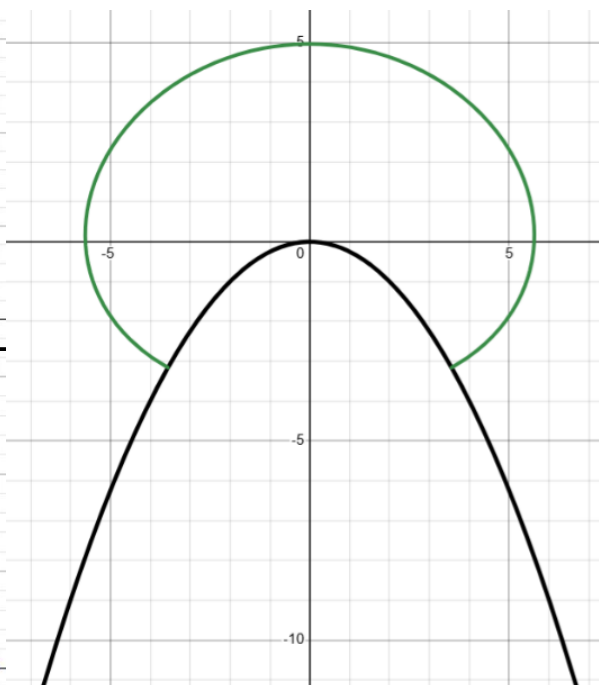
Zmieniając dynamicznie wartość tego odsunięcia można otrzymać ciekawe rezultaty, jak można zobaczyć na kolażach poniżej.



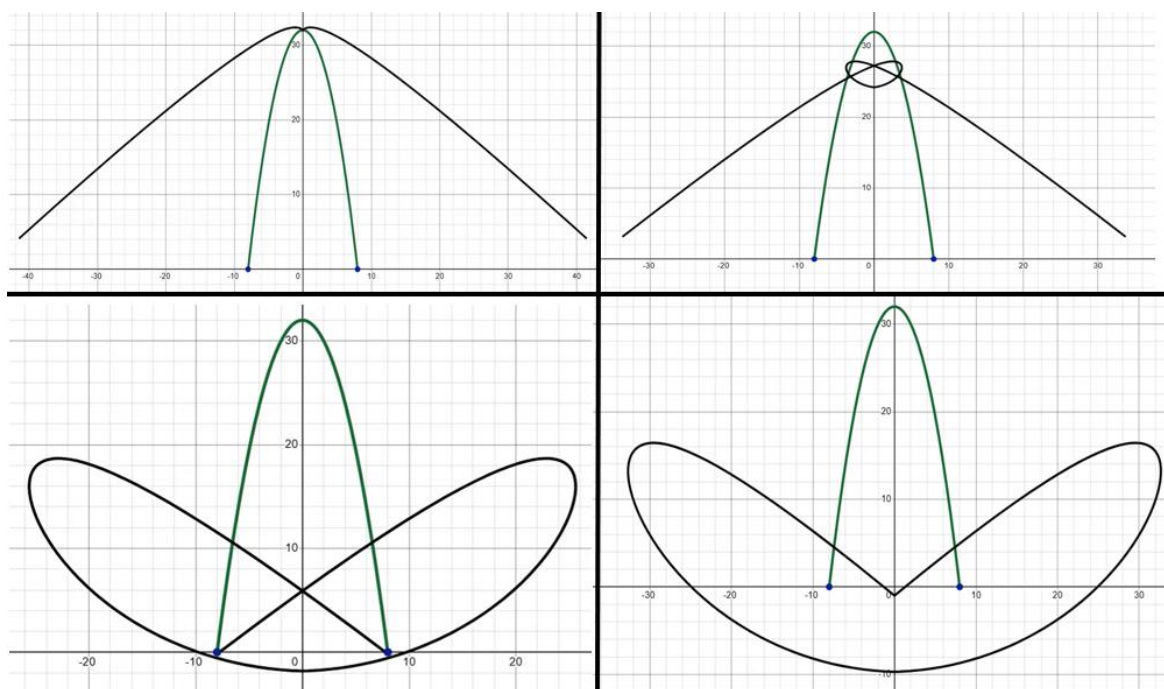
rys 2 – sinusoida nałożona z różnymi odsunięciami na elipsę



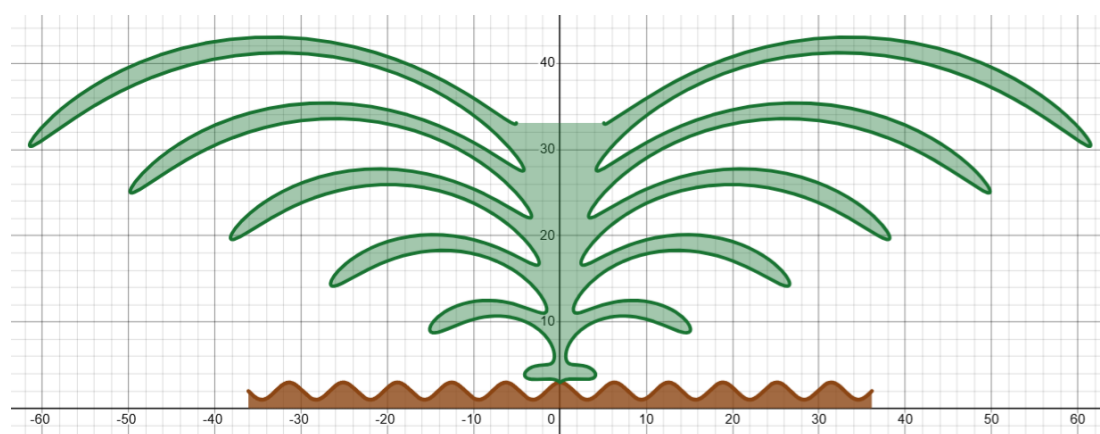
rys 3 – pierwiastek nałożony z różnymi odsunięciami na parabolę



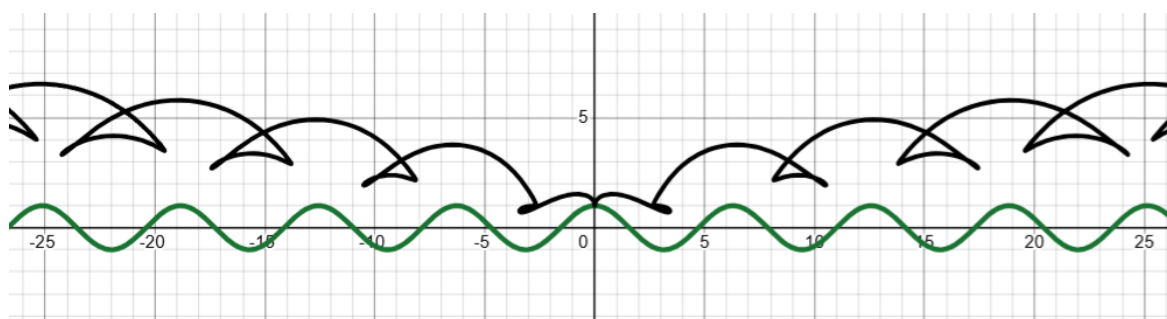
rys 4 – półokrąg nałożony na parabolę



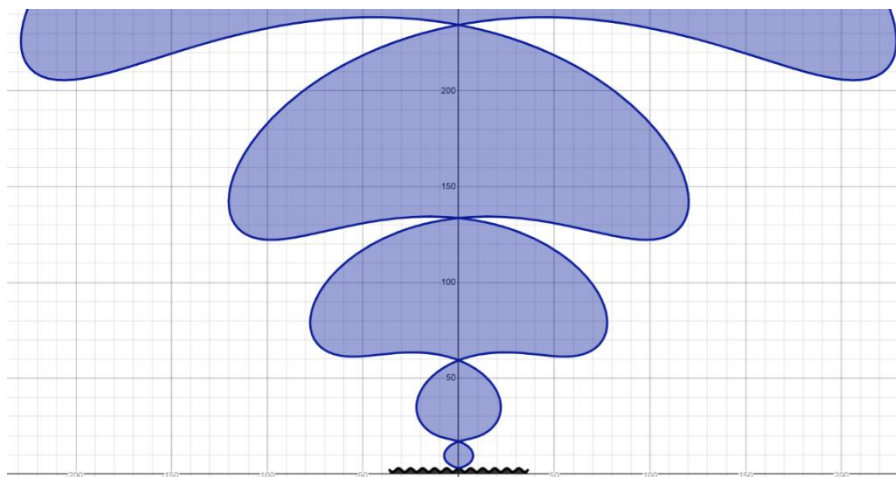
rys 5 – moduł z x nałożony z różnymi odsunięciami na parabolę



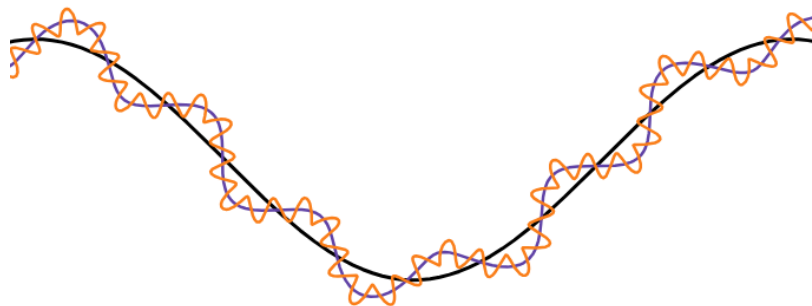
rys 6 - moduł z x nałożony na sinusoidę



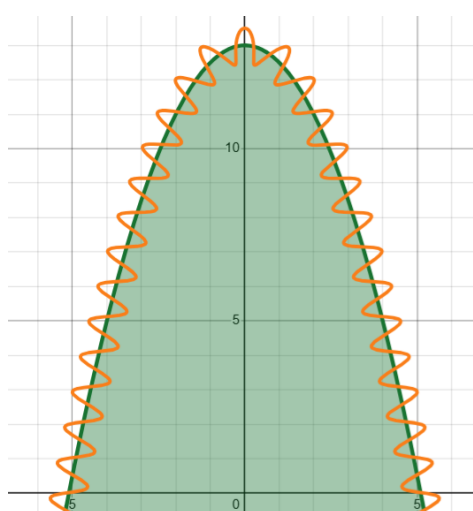
rys 7 – pierwiastek z x nałożony na sinusoidę



rys 8 – parabola nałożona na sinusoidę



rys 9 - największa ilość iteracji jaką udało mi się uzyskać.



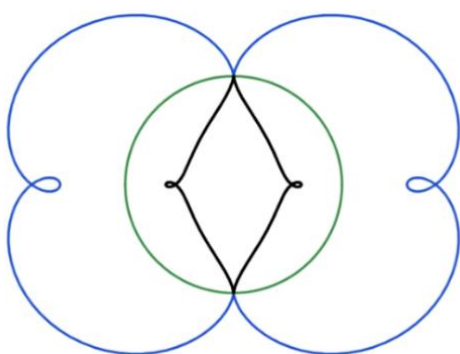
rys 10 - Światelka sinusoidalne nałożone na choinkę paraboliczną

3 Inwersje

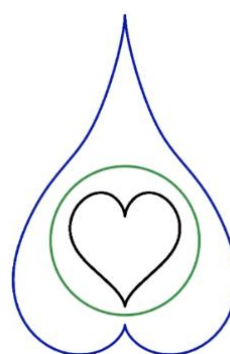
3.1 Czym jest inwersja

Trudno pojąć na czym polega niestandardowość danej inwersji nie wiedząc jak wygląda standardowa, dlatego omówię najpierw po krótku zwykłą inwersję.

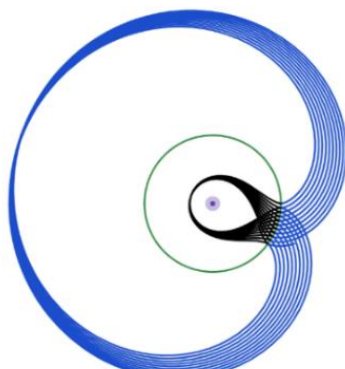
Standardowa inwersja zachodzi względem okręgu zwanego inwersyjnym i jest to przekształcenie zamieniające punkty wewnętrzne okręgu inwersyjnego $o(S,r)$ na zewnętrzne i na odwrót, w taki sposób, że dla każdego punktu P płaszczyzny $|SP||SP'| = r^2$, gdzie S to środek okręgu, a P to punkt podlegający inwersji na P' leżący zarazem na półprostej SP . Jak można wywnioskować z tego równania relacja między odległością do środka punktu P i P' jest odwrotna (inwersja jest inwolucją), co można zobaczyć na zdjęciach poniżej.



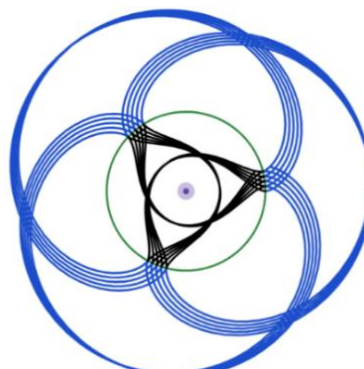
rys 11



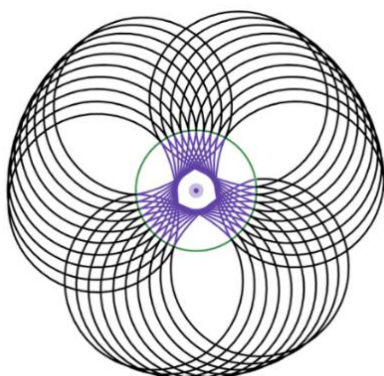
rys 12



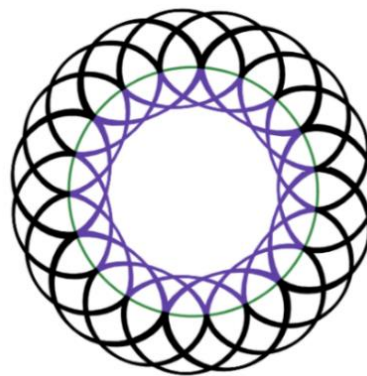
rys 13



rys 14



rys 15



rys 16

3.2 Modyfikacja inwersji

Niestandardową inwersję można otrzymać na kilka sposobów np. zmieniając jej definicję na $|SP||SP'| = r^3$, aczkolwiek jest to randomowe i zmienia jedynie rozmiar otrzymanego kształtu. Inną możliwością jest zmienienie kształtu względem, którego zachodzi inwersja. Do tego celu potrzebna jest znajomość środka tego kształtu i odległości do jego brzegu, a w związku z tym dla uniknięcia problematycznych sytuacji, kształt ten powinien być wypukły. Środek wypukłego kształtu możemy wyznaczyć z minimum globalnego funkcji sumującej odległości do każdego punktu na brzegu danego kształtu w zależności od położenia w układzie x, y . Do tego celu należy zastosować pochodne cząstkowe, gdyż funkcja ta jest dana wzorem:

$$d(x, y) = \int_0^z \sqrt{(x - x(t))^2 + (y - y(t))^2} dt$$

Następnie znając punkt S i P należy wyznaczyć punkt Q , czyli przecięcie półprostej SP z brzegiem danego kształtu, aby poznać stosunek odległości $\frac{PQ}{SQ}$.

W tym celu należy wyznaczyć wartość parametru m z równania: $\frac{y_p - y_s}{x_p - x_s} x(m) - y(m) = \frac{y_p - y_s}{x_p - x_s} x_p - y_p$ otrzymanego z równania prostej zawierającej półprostą $\overrightarrow{SP}$, w którym $x(m)$ i $y(m)$ są dowolnymi funkcjami ciągłymi tworzącymi równanie parametryczne krzywej będącej brzegiem danego kształtu i których wartości dla wyliczonego parametru m stanowią współrzędne punktu Q . Jednakże w tak uogólnionej postaci problem ten okazał się dla mnie nierozwiązywalny.

3.3 Inwersja względem elipsy

Ze względu na napotkany problem przy próbie wyprowadzenia wzorów na inwersję względem dowolnej wypukłej krzywej, ograniczyłem się do wyliczenia wzorów tylko dla kilku popularnych kształtów, zaczynając od elipsy danej równaniem parametrycznym:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{b} \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$$

w następujący sposób:

$$a x(m) - y(m) - a x_s + y_s = 0 \quad \text{gdzie } a = \frac{y_p - y_s}{x_p - x_s}$$

Dla uproszczenia obliczeń możemy dokonać translacji rozpatrywanej elipsy o środku S o wektor $r = [-x_s, -y_s]$, a wtedy do rozwiązania mamy $a x(m) - y(m) = 0$

Następnie podstawiamy i rozwiązujemy dla parametru m .

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cos(m) - b \sin(m) &= 0 \quad / \cdot \frac{1}{b \cos(m)} \\ \frac{a}{b^2} - \tan(m) &= 0 \quad \therefore m = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b^2}\right) \end{aligned}$$

Problem niepełnej dziedziny tangensa odwrotnego rozwiązujemy poprzez przemnożenie otrzymanego wyniku przez $p = \frac{|x_p - x_s|}{x_p - x_s}$ co pozwala nam ustalić, w której połowce (lewej czy prawej) znajduje się punkt P.

Otrzymujemy wtedy $Q = (p x(m), p y(m))$, a po uwzględnieniu translacji początkowej i jej przeciwnej otrzymujemy:

$$Q = (p(x(m) - x_s) + x_s, p(y(m) - y_s))$$

Po zmodyfikowaniu definicji inwersji z $|SP||SP'| = r^2$ na $|SP||SP'| = d^2$, gdzie d jest odległością od środka do krawędzi kształtu względem którego zachodzi inwersja, oraz wiedząc, że punkty S, P, Q, P' są współliniowe możemy otrzymać współrzędne punktu P' w następujący sposób:

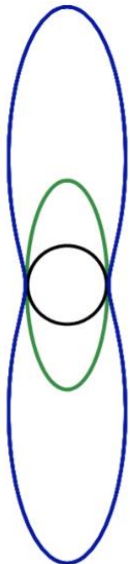
$$x_q^2 = x_p \cdot x_{p'} \quad x_{p'} = \frac{x_q^2}{x_p} \quad y_{p'} = \frac{y_p}{x_p} \cdot \frac{x_q^2}{x_p} = \frac{y_p x_q^2}{x_p^2}$$

Po uwzględnieniu translacji początkowej o wektor $\vec{v} = [-x_s, -y_s]$ i translacji końcowej przywracającej punkt S na swoje miejsce otrzymujemy:

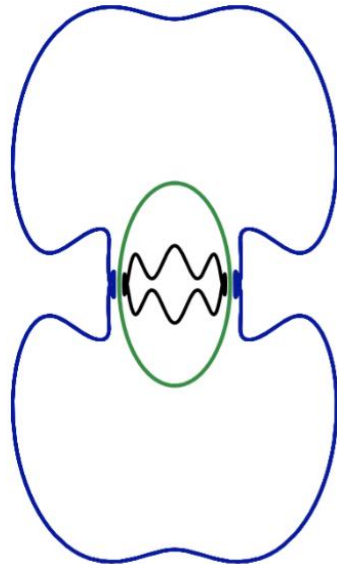
$$\begin{cases} x_{p'} = \frac{(x_q - x_s)^2}{x_p - x_s} + x_s \\ y_{p'} = a \left(\frac{(x_q - x_s)^2}{x_p - x_s} - x_s \right) + y_s \end{cases}$$

Gdzie a i x_q zostały wcześniej wyliczone.

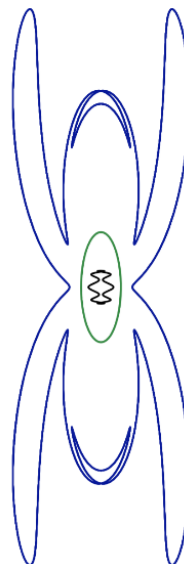
Zachowanie takiej inwersji można zobaczyć na zdjęciach poniżej.



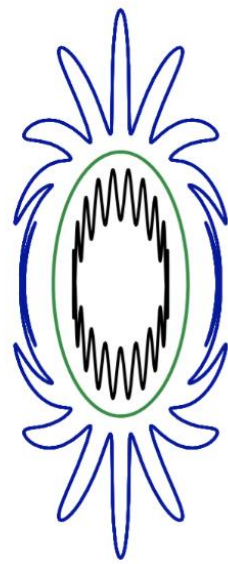
rys 17



rys 18



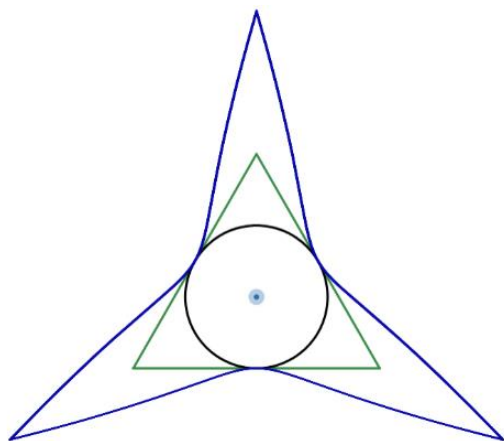
rys 19



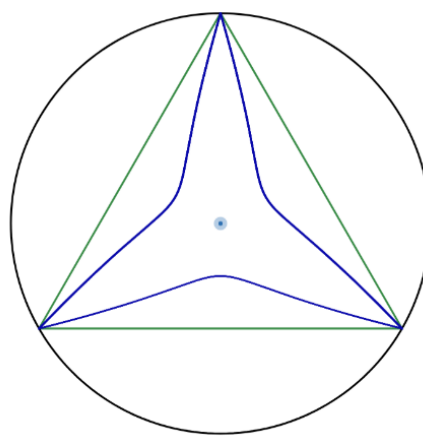
rys 20

3.4 Inwersja względem trójkąta

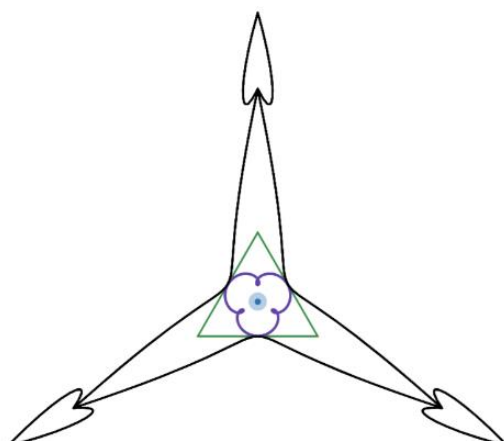
Dla inwersji względem trójkąta obliczenia są bardzo podobne a nawet prostsze, natomiast jeśli tworzymy ten trójkąt z trzech ograniczonych prostych, to musimy wyliczyć współrzędne punktu Q osobno dla każdej ze ścianek.



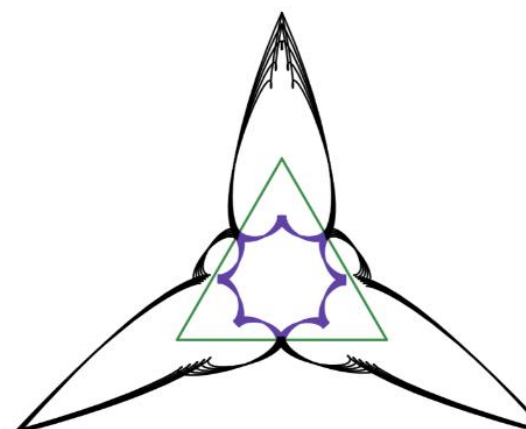
rys 21



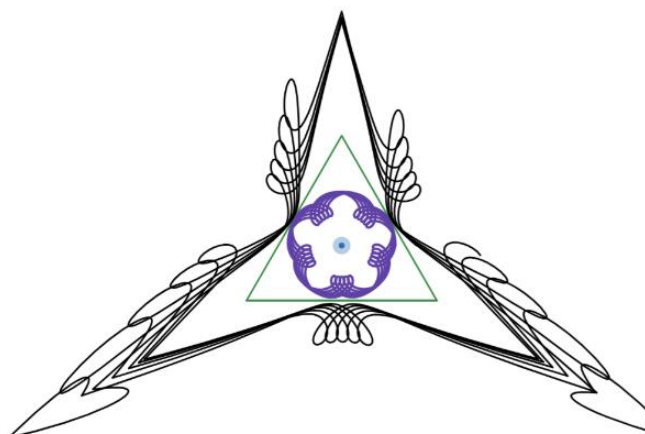
rys 22



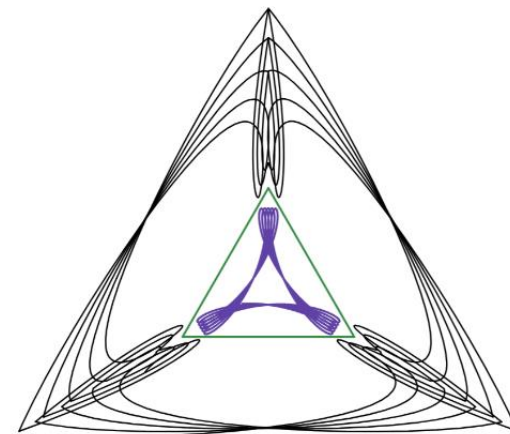
rys 23



rys 24



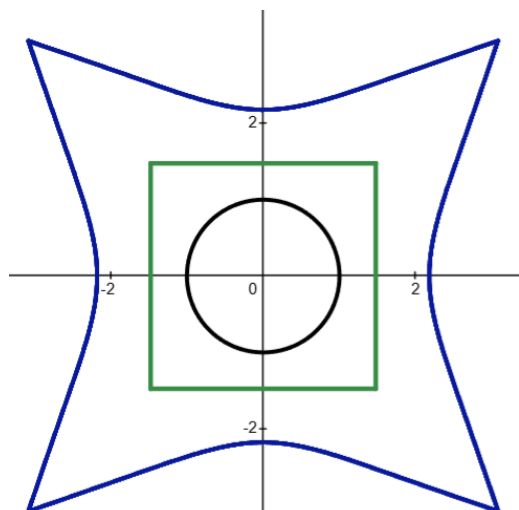
rys 25



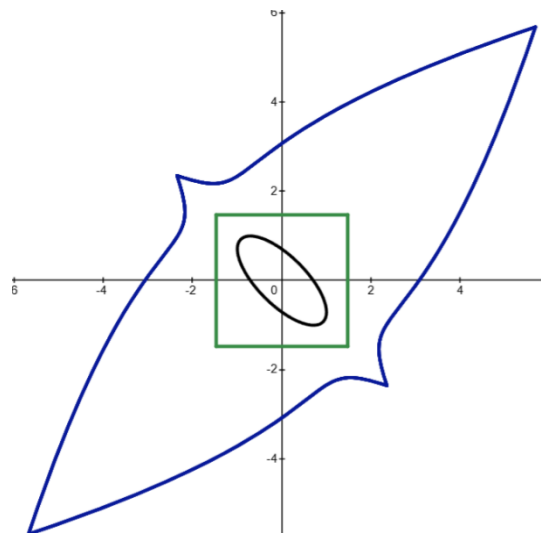
rys 26

3.5 Inwersja względem kwadratu

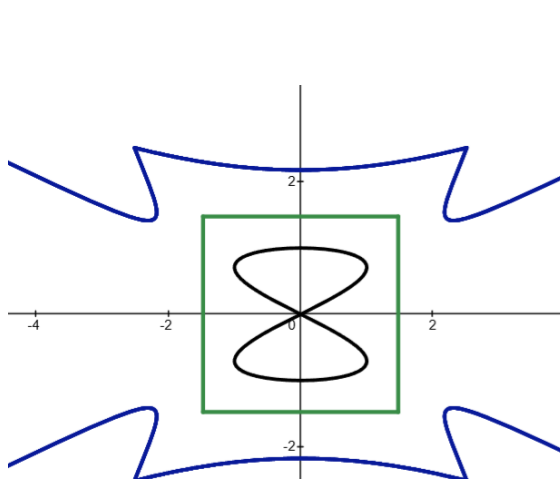
Postępując analogicznie otrzymujemy wzory na inwersję względem kwadratu, której kilka przykładów można zobaczyć na zdjęciach poniżej.



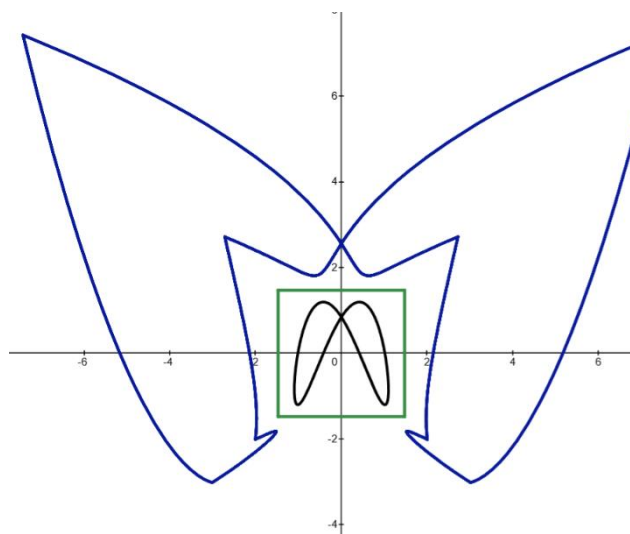
rys 27



rys 28



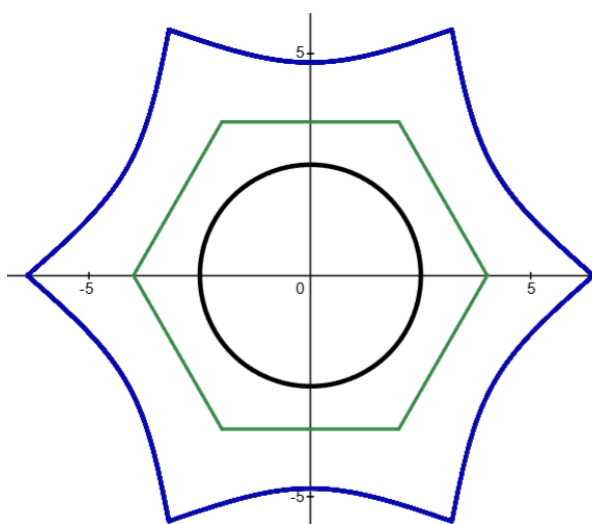
rys 29



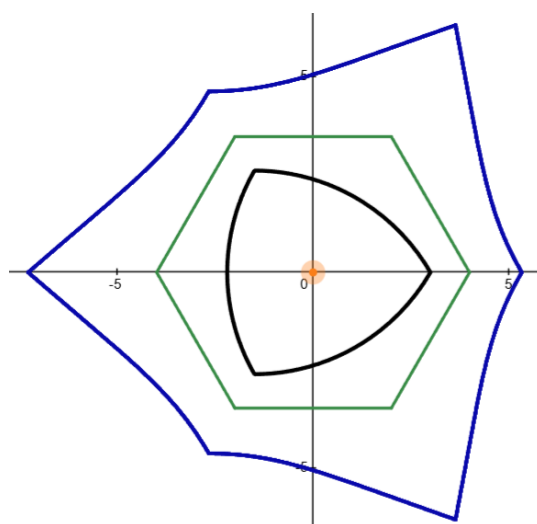
rys 30

3.6 Inwersja względem sześciokąta

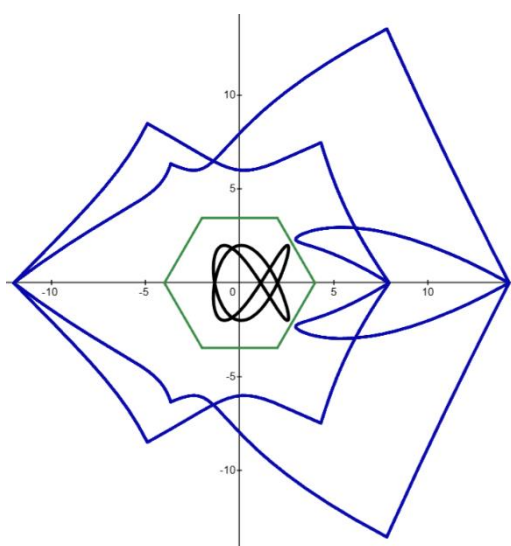
Postępując analogicznie otrzymujemy wzory na inwersje względem sześciokąta, której kilka przykładów zamieściłem poniżej.



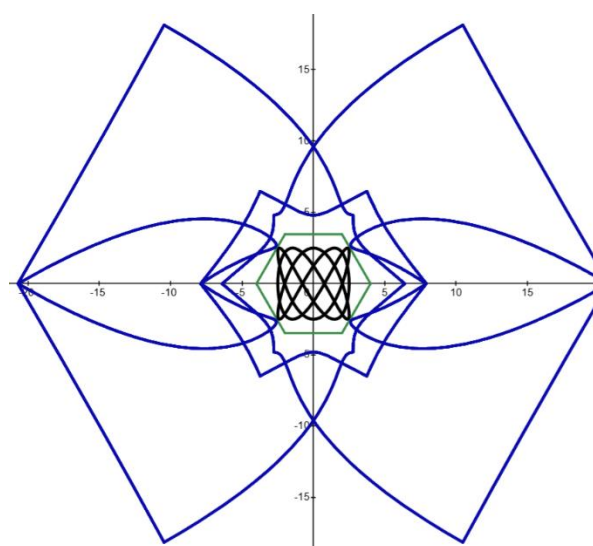
rys 31



rys 32



rys 33

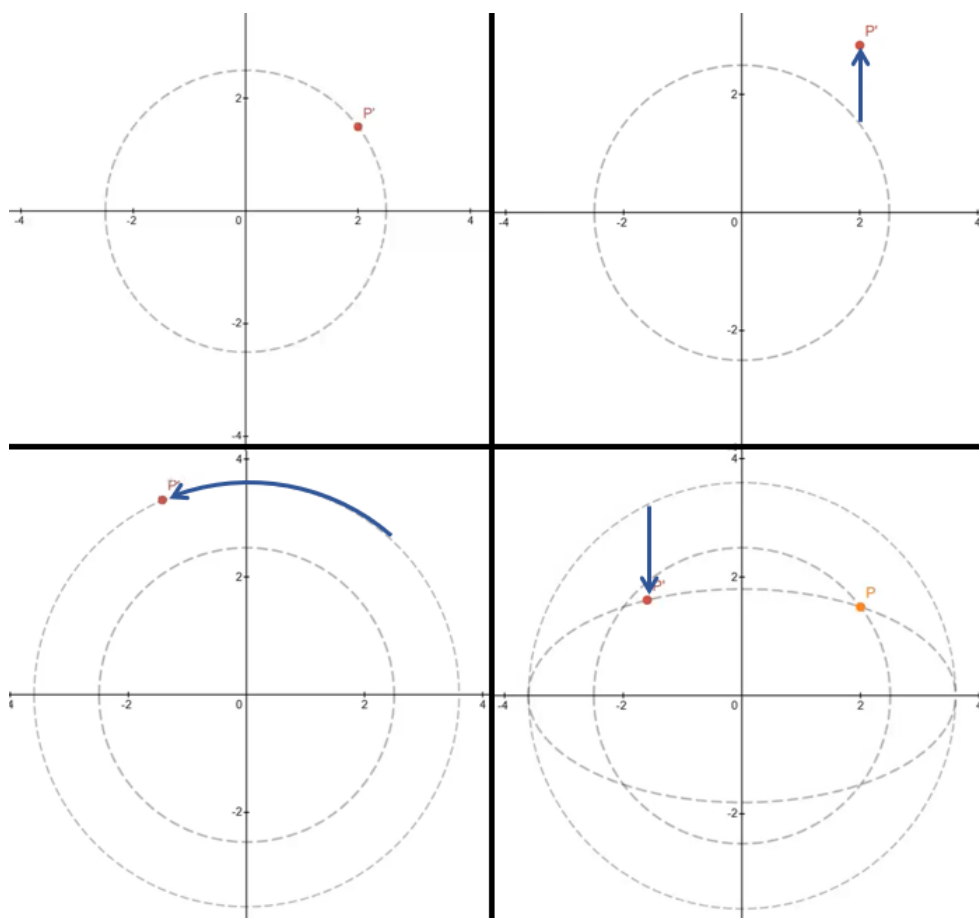


rys 34

4 Obrót eliptyczny

4.1 Standardowy obrót eliptyczny

W książce pt. „Przekształcenia geometryczne” z 1967r. [1] P.S. Modienow, A.S. Parchomienko definiują obrót eliptyczny jako złożenie kolejno powinowactwo prostokątnego, obrotu i powinowactwa prostokątnego o odwrotnej skali do początkowego, tak jak to widać w czterech etapach na zdjęciu poniżej.

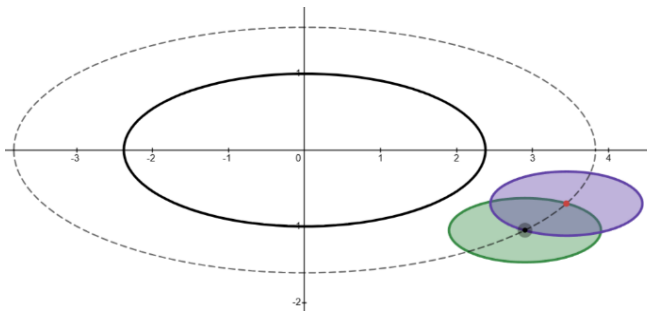


rys 35

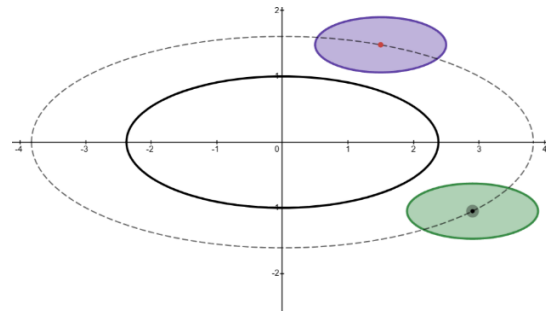
Obrót eliptyczny wyraża się wzorem:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - ky \sin \alpha \\ y' = \frac{1}{k} x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

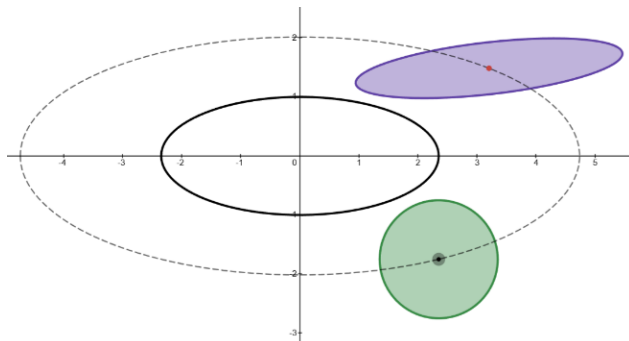
A jego efekty można zaobserwować na zdjęciach na następnej stronie.



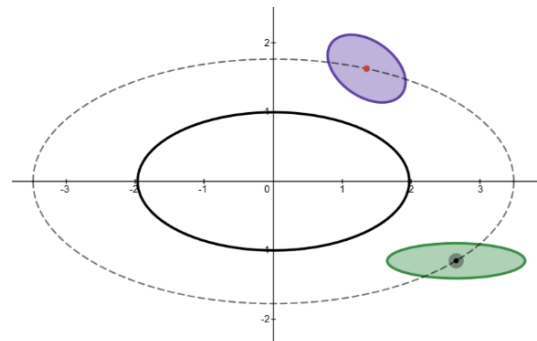
rys 36 – obrót eliptyczny elipsy o tej samej ekscentryczności



rys 37



rys 38- obrót eliptyczny okręgu



rys 39 – obrót eliptyczny elipsy o różnej ekscentryczności

Co ciekawe, elipsa o stosunku swoich osi równym skali obrotu eliptycznego, obracana względem swojego środka, przechodzi po obrocie eliptycznym w samą siebie, niezależnie od kąta owego obrotu. Okręgi natomiast przechodzą w elipsy, zatem jak widać, tak zdefiniowany obrót eliptyczny z pewnością ma liczne powiązania z elipsami, aczkolwiek fundamentalnie obrót nadal zachodzi wokół okręgu, co tworzy pewne nieintuicyjne rezultaty, np. punkty są obracane o różne kąty względem środka elipsy.

4.2 Inny obrót eliptyczny

Nie usatysfakcjonowany definicją obrotu eliptycznego podaną przez Modienowa i Parchomienko w książce pt. „Przekształcenia geometryczne” z 1967r. wymyśliłem swoją wersję, czym obrót eliptyczny powinien być.

W definicji podanej przez Modienowa i Parchomienko mamy do czynienia z imitacją obrotu względem elipsy, gdyż opiera się on fundamentalnie na obrocie względem zwykłego okręgu, przez co punkty figury po obrocie pokonują różne kąty licząc względem elipsy. W mojej wersji natomiast kąty te są takie same, gdyż tak też jest podczas zwykłego obrotu. Dodatkowo podczas zwykłego obrotu każdy punkt porusza się po swoim okręgu, którego promień jest stały, jednakże w wersji M. i P. tak się nie dzieje, co stanowi kolejną różnicę względem mojej wersji, w której każdy punkt porusza się po swojej elipsie o stałej wielkości i tej samej ekscentryczności co elipsa, względem której zachodzi obrót.

Wzory na moją wersję obrotu eliptycznego otrzymałem w następujący sposób:

$$P = (x, y), \quad P' = (x', y'), \quad \theta$$

$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \beta = \alpha + \theta \quad \frac{y'}{x'} = tg \beta$$

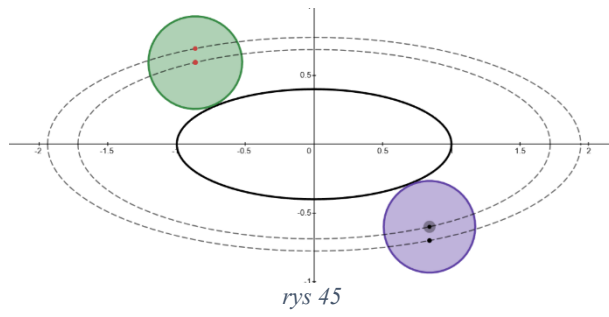
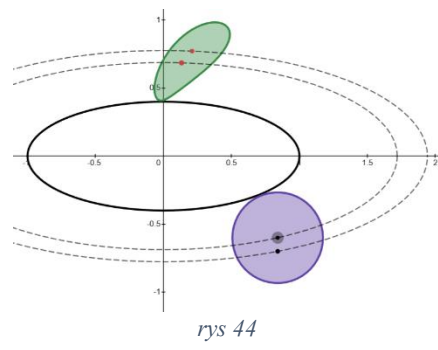
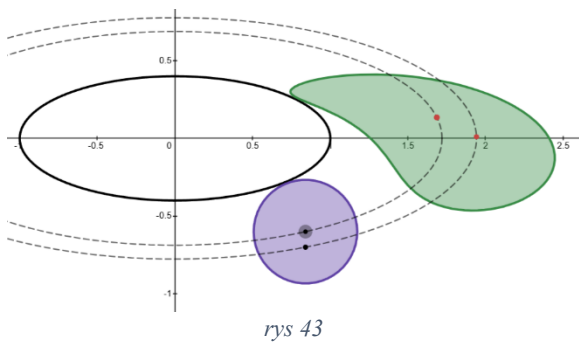
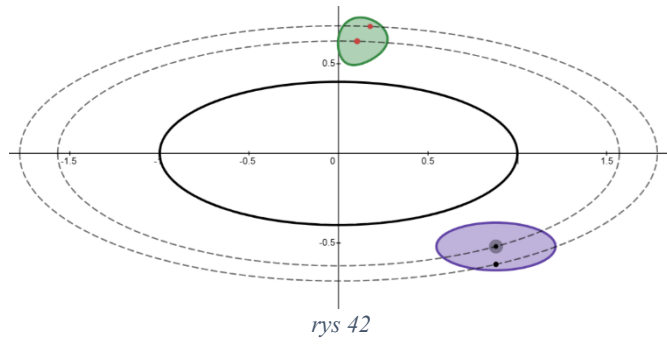
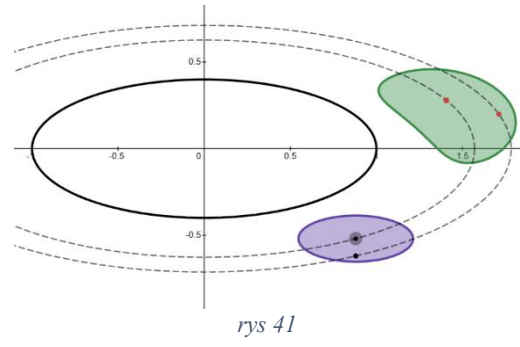
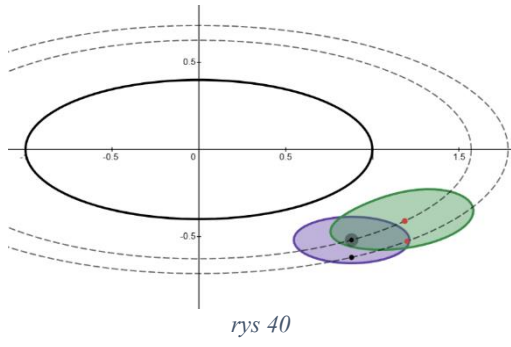
Ponieważ punkty P i P' leżą na tej samej elipsie danej równaniem $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$, to:

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = x'^2 + \frac{y'^2}{b^2} \quad x^2 + \frac{y^2}{b^2} = x'^2 \left(1 + \frac{tg^2 \beta}{b^2}\right)$$

$$x' = \frac{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{b^2}}}{\sqrt{1 + \frac{tg^2 \beta}{b^2}}} = \sqrt{\frac{b^2 x^2 + y^2}{b^2 + tg^2 \beta}} \quad y' = x' tg \beta$$

$$\begin{cases} x' = \sqrt{\frac{b^2 x^2 + y^2}{b^2 + tg^2 \beta}} \\ y' = tg \beta \sqrt{\frac{b^2 x^2 + y^2}{b^2 + tg^2 \beta}} \end{cases}$$

Jak można zaobserwować na zdjęciach na stronie następnej, wszystkie punkty podczas takiego przekształcenia pokonują ten sam kąt względem środka elipsy i zostają na swojej elipsie, która jest podobna do elipsy, względem której zachodzi obrót.



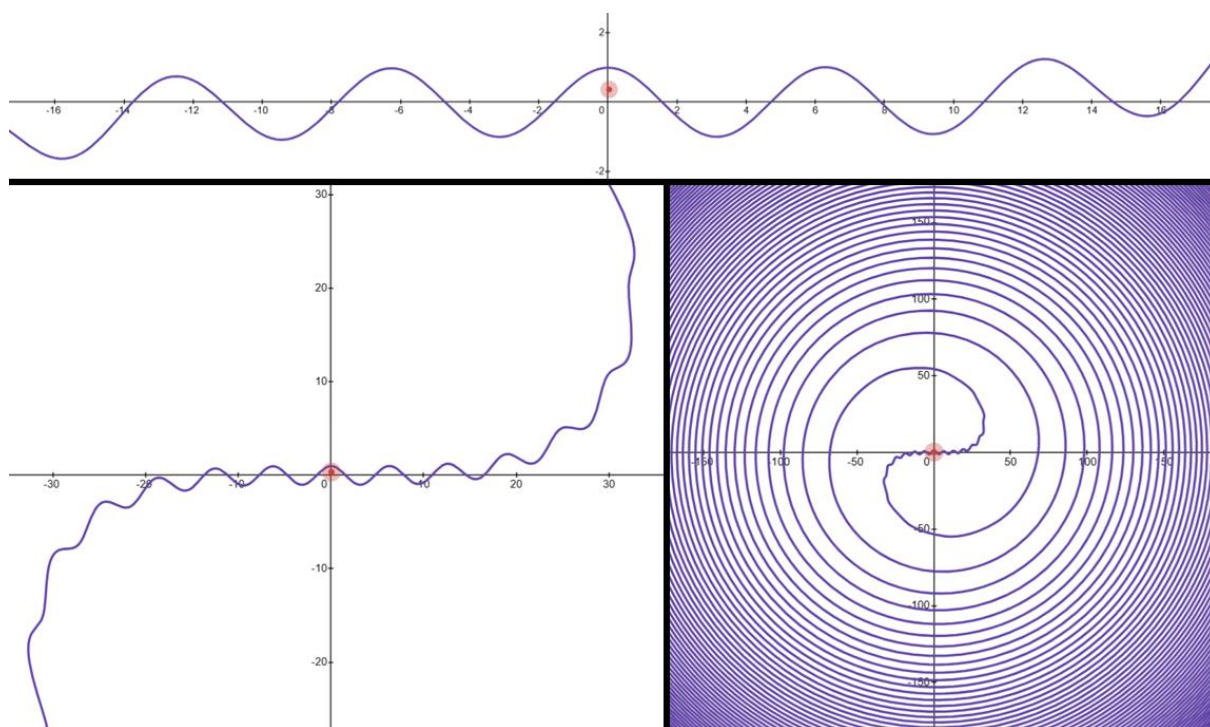
5 „Spiralizacja”

Jest to najmniej rygorystycznie zdefiniowana transformacja spośród wszystkich znajdujących się na tej stronie. Głównym pomysłem jaki miałem na to przekształcenie jest uzależnienie kąta obrotu od odległości danego punktu od wybranego środka. Dobór funkcji kąta obrotu względem odległości od środka ma kluczowe znaczenie dla otrzymanego efektu wizualnego. Dlatego w celu uzyskania normalnej sinusoidy na małym zakresie, która po oddaleniu drastycznie się zakręca wybrałem funkcję $o(d) = 0.00001 d^3$, w której d oznacza odległość od środka obrotu. W celu wyprowadzenia wzorów modyfikujemy wzory na obrót względem punktu $S=(a,b)$ podanych poniżej, poprzez podstawienie funkcji $o(d)$ za kąt α .

$$\begin{cases} x' = (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha + a \\ y' = (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha + b \end{cases}$$

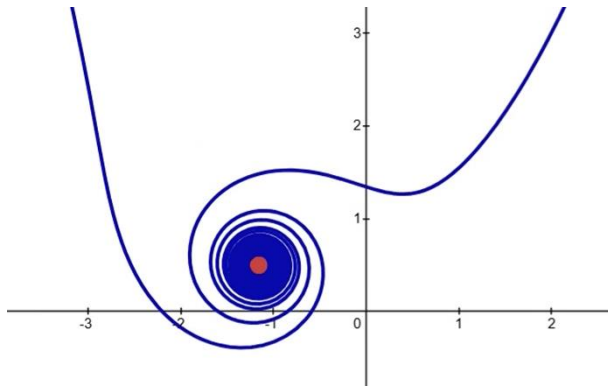
Po podstawieniu:

$$\begin{cases} x' = (x - a) \cos(o(d)) - (y - b) \sin(o(d)) + a \\ y' = (x - a) \sin(o(d)) + (y - b) \cos(o(d)) + b \end{cases} \quad \text{gdzie } d = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

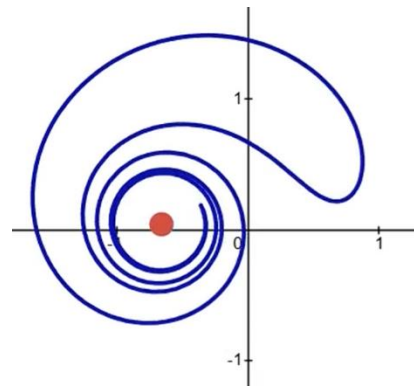


rys 46 – sinusoida płynnie przechodząca w pewną spiralę

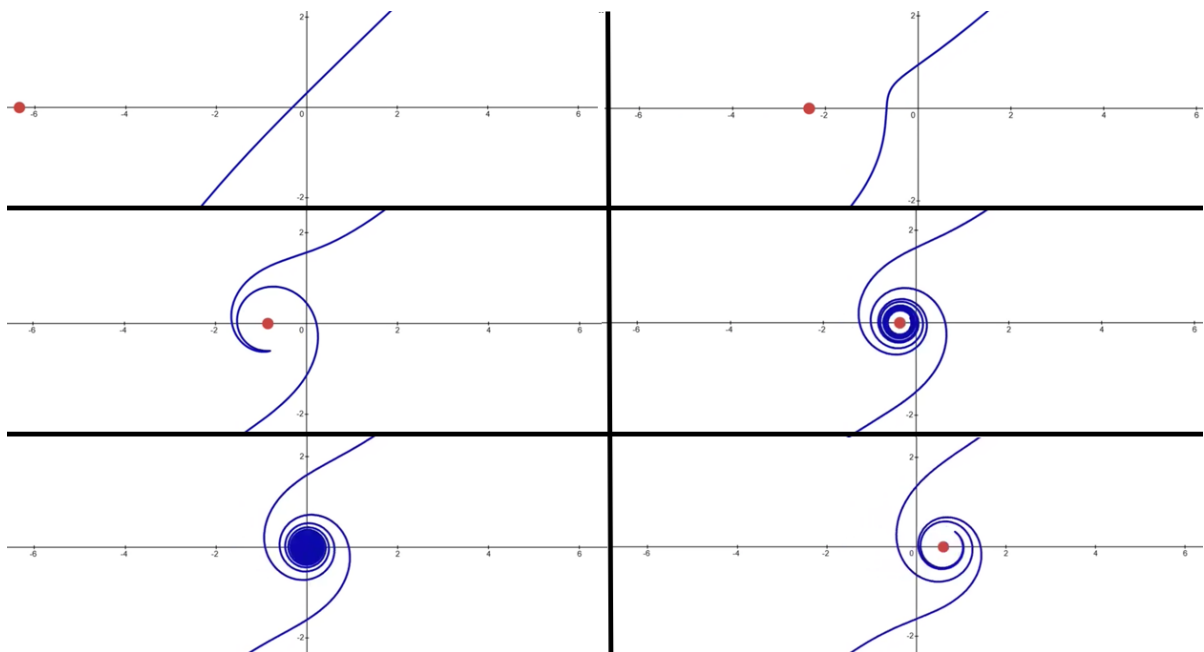
Ciekawe efekty można również otrzymać, gdy funkcja ta będzie malejąca, jak można zobaczyć zdjęciach na następnej stronie, aczkolwiek taka ujemna „spiralizacja” tworzy efekt, który kojarzy się bardziej z czarną dziurą niżeli spiralą.



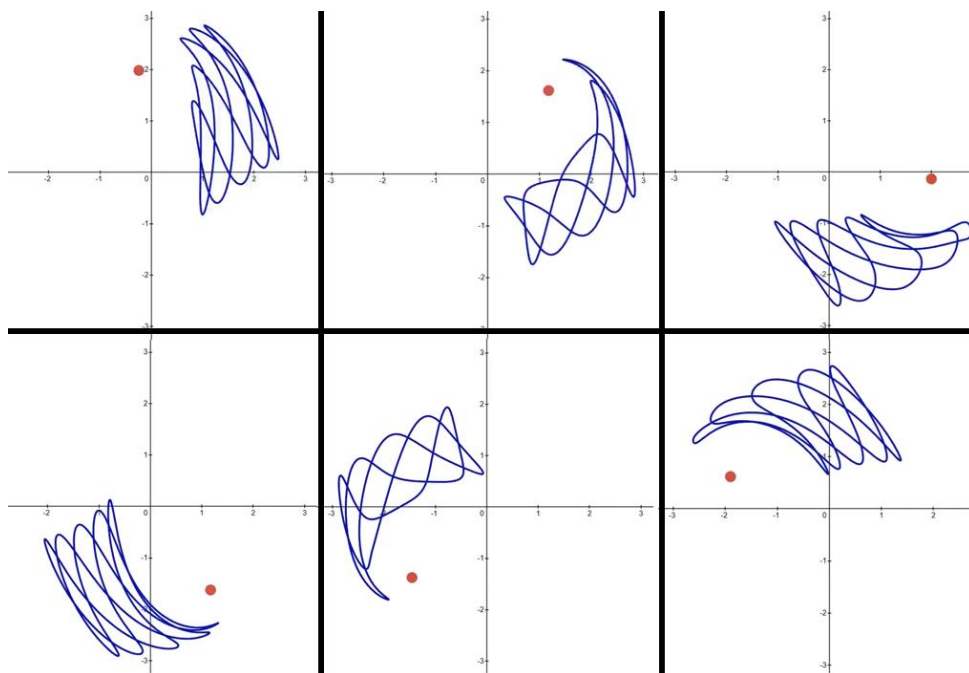
rys 47 – parabola poddana ujemnej spiralizacji



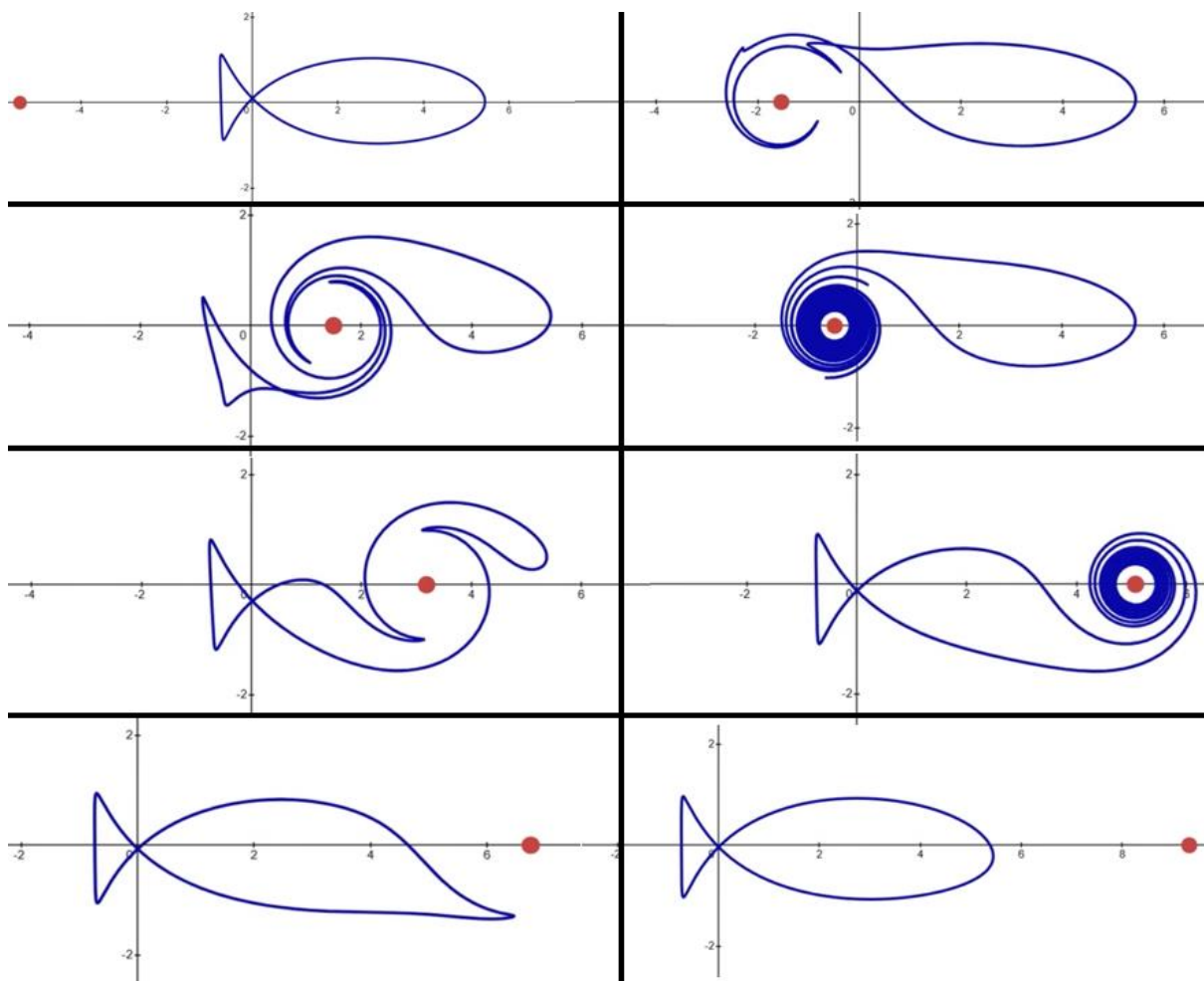
rys 48 – okrąg poddany ujemnej spiralizacji



rys 49 -prosta poddana ujemnej spiralizacji wokół przemieszczającego się punktu



rys 50 – krzywa Lissajous poddana ujemnej i liniowej względem odległości spiralizacji wokół krążącego punktu



rys 51 – „ryba” utworzona z odpowiedniego połączenia funkcji wykładniczej z trygonometrycznymi poddana ujemnej spiralizacji wokół przemieszczającego się punktu

Podziękowanie

Pragnę szczególnie podziękować dr Bronisławowi Pabichowi za cenne wsparcie podczas pisania pracy.

Bibliografia

- [1] P.S. Modienow, A.S. Parchomienko: „Przekształcenia geometryczne”. 1967
- [2] Kalkulator graficzny Desmos <https://www.desmos.com/?lang=pl>