

*Szkoła Podstawowa Nr1
im. Andrzeja Knapczyka-Ducha
w Czerwieniem
tel. (18)2658106*

W świecie nieskończoności

Opiekun szkolny

Anna Kutyla

Bartłomiej Staszal

Klasa VI

Czerwienne luty 2025

Starożytni Grecy traktowali **nieskończoność** z dużą ostrożnością, a czasami wręcz z niechęcią, ponieważ była dla nich źródłem paradoksów i potencjalnych sprzeczności w ich filozofii i matematyce. Nieskończoność była dla starożytnych czymś nieścisłym i potencjalnie niebezpiecznym! Woleli oni unikać rozważań na temat nieskończonych zbiorów czy bytów, bo wprowadzały one niepewność i rodziły pytania, na które starożytni nie umieli znaleźć odpowiedzi. Reasumując, starożytni starali się nieskończoności unikać, ponieważ była źródłem problemów i sprzeczności.

W szczególności problematyczny okazał się być ... zwykły kwadrat!

Pitagorejczycy byli zafascynowani harmonią liczb całkowitych: liczby i proporcje były dla nich symbolem porządku i piękna, proporcje widzieli w muzyce, geometrii, całej strukturze świata.

Aż tu nagle kwadrat: symbol symetrii i doskonałości (równe boki, równe kąty) wprowadził chaos do ich filozofii, gdy okazało się, że długości przekątnej kwadratu nie da się wyrazić liczbą całkowitą. Odkrycie to zszokowało starożytnych, a tym samym liczba pierwiastek z dwóch stała się pierwszym znanym przykładem liczby niewymiernej.

W starożytnej Grecji odkrycie niewymierności liczby pierwiastek z dwóch było aż tak kontrowersyjne, że niektórzy nawet ukrywali ten fakt! Nie mogli się oni pogodzić z tym, że w ich świecie, tak doskonałym i w pełni opisanym przez liczby całkowite, nagle pojawiła się liczba, która miała nieskończone i nieregularne rozwinięcie dziesiętne, burząc tym całą ideę harmonii.

Problem niewymierności liczby pierwiastek z dwóch dotyczył więc pojęcia nieskończoności. Przybliżenia liczby pierwiastek z dwóch w postaci ułamków były coraz lepsze, ale nigdy dokładne – wymagały nieskończonego ciągu kroków.

Pitagorejczycy odkryli więc, że istnieją liczby, takie jak pierwiastek z dwóch, które nie mogą być wyrażone jako stosunek dwóch liczb całkowitych. Było to związane z nieskończonością, ponieważ takie liczby miały nieskończone rozwinięcie dziesiętne.

Z kolei Euklides znalazł dowód na to, co dzisiaj możnaby nazwać nieskończonością zbioru liczb pierwszych.

W średniowieczu nieskończoność była rozważana głównie w kontekście teologicznym: teologowie np. **Święty Tomasz z Akwinu**, analizował nieskończoność jako ... atrybut Boga – jego wszechmoc, wszechwiedza i wieczność. Bóg był określany jako nieskończony byt.

Tymczasem matematycy unikali tematu nieskończoności, która nadal była tematem trudnym i pełnym sprzeczności.

Wraz z renesansem i rozwojem nauk ścisłych nieskończoność zaczęła powracać jako temat matematyczny:

- **XVI i XVII wiek:** Matematycy, tacy jak **Giordano Bruno**, analizowali nieskończoność wszechświata w kontekście kosmologii. Bruno był jednym z pierwszych, którzy otwarcie głosili, że wszechświat jest nieskończony.
- **Kalkulus i nieskończoność potencjalna:** Rozwój rachunku różniczkowego i całkowitego przez **Isaaca Newtona i Gottfrieda Wilhelma Leibniza** w XVII wieku wprowadził do matematyki operowanie nieskończonością potencjalną w sposób bardziej ścisły.
- Na przykład granice i nieskończone szeregi były narzędziami do analizy nieskończoności, ale nadal nie badano jej jako bytu aktualnego.

Prawdziwa rewolucja w rozważaniach o nieskończoności nastąpiła w XIX wieku.

- Cantor wprowadził pojęcie nieskończoności aktualnej w matematyce. Rozwinął teorie zbiorów i wprowadził pojęcia takie jak liczby kardynalne i mocy zbiorów. Udowodnił, że istnieją różne wielkości nieskończoności, np. nieskończoność zbioru liczb naturalnych jest mniejsza od nieskończoności zbioru liczb rzeczywistych (tzw. moc continuum).
- CIEKAWOSTKA - liczebności (moce zbioru) są oznaczane literkami hebrajskimi.
np. $\aleph$ – ALEF.
- Rozważania Cantora wzbudzały jednak kontrowersje. Paradoksy nieskończoności, takie jak paradoks zbioru wszystkich zbiorów, zmusiły matematyków do wprowadzenia bardziej ścisłych fundamentów matematyki.

Georg Cantor (1845-1918), uważany za ojca teorii mnogości, był jedną z najbardziej kontrowersyjnych postaci w historii matematyki. Urodził się w Sankt Petersburgu, gdzie mieszkał do 11 roku życia. W młodości uchodził za wybitnego skrzypka. Kiedy rodzina

Cantora wróciła do Niemiec (z powodu choroby ojca Cantora), odkryto niewiarygodny talent chłopca. Dzięki majątkowi odziedziczonemu po ojcu Cantor był w stanie podjąć studia w Berlinie, gdzie napisał pracę doktorską dotyczącą teorii liczb. Habilitację uzyskał na Uniwersytecie w Halle. Tam też spędził większość swojego naukowego życia i w 1879 roku został profesorem mając 34 lata. Jego odkrycia dotyczące nieskończoności zrewolucjonizowały matematykę, ale jego życie było pełne niezrozumienia, krytyki i osobistych trudności.

Odkrycia Cantora: Oswojenie nieskończoności

1. Teoria mnogości: Cantor stworzył podstawy współczesnej teorii zbiorów, która zajmuje się strukturą i właściwościami zbiorów. To dzięki niemu powstały pojęcia, które umożliwiły precyzyjne badanie nieskończoności.
 - Wprowadził pojęcie liczby kardynalnej, która pozwala porównywać „rozmiary” zbiorów, nawet tych nieskończonych.
 - Udowodnił, że istnieją różne „wielkości” nieskończoności. Na przykład, zbiór liczb rzeczywistych jest większy od zbioru liczb naturalnych, co zapoczątkowało badania nad nieskończonościami aktualnymi.
2. Twierdzenie Cantora: Jednym z najważniejszych osiągnięć Cantora było udowodnienie, że dla każdego zbioru A , zbiór wszystkich podzbiorów $P(A)$ ma większą moc niż zbiór A . Oznacza to, że nieskończoności nie tylko istnieją, ale są zróżnicowane pod względem rozmiaru.
3. Hipoteza continuum: Cantor postawił hipotezę, że nie istnieje zbiór nieskończony, którego moc byłaby pomiędzy mocą zbioru liczb naturalnych a mocą continuum (zbioru liczb rzeczywistych). Problem ten stał się jednym z najważniejszych w matematyce i do dziś pozostaje nierozstrzygnięty w ramach aksjomatyki Zermelo-Fraenkela (ZFC).

Choć dziś Cantor jest uznawany za pioniera matematyki, w swoich czasach spotkał się z ogromną krytyką:

- Opozycja środowiska matematycznego: Wielu współczesnych matematyków, w tym wpływowy Leopold Kronecker, otwarcie sprzeciwiało się jego ideom. Kronecker nazwał nieskończoność Cantora „błędem” i uznawał ją za niezgodną z „konstruktywnym” podejściem do matematyki.

- Wyśmiewanie i marginalizacja: Cantor był wyśmiewany za wprowadzenie nieskończoności aktualnej jako rzeczywistego bytu matematycznego. Wielu uważało jego pomysły za zbyt abstrakcyjne i bezużyteczne w praktyce. Aby odparować krytykę mówił, że nie zajmuje się nieskończonością tylko liczbami pozaskończonymi.

Niezrozumienie ze strony współczesnych miało duży wpływ na zdrowie psychiczne Cantora:

- Depresja i hospitalizacje: Krytyka oraz trudności w uzyskaniu akceptacji środowiska naukowego prowadziły do załamań nerwowych i okresowych hospitalizacji. W 1884 roku po raz pierwszy trafił do szpitala psychiatrycznego.
- Izolacja naukowa: Choć Cantor miał swoje grono zwolenników, przez większą część życia czuł się odrzucony przez społeczność matematyczną. W późniejszych latach coraz częściej poświęcał się filozofii teologii, co również spotkało się z krytyką.

Miał rację: Nieskończoność jako fundament matematyki

Pomimo trudności, Cantor miał rację. Jego odkrycia są dziś fundamentem matematyki:

- Fundament współczesnej matematyki: Teoria mnogości Cantora jest podstawą większości współczesnych gałęzi matematyki, od analizy po teorię logiki i informatykę.
- Rozwiązywanie paradoksów: Badania Cantora pozwoliły lepiej zrozumieć i oswoić paradoksy nieskończoności, takie jak paradoks Hilberta czy paradoksy związane z teorią zbiorów.

Problemy z nieskończonością są wciąż aktualne

Cantor udowodnił, że nieskończoność to nie tylko abstrakcyjna idea, ale także realny problem matematyczny. Do dziś jego prace inspirują kolejne pokolenia matematyków:

- Hipoteza continuum: Pozostaje jednym z najbardziej fascynujących problemów matematyki.
- Granice aksjomatyki: Badania nad nieskończonością prowadzą do pytań o same fundamenty matematyki, jak w przypadku twierdzenia Gödla o niezupełności.

Georg Cantor zmarł w 1918 roku w sanatorium, zmagając się z problemami zdrowotnymi i finansowymi. Dziś jednak jego prace są uznawane za jedno z najwyższych osiągnięć ludzkiego intelektu. Jak powiedział David Hilbert:

„Nikt nie wykluczy nas z raju, który stworzył Cantor”.

Cantor przypomniał światu, że nieskończoność nie jest tylko filozoficzną zagadką, ale kluczowym elementem matematycznej rzeczywistości.



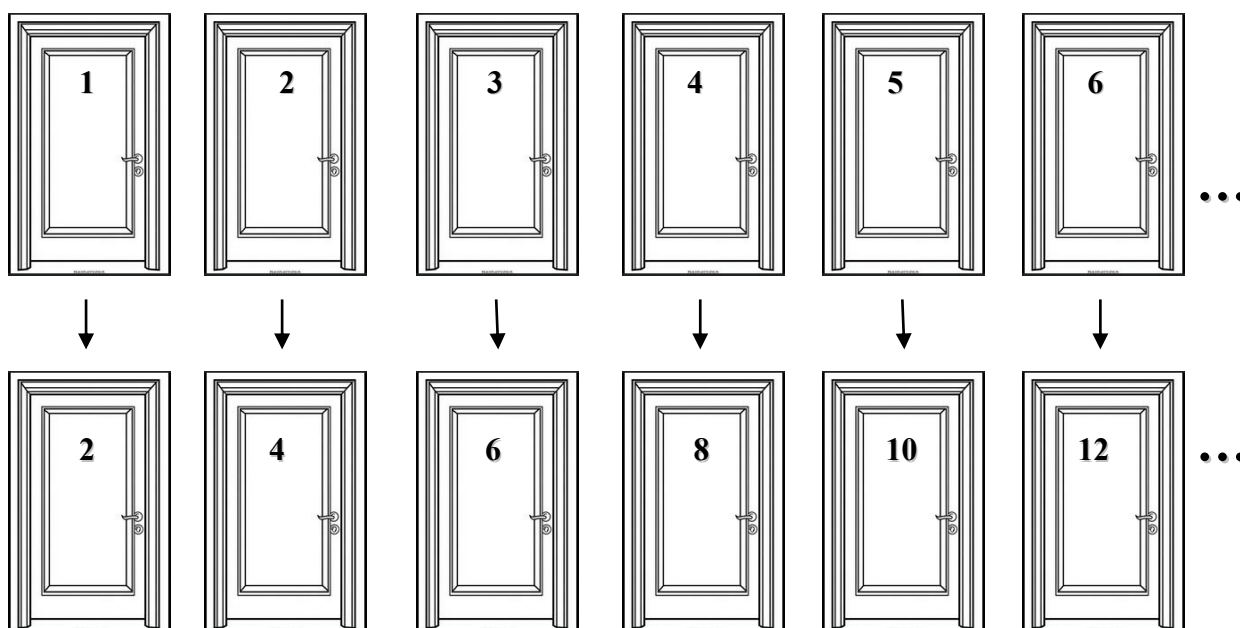
Georg Cantor



David Hilbert

Wielu matematyków ilustruje taką sytuację paradoksem hotelu z nieskończenie wieloma pokojami wymyślonym przez niemieckiego matematyka Davida Hilberta. Opowieść wygląda mniej więcej tak:

Był sobie kiedyś hotel, którego właściciel Chińczyk, nie obawiał się wielkich zbiorowisk. Aby uniknąć nieporozumień, każdemu pokojowi przypisał numer, poczynając od 1, w kolejności rosnącej. Był środek sezonu, wszystkie pokoje były zajęte, co oczywiście cieszyło właściciela. Nagle nadeszła wiadomość z chińskiego biura podróży: lawina jego rodaków ma nadjechać następnego dnia i koniecznie należy im zapewnić miejscaw hotelu. Nie można jednak wyrzucić z hotelu dotychczasowych gości. Rozwiązanie? Hotelarz, człowiek znający się na matematyce, poprosił każdego ze swoich gości o przejście do pokoju o numerze będącym dwukrotnością dotychczasowego numeru, tak jak to pokazano na rysunku.



I tak pojawiło się nieskończenie wiele pustych pokoi, w których swobodnie mogli się pomieścić nowi przybysze. Właściciel hotelu z nieskończenie wieloma pokojami dalej nim szczęśliwie zarządzał, dumny ze swojej wiedzy o nieskończoności.

Rozważmy najprostszą nieskończoność, którą tworzą wszystkie dodatnie liczby całkowite, czyli liczby naturalne.

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots \},$$

Widzimy z pewnym zdziwieniem, że część zbioru $\mathbb{N}$, mianowicie zbiór liczb naturalnych parzystych, jest równoliczny z całym zbiorem $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longleftrightarrow & 0 \\
 1 & \longleftrightarrow & 2 \\
 2 & \longleftrightarrow & 4 \\
 3 & \longleftrightarrow & 6 \\
 4 & \longleftrightarrow & 8 \\
 5 & \longleftrightarrow & 10 \\
 6 & \longleftrightarrow & 12 \\
 7 & \longleftrightarrow & 14 \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Stąd

$$\# \{\text{liczby parzyste}\} = \# \mathbb{N}$$

(Liczbę elementów zbioru oznacza się, pisząc przed symbolem zbioru znak #).

Część nieskończonej całości może więc również być nieskończona, a nawet mieć tę samą liczbę kardynalną co całość.

Liczbą kardynalną zbioru skończonego jest jedną z liczb naturalnych. Zbiory nieskończone mają znacznie większe liczby kardynalne wyrażające ich nieskończoność. Znamy mówią o nich „liczby pozaskończone”, co oznacza, że wykraczają poza zakres liczb skończonych. Najmniejszą z nich, pierwszą z pozaskończonych liczb kardynalnych jest $\#(\mathbb{N})$, którą Cantor oznaczył symbolem $\aleph_0$. To liczba kardynalna zbioru wszystkich liczb naturalnych czyli

$$\# \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\} = \# \mathbb{N} = \aleph_0$$

Symbol $\aleph$ (alef) jest pierwszą literą alfabetu hebrajskiego. Zero, które występuje w indeksie dolnym, oznacza najmniejszy ze wszystkich alefów (alef zero). Istnieje więcej alefów, a każdy z nich ma swój indeks dolny:

$$\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4, \aleph_5, \dots$$

Liczba kardynalna $\aleph_0$ określa zbiory, które są równoliczne ze zbiorem liczb $\mathbb{N}$. Taki jest zbiór liczb naturalnych parzystych, zbiór liczb nieparzystych, zbiór wielokrotności 3, zbiór wielokrotności 5 oraz wielu innych. O zbiorach równolicznych z $\mathbb{N}$ możemy powiedzieć, że są „przeliczalne”, ponieważ można je przeliczyć, ponumerować liczbami naturalnymi, np.:

0	$\longleftrightarrow$	0	0	$\longleftrightarrow$	1	0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	2	1	$\longleftrightarrow$	3	1	$\longleftrightarrow$	5
2	$\longleftrightarrow$	4	2	$\longleftrightarrow$	5	2	$\longleftrightarrow$	10
3	$\longleftrightarrow$	6	3	$\longleftrightarrow$	7	3	$\longleftrightarrow$	15
4	$\longleftrightarrow$	8	4	$\longleftrightarrow$	9	4	$\longleftrightarrow$	20
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Nieskończony zbiór

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots \}$$

nazywany jest „zbiorem liczb całkowitych”, a zbiór liczb $\mathbb{N}$ jest częścią zbioru liczb $\mathbb{Z}$. Każda liczba naturalna jest również liczbą całkowitą co jest oczywiste. A jaka jest liczba kardynalna zbioru liczb $\mathbb{Z}$? Przedstawmy je za pomocą rysunku

0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	+1
2	$\longleftrightarrow$	-1
3	$\longleftrightarrow$	+2
4	$\longleftrightarrow$	-2
5	$\longleftrightarrow$	+3
$\vdots$		$\vdots$

Z rysunku wynika, że $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N} = \aleph_0$, czyli zbiór $\mathbb{Z}$ jest zbiorem przeliczalnym.

A jak wygląda zbiór ułamków?

Już w klasie czwartej mówimy o tym z czego składa się ułamek zwykły. Składa się on z licznika i mianownika a w zapisie jest to $\frac{a}{b}$. Jeśli licznik jest wielokrotnością mianownika to ułamek $\frac{a}{b}$ jest liczbą całkowitą, która jest wynikiem dzielenia a przez b . Wiele ułamków można utożsamiać z tą samą liczbą całkowitą.

$$568/284 = 256/128 = 8/4 = 2$$

Istnieją też ułamki, których nie można utożsamiać z liczbami całkowitymi np. $1/3$ lub $14/11$. Otrzymujemy

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \{\text{ułamki}\}.$$

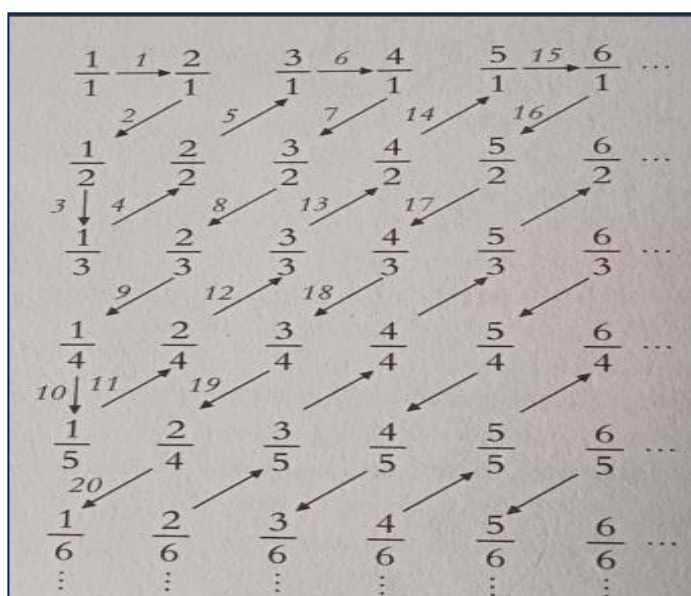
Symbol $\subset$ oznacza „zawarty w, ale nie równy”. Znak ten podobny jest do mniejszości $<$, dotyczy zbiorów, ale nie liczb.

Zbiór wszystkich ułamków oznacza się zwykle literą $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ jest częścią $\mathbb{Q}$, co można zapisać następująco:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Można przypuszczać, że liczba kardynalna zbioru $\mathbb{Q}$ jest większa niż zbioru $\mathbb{Z}$, ale w nieskończoności mogą się dziać rzeczy nieoczekiwane.

Cantor „ponumerował” ułamki w sposób, można by powiedzieć, zakręcony, równie zygzakowaty, który graficznie można przedstawić tak:



W każdym wierszu występują wszystkie możliwe liczniki, w każdej kolumnie – wszystkie możliwe mianowniki. Liczbę postaci a/b znajdziemy z łatwością w kolumnie a i w wierszu b . Każdemu ułamkowi (czyli każdej liczbie wymiernej) odpowiada ciąg strzałek, jedna za drugą, prowadzący do niego. Wystarczy teraz zważyć, że jeśli ponumerujemy strzałki (1, 2, 3, 4,...), to otrzymamy:

$$\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N} = \aleph_0.$$

Liczba jest algebraiczna, gdy jest pierwiastkiem równania wielomianowego w postaci

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

w którym współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ są liczbami wymiernymi.

Istnieje wiele liczb algebraicznych, a każda liczba wymierna jest algebraiczna. Jeśli a/b jest dowolną liczbą wymierną, to jest ona pierwiastkiem równania

$$x - a/b = 0$$

o wymiernych współczynnikach $a_1 = 1$ i $a_0 = -a/b$.

Liczba pierwiastek z dwóch jest niewymierna i spełnia równanie $x^2 - 2 = 0$, jest więc algebraiczna. Inna znana liczba jak złoty stosunek Φ jest liczbą algebraiczną, ponieważ spełnia równanie $x^2 - x - 1 = 0$.

W jednej ze swoich prac Cantor udowodnił, że zbiór wszystkich liczb algebraicznych, który nazwiemy A , zawierający zbiór liczb wymiernych, jest również zbiorem przeliczalnym, zatem

$$\#\{\text{liczby algebraiczne}\} = \#A = \#\mathbb{Q} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N} = \aleph_0.$$

Każdy z wymienionych zbiorów jest istotnie większy (w sensie zawierania) od następnego:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset A$$

DOWÓD PRZEKĄTNIOWY

Rozumowanie Cantora, które pozwoliło mu udowodnić nieprzeliczalność zbioru $\mathbb{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych (czyli wszystkich liczb dziesiętych), przeszło do historii jako przykład wybitnej pomysłowości. Dowód jest oryginalny i jednocześnie zrozumiały. Zastosowana w nim metoda stała się sławna do tego stopnia, że przypisano jej własną nazwę: *rozumowanie przekątniowe* lub *dowód przekątniowy*. Przeprowadzimy dowód w sposób nazywany w matematyce „przez sprowadzenie do sprzeczności”, zaczynamy rozumowanie od przyjęcia pewnej hipotezy i wykazujemy, że prowadzi ona do sprzeczności. Oznacza to, że taka hipoteza nie może być prawdziwa.

Przyjmijmy hipotezę (o której wykażemy, że jest fałszywa), że zbiór liczb rzeczywistych jest przeliczalny. Skupimy się na zbiorze liczb rzeczywistych x z przedziału $[0,1]$, czyli takich, dla których zachodzą nierówności $0 \leq x \leq 1$. Stanowią one znikomą część całego zbioru.

Przyjmujemy założenie, że liczby rzeczywiste z rozważanego przedziału są ponumerowane i zapisane jedna pod drugą, czyli ustawić je w nieskończony ciąg, na przykład tak:

1. 0, **3** 6 7 8 8 8 9 2 8 7 1 7 7 4 3 ...
2. 0, 2 **6** 1 6 7 3 8 2 0 9 8 3 0 9 8 ...
3. 0, 2 1 **9** 2 1 2 2 1 2 2 9 8 7 2 2 ...
4. 0, 5 4 2 **7** 1 1 3 3 4 4 2 3 4 2 2 ...
5. 0, 2 4 3 4 **3** 1 1 1 3 5 4 4 2 3 4 ...
6. 0, 9 8 4 1 1 **4** 1 2 2 8 9 3 4 5 7 ...
7. 0, 7 3 9 2 0 8 **5** 9 6 7 1 6 2 6 3 ...
8. ...

Skonstruujemy teraz liczbę rzeczywistą $0 \leq a \leq 1$ która w powyższym ciągu na pewno nie wystąpi. Mianowicie, kolejne cyfry liczby a tworzymy wg zasady:

- jeśli k -ta liczba ciągu ma na k -tym miejscu po przecinku jest jedną z cyfr 0,1,...,8, to liczba a ma na k -tym miejscu cyfrę o 1 większą;
- jeśli k -ta liczba ciągu ma na k -tym miejscu po przecinku jest cyfrą 9, to liczba a ma na k -tym miejscu cyfrę 0.

W naszym przykładzie liczba a wyglądałaby tak:

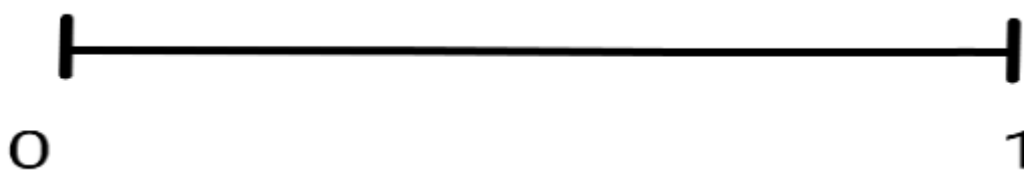
0,4708456...

W efekcie liczba rzeczywista a od pierwszej liczby ciągu różni (co najmniej) pierwszą cyfrą, od drugiej liczby ciągu różni (co najmniej) drugą cyfrą, ... od k -tej liczby ciągu różni (co najmniej) k -tą cyfrą. Otrzymaliśmy sprzeczność z wyjściowym założeniem o tym, że lista zawiera wszystkie liczby rzeczywiste zawarte między 0 i 1. Okazuje się więc, że takiej listy nie ma i nigdy nie będzie, ponieważ udowodniliśmy tym samym, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie jest przeliczalny, jeśli nie jest przeliczalny nawet taki mały fragment:

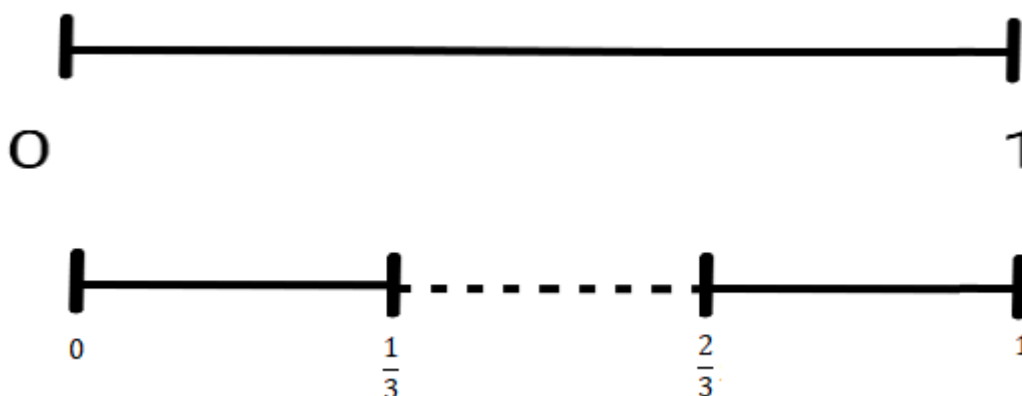
$$\#\mathbb{R} > \aleph_0$$

Zbiór Cantora to podzbiór prostej rzeczywistej opisanej w 1883 roku przez niemieckiego matematyka Georga Cantora.

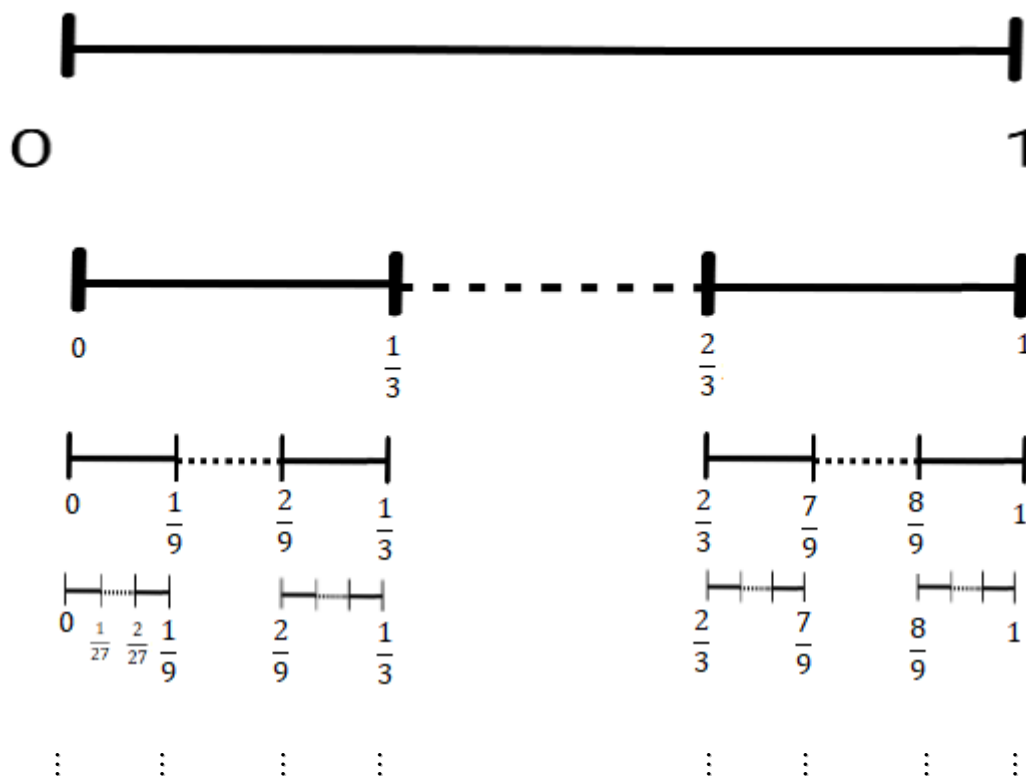
Wyobraźmy sobie przedział domknięty od 0 do 1, przedział do którego należą wartości 0 i 1.



Dzielimy odcinek na 3 jednakowe części, a następnie usuwamy środkową część o długości $\frac{1}{3}$.



Zostają nam dwa jednakowe odcinki, które dzielimy na trzy jednakowe części i usuwamy środkową część. Czynność tę powtarzamy: zawsze z dwóch powstałych przedziałów usuwając środkową część.



W każdym naszym kolejnym kroku powstaje dokładnie dwa razy więcej odcinków niż poprzednio: 2, 4, 8, 16,

Zbiór Cantora to zbiór wszystkich liczb, który nigdy nie zostaną usunięte.

A czy wartość $\frac{1}{2}$ będzie należała do zbioru Cantora?

Należy ona do pierwszego przedziału $[0, 1]$, ale czy należy do dwóch powstałych przedziałów? NIE: $\frac{1}{2} \notin [0, \frac{1}{3}]$ i $\frac{1}{2} \notin [\frac{2}{3}, 1]$

Po eliminacji środkowych przedziałów $\frac{1}{2}$ **nie będzie należała do zbioru Cantora**. Do tego zbioru na pewno należy 0, ponieważ nawet najmniejszy odcinek będzie zaczynał się od wartości zero i zero nie jest i nie będzie $\frac{1}{3}$ jakiegokolwiek odcinka, które są usuwane w następnych krokach. Podobnie sprawa ma się z 1. Podobnie będzie z każdym punktem,

który powstaje w wyniku podziału, nigdy nie zostanie usunięty i będzie należał do zbioru Cantora.

Wartości, które otrzymujemy w mianowniku, są podzielne przez 3, a w każdym kolejnym etapie liczba punktów się podwaja: 2 punkty 4 punkty 8 punktów 16 punktów,, i tak w nieskończoność, **czyli zbiór Cantora jest nieskończony.**

A jak wyobrazić sobie i wytłumaczyć zerową długość?

W każdym kolejnym etapie usuwamy coraz to więcej i więcej z naszego początkowego zbioru, ALE JAK DUŻO? Nasz odcinek ma długość 1, czyli mamy zbiór $[0,1]$. W kolejnych krokach wartość jeden jest zmniejszona jedną trzecią czyli $1 - \frac{1}{3}$, a następnie 2 odcinki o długości po $\frac{1}{9}$, 4 odcinki po $\frac{1}{27}$ i tak w nieskończoność.

$$1 - \frac{1}{3} - 2 * \frac{1}{9} - 4 * \frac{1}{27} - \dots$$

Jeśli przyjrzymy się wartościom ujemnym, przypominać będą ciąg geometryczny oraz to, że każdy następny wyraz ciągu powstaje przez pomnożenie poprzedniego przez wartość $\frac{2}{3}$.

$$1 - \frac{1}{3} - 2 * \frac{1}{9} - 4 * \frac{1}{27} - \dots = 1 - 1 = 0$$

Długość odcinka = $1 - 1 = 0$.

Z tego wynika, że DŁUGOŚĆ ZBIORU CANTORA WYNOSI 0.

Chociaż zbiór Cantora ma 0 długość to nasz odcinek ma długość 1.

Praktyczne zastosowanie
nieskończoności

Zadanie1

W pewnej wiosce mieszka krowa, która każdego dnia daje coraz mniej mleka. Każdego dnia daje dokładnie o $\frac{3}{4}$ mniej mleka niż dnia poprzedniego:

- Pierwszego dnia daje 1 litr mleka
- Drugiego dnia daje $\frac{3}{4}$ litra mleka
- Trzeciego dnia daje $\frac{9}{16}$ litra mleka
- Czwartego dnia daje $\frac{27}{64}$ litra mleka, i tak dalej.

1. Ile mleka w sumie da krowa w ciągu 5 dni?

2. Czy krowa w nieskończonym czasie może wyprodukować więcej niż 4 litry mleka?

Rozwiązanie

1. Ilości mleka każdego dnia to wyrazy ciągu geometrycznego

$$a_1 = 1, q = \frac{3}{4}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$S_5 = 1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \frac{81}{256} = 1 + 0,75 + 0,5625 + 0,421875 + 0,31640625 \approx 3,05 \text{ litra.}$$

2. Suma mleka w nieskończonym czasie tworzy nieskończony szereg geometryczny, w którym pierwszy wyraz $a_1 = 1$, a iloraz $q = \frac{3}{4}$

Suma nieskończonego szeregu geometrycznego wynosi:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Odpowiedzi

1. W ciągu 5 dni krowa da około 3,05 litra mleka.
2. W nieskończonym czasie krowa wyprodukuje dokładnie 4 litry mleka, ale nigdy więcej.

Zadanie 2

Na stacji znajduje się magiczny, nieskończony pociąg, który przyjeżdża i zabiera pasażerów a następnie odjeżdża na kolejną stację. Każdy wagon pociągu ma coraz mniej miejsc w porównaniu do poprzedniego wagonu:

- Pierwszy wagon ma 100 miejsc
- Drugi wagon ma 50 miejsc
- Trzeci wagon ma 25 miejsc
- Czwarty wagon ma 12 miejsc, i tak dalej, zmniejszając liczbę miejsc o połowę w każdym kolejnym wagonie.

1. Ile miejsc w sumie jest w pierwszych 4 wagonach?

Liczba miejsc w pierwszych 4 wagonach to suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$a_1 = 100, q = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 25$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 12,5$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_4 = 100 + 50 + 25 + 12,5 = 187,5$$

Odpowiedź: W pierwszych 5 wagonach jest w sumie 187,5 miejsc.

2. Czy w nieskończonej liczbie wagonów magiczny pociąg będzie miał skończoną liczbę miejsc?

Całkowita liczba miejsc w nieskończonym pociągu tworzy nieskończony szereg geometryczny:

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

$$S_4 = 100 + 50 + 25 + 12,5 + \dots$$

Pierwszy wyraz ciągu $a_1 = 100$, a iloraz $q = \frac{1}{2}$

Suma nieskończonego szeregu wynosi:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Podstawiamy:

$$S = \frac{100}{1-\frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$$

Odpowiedź: W nieskończonej liczbie wagonów pociąg ma dokładnie 200 miejsc.

3. Jeśli na każdej stacji wsiada dokładnie tylu pasażerów, ile jest miejsc w pierwszych n wagonach, to po ilu stacjach magicznych pociąg przewiezie 1000 pasażerów?

Jeśli na każdej stacji wsiada liczba pasażerów odpowiadająca sumie miejsc w pierwszych n wagonach, to spróbuję obliczyć n , dla którego:

$$S_n \geq 1000.$$

Wzór na sumę pierwszych n wyrazów szeregu geometrycznego to:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

dla $q \neq 1$, dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n

gdzie:

$$a_1 = 100$$

$$q = \frac{1}{2}$$

Podstawiamy i rozwiązujemy dla $S_n \geq 1000$:

$$100 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \geq 1000$$

$$100 \cdot 2 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n) \geq 1000$$

$$200 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n) \geq 1000 / : 200$$

$$1 - (\frac{1}{2})^n \geq 5$$

Ponieważ lewa strona $1 - (\frac{1}{2})^n$ nie może nigdy osiągnąć wartości większej niż 1, pociąg nigdy nie przewiezie 1000 pasażerów w jednym przejeździe, niezależnie od liczby wagonów.

Jeśli każdy kolejny wagon ma o $\frac{1}{3}$ mniej miejsc niż poprzedni, to liczba miejsc zmienia się w sposób geometryczny. Oznacza to, że liczba miejsc w każdym wagonie będzie się zmniejszać według ilorazu $q = \frac{2}{3}$.

Przykład

1. Pierwszy wagon: 100 miejsc (przyjmijmy wartość początkową $a_1 = 100$)
2. Drugi wagon: $a_2 = a_1 \cdot q = 100 \cdot \frac{2}{3} = 66,67$ miejsc
3. Trzeci wagon: $a_3 = a_1 \cdot q^2 = 66,67 \cdot (\frac{2}{3})^2 = 44,44$ miejsc
4. Czwarty wagon: $a_4 = a_1 \cdot q^3 = 44,44 \cdot (\frac{2}{3})^3 = 29,63$ miejsc
5. Piąty wagon: $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 29,63 \cdot (\frac{2}{3})^4 = 19,75$ miejsc

Obliczanie sumy miejsc w n -wagonach

Suma miejsc w pierwszych n wagonach tworzy szereg geometryczny opierwszym wyrazie $a_1 = 100$ i ilorazie $q = \frac{2}{3}$

Wzór na sumę pierwszych n wyrazów szeregu geometrycznego to:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Przykład dla 5 wagonów

$$S_5 = 100 \cdot \frac{1 - (\frac{2}{3})^5}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$S_5 = 100 \cdot \frac{1 - (0,6667)^5}{0,3333}$$

$$S_5 = 100 \cdot \frac{1 - 0,1317}{0,3333}$$

$$S_5 = 100 \cdot \frac{0,8683}{0,3333} \approx 260,49$$

Odpowiedź: W pierwszych 5 wagonach będzie około 260 miejsc.

Zadanie 3

W magicznym lesie mieszka elf, który każdego dnia sadzi drzewa. Jednak każdego kolejnego dnia sadzi coraz więcej drzew, ponieważ ma coraz więcej energii:

- Pierwszego dnia sadzi 1 drzewo
- Drugiego dnia sadzi 2 drzewa
- Trzeciego dnia sadzi 4 drzewa
- Czwartego dnia sadzi 8 drzew, i takdalej, podwajając liczbę sadzonych drzew każdego dnia.

1. Ile drzew elf posadzi w sumie w ciągu 7 dni?

Liczba drzew sadzonych każdego dnia to wyrazy ciągu geometrycznego:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8, a_5 = 16, a_6 = 32, a_7 = 64$$

Suma drzew w ciągu 7 dni wynosi:

$$S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$$

Odpowiedź: Elf posadzi 127 drzew w ciągu 7 dni.

2. Czy elf jest w stanie zasadzić więcej niż milion drzew? Jeśli tak, to po ilu dniach?

Całkowita liczba drzew po n – tym dniu to suma wyrazów ciągu geometrycznego, gdzie każdy kolejny wyraz jest 2 – krotnością poprzedniego. suma ta wynosi:

$$S_n = 2^n - 1$$

Chcemy znaleźć n , dla którego

$$2^n - 1 \geq 1\,000\,000 \quad / +1$$

$$2^n \geq 1\,000\,001$$

Logarytmujemy z obu stron nierówność

$$n \cdot \log_2 2 \geq \log_2(1\,000\,001)$$

$$n \geq \log_2(1\,000\,001)$$

Obliczamy:

$$\log_2(1\,000\,001) \approx \frac{\log_{10}(1\,000\,001)}{\log_{10} 2} \approx \frac{6,00000043}{0,301} \approx 19,93$$

zaokrąglamy w górę: $n = 20$

Odpowiedź: Elf posadzi więcej niż milion drzew po 20 dniach.

3. Ile drzew elf posadzi w nieskończoności?

Liczba drzew w nieskończoności tworzy nieskończony szereg geometryczny, którego suma zmierza do nieskończoności. Ponieważ liczba sadzonych drzew stale się podwaja.

Odpowiedź: W nieskończoności elf posadzi nieskończenie wiele drzew.

Zadanie 4

W magicznym ogrodzie znajduje się fontanna, która każdego dnia wypełnia magiczny basen z wodą. Jednak każdego dnia woda dolewana do basenu staje się coraz mniejsza:

- Pierwszego dnia fontanna dolewa dokładnie 1 litr wody
- Drugiego dnia fontanna dolewa połowę tej ilości, czyli $\frac{1}{2}$ litra
- Trzeciego dnia dolewa $\frac{1}{4}$ litra
- Czwartego dnia dolewa $\frac{1}{8}$ litra wody, i tak dalej.

1. Ile wody w sumie znajdzie się w basenie po 5 dniach?

Ilość wody w basenie to suma wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazach:

$$a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Suma wody po 5 dniach to:

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0,0625 = 1,9375$$

Odpowiedź: Po 5 dniach w basenie znajdzie się 1,9375 litra wody.

2. Czy basen wypełni się wodą całkowicie, jeśli fontanna będzie działać nieskończony czas?
W nieskończonym czasie suma wody to nieskończony szereg geometryczny.

Dla tego szeregu suma graniczna wynosi:

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \quad \text{gdzie } a_1 = 1 \text{ i } q = \frac{1}{2}$$

Po podstawieniu wartości otrzymujemy:

$$S = \frac{1}{1-0,5} = 2$$

Odpowiedź: Basen nigdy się nie wypełni całkowicie, ale w nieskończonym czasie ilość wody zbliży się do 2 litrów.

Zmiana wartości pieniądza w czasie.

Pieniądz znamy wszyscy, od zawsze, bo towarzyszy nam w codziennym życiu. Pieniądz umożliwia nam wymianę dóbr i usług (gdy kupujemy chleb nabywamy dobro, płacąc pieniądzem piekarzowi za jego upieczenie). Pieniądz służy również do pomiaru wartości (cena kupionego chleba oznacza jego wartość). Jednak, sama wartość pieniądza w czasie się zmienia. Jak? Otóż, jeżeli dzisiaj możemy kupić chleb za 3,50 zł, to możliwe, że za rok kwota ta już nie wystarczy na zakup chleba, gdyż jego cena wzrośnie do 3,80 zł. Jest to spowodowane inflacją – czyli właśnie wzrostem cen i zarazem spadkiem wartości pieniędzy.

Jaką wartość będzie miała kwota 100 zł za przykładowo 5 lat? Zależy to od tego, jak szybko pieniądz traci jak wartości: wielkość tę określa się w procentach. Załóżmy, że w każdym roku inflacja wynosi 3%. Przyszłą wartość pieniądza oblicza się wzorem:

$$\text{Wartość przyszła} = \text{Wartość obecna} \div (1 + \text{stopa inflacji})$$

Wartość kwoty 100 zł po roku wyniesie więc: $100 \text{ zł} / (1 + 3\%) = 100 / 1,03 = 97,09 \text{ zł}$

Wartość kwoty 100 zł po dwóch latach wyniesie:

$$100 \text{ zł} / (1 + 3\%) / (1 + 3\%) = 97,09 / (1 + 3\%) = \mathbf{94,26 \text{ zł}}$$

Wartość kwoty 100 zł po trzech latach wyniesie: $100 \text{ zł} \div (1 + \text{stopa inflacji})^3$ a wartość po 5 latach to $100 \text{ zł} \div (1 + \text{stopa inflacji})^5$ czyli 86,26 zł.

Oznacza to, że za 5 lat za banknot 100 złotowy będzie można kupić tyle rzeczy, ile dzisiaj można kupić za 86,26 zł (czyli o wiele mniej).

Można zadać pytanie, za ile lat wartość banknotu 100 zł będzie niemal zerowa (tj. nie będzie można już nic za nią kupić, będzie miała wartość dzisiejszego 1 grosza).

Obliczenia są trudne i wykorzystałem arkusz excel i wskazówki mamy do obliczenia, że przy rocznej inflacji **3%**, wartość banknotu **100 zł** spadnie do **1 grosza** za około **312 lat**. To bardzo długi okres! W praktyce wcześniej pewnie nastąpiłyby inne zmiany – np. wymiana waluty.

Ale jaki to ma związek z nieskończonością? Otóż, można zastanawiać się, co by było, gdyby co roku otrzymywałoby się stałą sumę pieniędzy. Czasami dzieci dostają od rodziców

co tydzień kieszonkowe. A co, jeżeli ktoś dostawałby takie kieszonkowe co tydzień do końca życia, a nawet w nieskończoność? Taka sytuacja jest możliwa!

Mój dziadek dzierżawi działkę pod wyciąg narciarski już od ponad 20 lat i co roku otrzymuje taką samą kwotę. Zakładając, że wyciąg ten będzie funkcjonował w nieskończoność, działka co roku w nieskończoność będzie przynosiła dochód w stałej kwocie. Czy da się policzyć sumę tych nieskończonych płatności? Otóż tak!

W ekonomii taką sytuację określa się mianem „*renta wieczysta*” lub „*renta ekonomiczna*”.

Nie można przypisać wzoru na rentę wieczystą jednej osobie, ale kilka postaci historycznych miało kluczowy wpływ na rozwój tej tematyki. Generalnie problem nieskończonych dochodów pojawił się w momencie, gdy narodził się kapitalizm (wcześniej nieskończone dochody mieli tylko królowie czy możnowładcy, a pozostałe reszta społeczeństwa nie miała prawie nic). I tak właśnie znani ekonomowie, tacy jak **Richard Cantillon (XVIII wiek)**, **Adam Smith (1776, "Bogactwo narodów")** czy **David Ricardo (XIX wiek)** czy w swoich analizach uwzględniali koncepcję otrzymywania przepływów pieniężnych w nieskończoność.

Z kolei w 1938 roku **John Burr Williams** opublikował pracę na temat wyceny akcji **opierającej się na rencie wieczystej**, co przyczyniło się do powstania współczesnych modeli wyceny aktywów, takich jak chyba najpopularniejszy (a zarazem najprostszy) model Gordona.

Historia powstania modelu wzrostu dywidendy Gordona sięga lat 50. XX wieku, kiedy ekonomiści **Myron J. Gordon** i **Elton Shapiro** pracowali nad nowymi sposobami wyceny akcji.

Po II wojnie światowej rynki kapitałowe przeżywały boom, a inwestorzy coraz bardziej interesowali się metodami wyceny akcji. W tamtych czasach dominowały tradycyjne podejścia, oparte na księgowych wskaźnikach, które nie były skuteczne.

Podczas jednej z licznych akademickich dyskusji Gordon i Shapiro zastanawiali się nad prostym, ale skutecznym wzorem, który mógłby pomóc inwestorom przewidywać wartość akcji na podstawie przewidywanych przyszłych dywidend. Wiedzieli, że dywidendy

są jednym z najważniejszych źródeł zwrotu dla inwestorów, zwłaszcza w długim okresie czasu.

Po wielu analizach Gordon zauważył, że jeśli dywidendy rosną w stałym tempie, to można stworzyć prosty wzór wyceny oparty na przyszłych wypłatach.

Model wyceny renty wieczystej wykorzystuje właśnie nieskończoność – jest on stosowany do wyceny np. takiej nieruchomości, która generujących stałe przepływy pieniężne w nieskończoność.

Wzór dla renty stałej:

$$P = C/r$$

- gdzie:
 - P – wartość bieżąca,
 - C – stała płatność,
 - r – stopa dyskontowa.

Aby wyjaśnić, skąd pochodzi taki wzór, posłużę się przykładem praktycznym:

Nieruchomość (np. działak adzierżawiona pod wyciąg narciarski) generuje co roku dochód w kwocie 10 000 zł. Niestety, wiemy już, że istnieje inflacja. Załóżmy, że roczna inflacja wyniesie średnio 2% w każdym roku. Jaką wartość przychodów będzie można otrzymać z tytułu dzierżawy wnieskończonym okresie czasu?

W pierwszym roku otrzymamy kwotę 10 000 zł. W drugim roku będzie to już 10 000 zł / (1+2%) czyli w przeliczeniu na „dzisiejsze” pieniądze będzie to wartość 9 803,92 (pomimo, że w banknotach otrzymamy 10 000 zł, to jednak będzie za nie można kupić tyle rzeczy, ile dzisiaj można kupić mając 9 803,92 zł.

Spróbujmy rozpisać ile wyniesie suma takich nieskończonych płatności uwzględniając wartość pieniądza w czasie:

$$\text{Suma dochodów} = 10\,000 + \frac{1}{(1,03)^1} + \frac{1}{(1,03)^2} + \frac{1}{(1,03)^3} + \frac{1}{(1,03)^4} + \frac{1}{(1,03)^5} + \frac{1}{(1,03)^n} + \dots$$

gdzie n oznacza nieskończoność.

Kolejne kwoty płatności dla wybranych lat obliczono w arkuszu kalkulacyjnym. Wyliczenia przedstawia tabela.

Rok	Dochód
1	9708,74
2	9425,96
3	9151,42
4	8884,87
5	8626,09
6	8374,84
7	8130,92
8	7894,09
9	7664,17
10	7440,94
11	7224,21
12	7013,80
13	6809,51
14	6611,18
15	6418,62
16	6231,67
17	6050,16
18	5873,95
19	5702,86
20	5536,76
30	4119,87
40	3065,57
50	2281,07
60	1697,33
70	1262,97
80	939,77
90	699,28
100	520,33
200	27,07
300	1,41
400	0,07
500	0,00

1000	0,00
------	------

Z obliczeń wynika, że chociaż za 20 lat dzierżawca działki otrzyma (w banknotach) kwotę 10 000 zł, to jednak siła nabywcza tego pieniądza będzie niemal o połowę niższa, czyli za kwotę tę będzie można kupić tyle rzeczy, ile dzisiaj można kupić dysponując zaledwie kwotą około 5 tys zł.

Wartość kwoty 10 000 zł za 400 lat wyniesie tylko 7 groszy, a za 500 lat – już nic nie będzie prawie nic warta.

Jak widać, dochód realny zmniejsza się co roku, aż wreszcie zanika. Dlatego też można obliczyć sumę takich malejących dochodów aż do nieskończoności. Teoretycznie, kwota ta się non stop zmniejsza, jednak nigdy nie osiągnie ona zera. Jednak jak wiadomo, za wartość np. jedną milioną grosza, nie można raczej nic kupić.

Zastosujmy podany wzór na wartość dzierżawionej działki (wzór na rentę wieczystą).

Suma uzyskiwanych dochodów z dzierżawy działki może określać jej wartość (zakładamy, że działka jest warta tyle, ile może ona przynieść dochodu od dzisiaj do nieskończoności). Zgodnie z obliczeniami będzie to kwota:

$$P = C/r = 10\,000 / 3\% = 10\,000 / 0,03 = 333\,333,33 \text{ zł.}$$

Jak jeszcze inaczej można zinterpretować otrzymany wynik? Jeżeli ktoś by zdecydował, że zamiast dostawać co roku 10 000 zł, chce otrzymać te nieskończone płatności już dzisiaj, to powinien on otrzymać kwotę 333 333,33 zł.

Jednak w ekonomii nic nigdy nie jest jednoznaczne. Wystarczy, że przy obliczeniach założymy inną przewidywaną stopę inflacji, i już kwota ta będzie inna. Nikt nie potrafi przewidzieć przyszłości, więc tak naprawdę można jedynie próbować prognozować, ile wyniesie inflacja w przyszłości, czyli szacować stopę dyskontową (oznaczoną we wzorze r).

Kolejne obliczenia (wykonane również w arkuszu kalkulacyjnym, oczywiście wszystko można policzyć za pomocą kalkulatora, jednak zajęłoby to bardzo dużo czasu) wykonano aby sprawdzić, jakie wartości uzyska się, zakładając cały czas dochód z dzierżawy w kwocie 10 000 zł. jednak przy założeniu różnych stóp dyskonta: od 1 % do 10 %.

Stopa dyskonta	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10 %
Wartość renty wieczystej	1 000 000	500 000	333 333	250 000	200 000	166 667	142 857	125 000	111 111	100 000

Jak widać, w zależności od przyjętej stopy dyskonta, wyniki znacząco się różnią. Która wartość jest więc prawdziwa: każda i żadna, w zależności od tego, jakie będą warunki ekonomiczne w przyszłości, jak szybko pieniądź będzie tracił na wartości, takie działka osiągnie przychody.

Nasze obliczenia są więc wyłącznie szacunkami – z większym lub mniejszym przybliżeniem. Oczywiście można sprawdzić np., ile wynosiła średnia stopa inflacji w Polsce w ciągu ostatnich np. 20 lat. Według danych Głównego Urzędu Statystycznego średnia inflacja w latach 2005-2024 wynosiła 4,1%. Zakładając, że w ciągu kolejnych lat będzie podobnie, można założyć, że działka łącznie przyniesie około (ach, znowu te szacunki) 250 000 zł.

Jednak gdy wypytałem dziadka dokładnie o warunki dzierżawy okazało się, że dziadek nie dostaje co roku takiej samej kwoty – ponieważ w umowie uwzględniono również wpływ inflacji i dziadek co roku dostaje kwotę większą o 2%. Jeżeli do naszego przykładu dołożymy taki warunek, wówczas okaże się, że w kolejnych latach z tytułu dzierżawy działki otrzymamy następujące kwoty:

Pierwszy rok – 10 000 zł

Drugi rok – 10 200 zł

Trzeci rok – 10 612 zł

Dziesiąty rok – 12 190 zł

Dwudziesty rok – 14 859 zł

Czy w przypadku takiej umowy dzierżawy również można obliczyć, ile wyniesie suma otrzymanych kwot od dzisiaj do nieskończoności? Tak! I jest na to wzór:

Rozszerzona wersja wzoru z rosnącą rentą wieczystą:

$$P = C/r-g \quad \text{gdzie } g \text{ to stopa wzrostu płatności.}$$

Zakładamy, że co roku otrzymujemy kwotę powiększoną o 2% w stosunku do kwoty z zeszłego roku, przy czym w pierwszym roku dochód wynosi 10 000 zł. Jednak występuje

inflacja. Załóżmy, że średnio wynosi ona 3,5%. Ile wówczas otrzymamy dochodu (po uwzględnieniu dyskonta) w nieskończonym okresie czasu?

$$\text{Wartość płatności w nieskończonym okresie wyniesie: } \frac{10\,000}{(3,5\% - 2\%)} = \frac{10\,000}{1,5\%} = 666\,667$$

Można również wyobrazić sobie sytuację, w której dany model nie zadziała. Załóżmy, że co roku otrzymywany dochód rośnie nie o 2% lecz o 8%, podczas gdy stopa dyskonta jest nadal szacowana na poziomie 3,5%.

Obliczenia wówczas przedstawiałyby się następująco:

$$\text{Wartość płatności w nieskończonym okresie wyniesie: } \frac{10\,000}{(3,5\% - 8\%)} = \frac{10\,000}{-5,5\%} = -181\,818$$

Co taki wynik oznacza? Że otrzyma się ujemną kwotę pieniędzy? Na pewno nie (o ile antymateria istnieje, o tyle nie można mówić o anty-pieniędzach). Nie oznacza to również, że teraz mamy jakiś dług. Świadczy to o tym, że w takim przypadku wzór nie działa.

Jest to sytuacja podobna do przykładu z krową, która codziennie daje mniej mleka – wówczas można obliczyć, ile da mleka łącznie w nieskończonym czasie. Podobnie, jeżeli zakładamy, że co roku otrzymamy mniejszą ilość realnych pieniędzy, wówczas również można obliczyć, ile ich otrzymamy w sumie w nieskończonym okresie czasu.

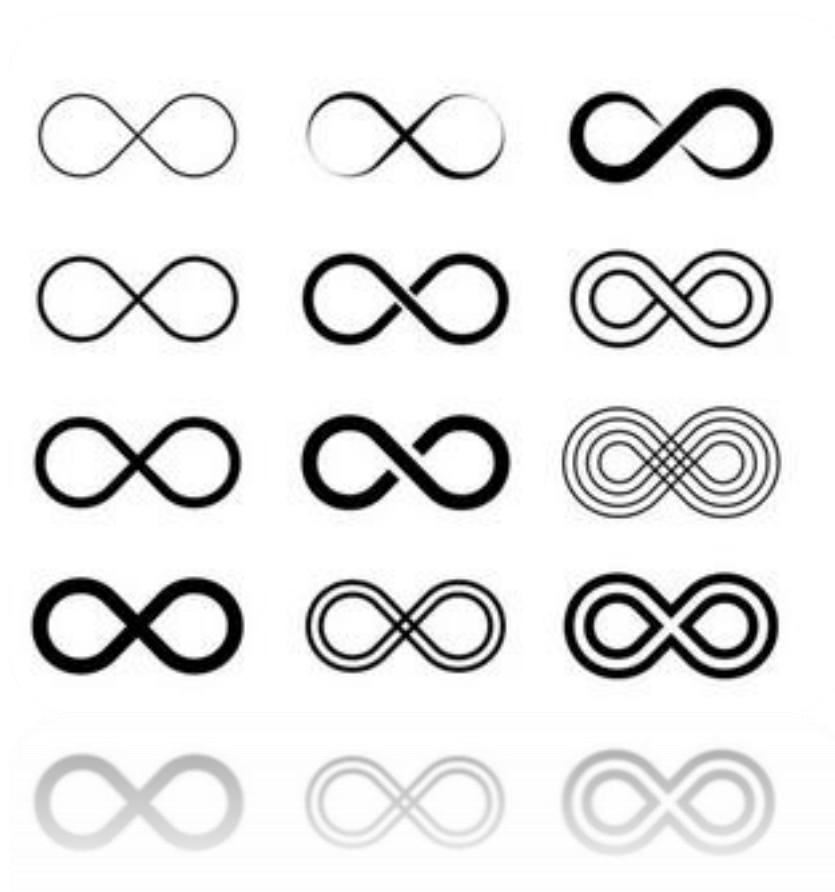
Jednak w sytuacjach gdy:

- a) krowa dawałaby codziennie więcej mleka, albo nawet dawałaby codziennie tyle samo mleka, wówczas w nieskończonym czasie dałaby ona ... nieskończoną ilość mleka;
- b) tak samo, jeżeli co roku otrzymywałoby się kwotę większą, i to na tyle większą, że wzrost ten przekraczałby inflację, wówczas analogicznie: w nieskończonym okresie czasu otrzymano by nieskończoną liczbę pieniędzy.

Zdjęcie z excela z obliczeniami:

31

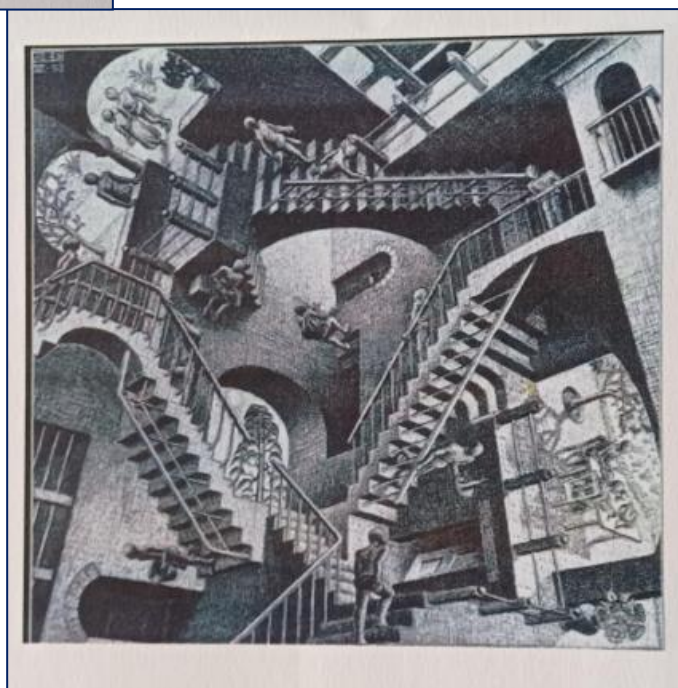
Nieskończoność w sztuce

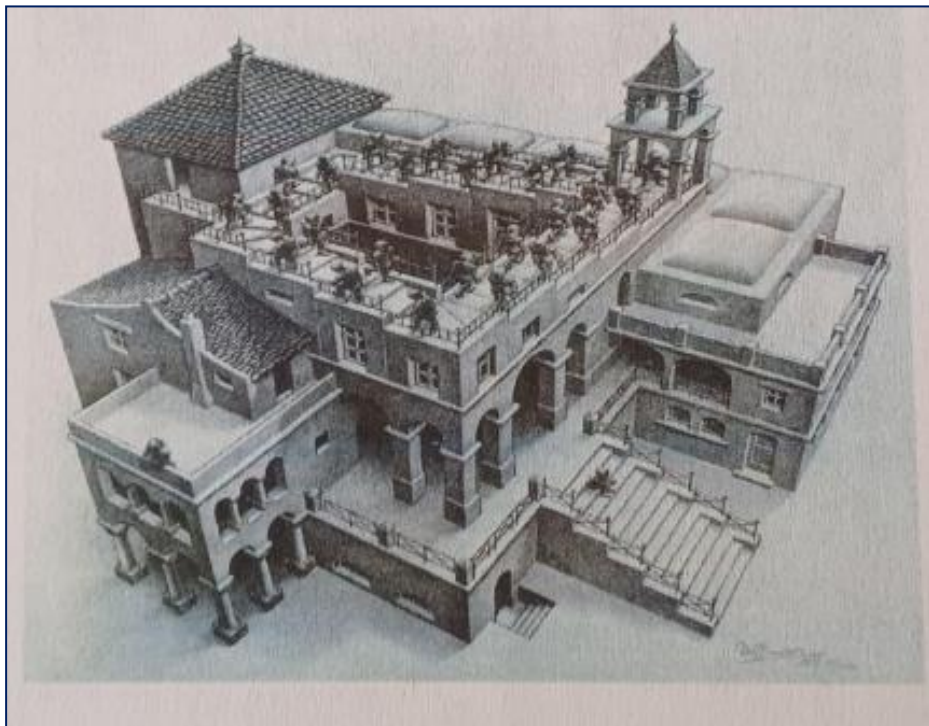
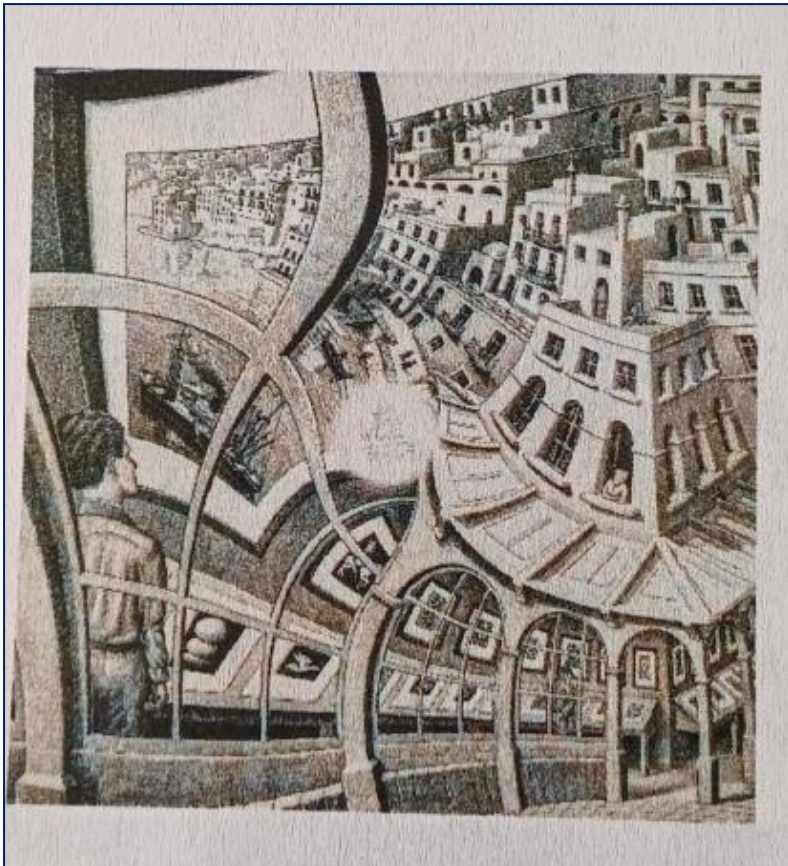


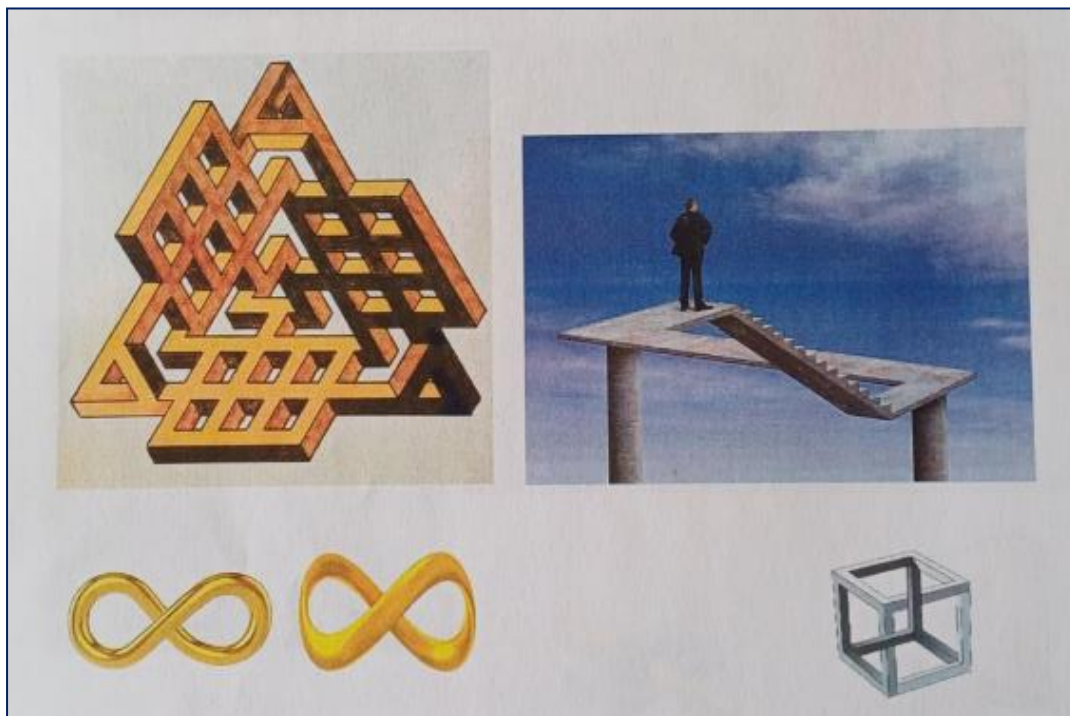
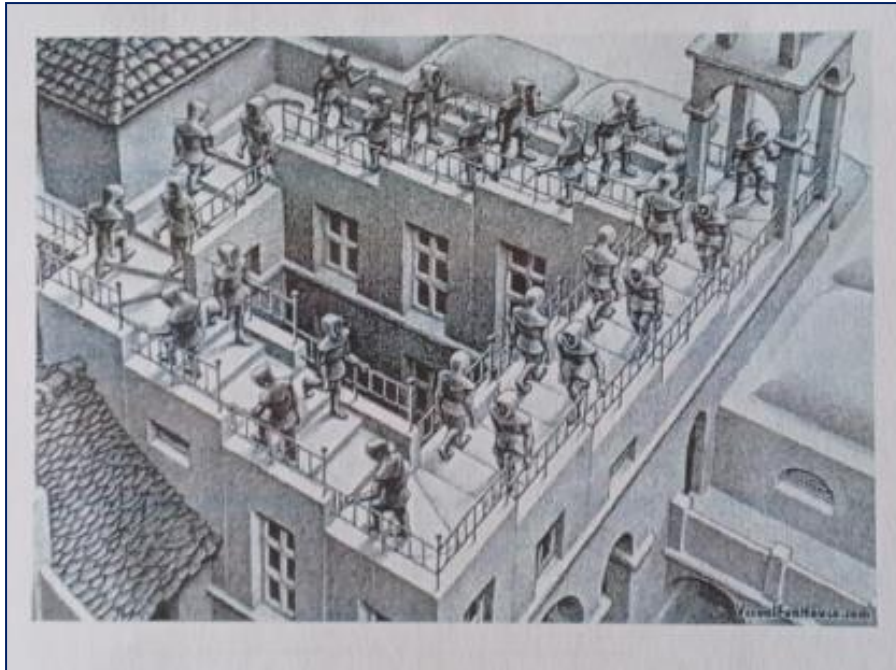
Fresk Rafaela Santi „Szkoła Ateńska”, jest sławnym przykładem zastosowania perspektywy. Przedstawia on wszystkich najważniejszych greckich mędrców. Możemy tu zobaczyć wielu klasycznych filozofów zgromadzonych w jednym miejscu i otoczonych wielką architektoniczną ramą. To dzieło jest między innymi sztuką czasową, każdy z filozofów zamrożony w rysunkowej nieskończoności. Ale ... tam jest też sam stary Euklides! Rafael umieścił go po prawej stronie obrazu, przykucniętego, otoczonego przez uczniów, którym wykłada, używając cyrkla do wykreślenia kątów na małej płytce. Jest też Pitagoras – siedzi w przeciwnym kącie, pisząc cyfry do księgi, któremu znajdujący się obok uczeń podtrzymuje tablicę. Pitagoras i Euklides są umiejscowieni w dolnych rogach dzieła i są punktami wyjścia dwóch wyobrażonych linii prostych, które biegną do środka kompozycji, dokładnie w miejsce, w którym stoją Platon i Arystoteles, a potem w stronę horyzontu, aż znikają w nieskończoności.



Sposób, w jaki Escher manipuluje przestrzenią, jest w świecie sztuki rzadko spotykany. Przekształcając przedmioty przez odbicia, rozciąganie, deformacje, rzutowanie i inne podobne transformacje. Escher odkrywa coraz bardziej skomplikowane wszechświaty, ukazując jednocześnie naturę bardzo zaawansowanych narzędzi matematycznych. Okresowe pokrycie płaszczyzny izometrycznymi figurami wywołuje wrażenie nieskończoności poprzez możliwość jego nieograniczonej kontynuacji. Escher, którego obsesją było wizualne uchwycenie nieskończoności, nie był w pełni zadowolony z tego sposobu jej przedstawiania, gdyż w praktyce ta zdolność do nieskończonego powiększania jest fikcją i dzieło musi skończyć się na brzegu. Escher dążył do przedstawienia nieskończoności w skończonej przestrzeni płótna, co doprowadziło go do stworzenia różnych prac, w których koła i kwadraty były ze sobą połączone.







Gustav Klimt – „Pocałunek”

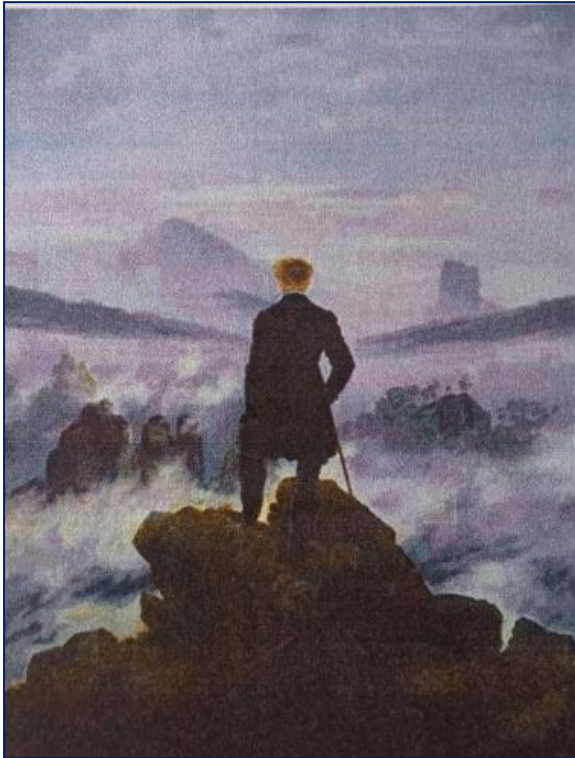
Dzieło to ukazuje splecioną parę otoczoną złotymi ornamentami, tworząc wrażenie wiecznego, nieskończonego uczucia miłości. Klimt, jako przedstawiciel secesji, często wykorzystywał w swoich pracach symbolikę nieskończoności.



Jacek Malczewski – „Błędne koło”. Polski malarz symbolista w tym dziele ukazuje postacie wirujące w tanecznym kręgu, co może odnosić się do nieskończoności ludzkiego losu i cykliczności życia.



Caspar David Friedrich – „Wędrowiec nad morzem mgły”. Ten romantyczny obraz przedstawia postać stojącą na szczycie skały, spoglądającą na rozległe, mgłą spowite pejzaże. Symbolizuje to ludzkie dążenie do zrozumienia nieskończoności natury i egzystencji.



CYTATY Z LITERATURY

➤ **Stanisław Lem, „Szpital Przemienienia"**

"Medycyna może być niezłym oknem na nieskończoność."

➤ **Brandon Mull, „Gwiazda Wieczorna wschodzi"**

„Cierpliwość naśladuje nieskończoność, a z nieskończonością nie da się wygrać pojedynku na spojrzenia. Nieważne, jak długo wytrwasz, ona dopiero się rozkręca."

➤ **Johann Wolfgang von Goetheg w tłumaczeniu polskim, „Cierpień młodego Wertera"**

"Ach, jakże wówczas tęskniłem, by unieść się na skrzydłach żurawia, płynącego nade mną, wzlecieć ku wybrzeżom nieogarnionego morza i napić się z perlącego się pucharu nieskończoności onego nektaru życia."

➤ **Juliusz Słowacki, „Kordian"**

„Ziemia – to plama na nieskończoność błękitu; ciemna gwiazda, w słonecznych gwiazd świecie, grób odwieczny potomków Adama." .

➤ **Olga Tokarczuk, "Szafa":**

„Zobacz, oto jest Nic, które zawiera nieskończoną liczbę wymiarów wszystkiego."

➤ **Stanisław Ignacy Witkiewicz, „Tumor Mózgowicz"**

„Nad zrębem planety,

Pośród gwiazdnej nocy,

Szereg alefów w nieskończoność pełnie.

I nieskończoność, unieskończoniona

Zamiera w sobie, przez siebie zdradzona."

Podsumowując, nieskończoność to pojęcie, które od wieków budziło zarówno podziw, jak i lęk. Starożytni Grecy unikali jej, traktując ją jako zagrożenie dla spójności ich matematyki i filozofii. Odkrycie liczb niewymiernych przez Pitagorejczyków, nieskończonego zbioru liczb pierwszych przez Euklidesa czy późniejsze teologiczne rozważania o nieskończoności jako atrybucie Boga ukazują różnorodne sposoby, w jakie ludzkość próbowała zmagać się z koncepcją nieskończoności.

Dopiero rozwój rachunku różniczkowego i całkowego w XVII wieku pozwolił na bardziej precyzyjne operowanie nieskończonością, choć jej prawdziwe oswojenie przyszło dopiero

w XIX wieku wraz z pracami Georga Cantora.

To właśnie Cantor dokonał rewolucji, pokazując, że nieskończoność nie jest jednolita – istnieją różne jej „rozmiary”. Jego teoria mnogości otworzyła nowe ścieżki w matematyce, wpływając nie tylko na jej rozwój, ale i na informatykę, logikę oraz inne nauki ścisłe. Choć w swoich czasach był krytykowany i niezrozumiany, dziś uznaje się go za jednego z najwybitniejszych matematyków w historii. Nieskończoność stała się fundamentem współczesnej matematyki, umożliwiając rozwiązywanie wielu dawnych paradoksów i prowadząc do nowych, fascynujących pytań, takich jak hipoteza continuum.

Co więcej, nieskończoność nie jest tylko abstrakcyjnym pojęciem matematycznym – jej zastosowania można dostrzec w wielu dziedzinach życia. Ekonomia wykorzystuje nieskończoność w modelach finansowych, takich jak renta wieczysta, a sztuka czerpie z niej inspiracje, czego przykładem mogą być dzieła Eschera czy renesansowe freski Rafaela. Nawet literatura i filozofia często podejmują temat nieskończoności, rozważając jej wpływ na ludzką egzystencję.

Ostatecznie, nieskończoność to nie tylko zagadka matematyczna, ale także symbol nieograniczonych możliwości i niekończących się poszukiwań wiedzy. Jej historia pokazuje, jak zmieniało się nasze postrzeganie rzeczywistości i jak wielką rolę odgrywa nieskończoność w kształtowaniu naszej nauki i kultury. Niezależnie od tego, czy analizujemy ją w kontekście teorii mnogości, geometrii fraktalnej czy ekonomii, jedno jest pewne – nieskończoność nadal pozostaje jednym z najbardziej fascynujących pojęć, które inspiruje kolejne pokolenia badaczy i myślicieli. Zainspirowała również i mnie, dzięki czemu powstała ta praca.

Bibliografia

1. Ewelina Nojszewska, *Podstawy ekonomii*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2005
2. Maria Gorczyńska, Krystyna Znaniecka, *Zarządzanie finansami przedsiębiorstw*, Stowarzyszenie Księgowych w Polsce, Warszawa 2008
3. Maria Isabel Binimelis Bassa (tłumaczenie Dorota Sokołowska), *Nowy sposób widzenia świata, Geometria fraktalna*, Editec 2023, Świat jest matematyczny
4. Wiesław Witold, *Matematyka i jej historia*, Opole, Nowik 1997
5. Julia Ścisłowska, *Jak wygląda pozaskończona rzeczywistość?* Delta 9/2024
6. Mirosław Lachowicz, „Experyment” z nieskończonością, Delta 8/2023
7. Marek Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, SCRIPT, Warszawa 2006
8. Michał Korch, *Nieskończoność 1: Hotel Hilberta*, Delta 1/2019
9. Michał Korch, *Nieskończoność 0*, Delta 1/2029
10. Michał Korch, *Co to jest: Równoliczność*, Delta 4/2019
11. Michał Korch, *Nieskończoność: 3. Jak policzyć nieskończone?*, Delta 5/2019
12. Michał Korch, *Nieskończoność: 5. Zbiory duże*, Delta 8/2019
13. Michał Korch, *Nieskończoność: 6. Zaskujące rozwiązanie*, Delta 10/2019
14. Michał Korch, *Nieskończoność: 8. Nieskończoność nieskończoności*, Delta 1/2020
15. Nieskończoność – Wikipedia.org.pl
16. Georg Cantor - Wikipedia.org.pl