I Liceum Ogólnokształcące im. Bartłomieja Nowodworskiego
w Krakowie

Wiktoria Maciejowska

Część całkowita, część ułamkowa oraz cecha górna liczby rzeczywistej

Praca matematyczna
napisana pod opieką:
mgr Daniela Danieluka

Kraków 2024

Spis treści

Wstęp **1**

1 Cecha, sufit oraz część ułamkowa liczby rzeczywistej i ich własności **3**

1.1 Definicje i podstawowe własności 3

1.2 Funkcje podłogi, sufitu i mantysy 4

1.3 Pozostałe własności części całkowitej liczby rzeczywistej 7

2 Równania i nierówności **9**

Bibliografia **12**

Wstęp

Celem tej pracy jest zgłębienie różnych aspektów wspomnianych w tytule pojęć, zarówno teoretycznych, jak i praktycznych, w tym poznanie różnego rodzaju własności i zależności, które są z nimi związane. Narzędzia te mogą znaleźć zastosowanie w rozwiązywaniu problemów olimpijskich.

Na początku pierwszego rozdziału zostały wprowadzone definicje i podstawowe własności podłogi, sufitu i mantysy. Następnie zostały wprowadzone funkcje związane z wcześniej wspomnianymi pojęciami. Na końcu tego rozdziału zostały przybliżone mniej intuicyjne własności części całkowitej. W drugim rozdziale na przykładowych zadaniach zostały przedstawione sposoby radzenia sobie z problemami, w których występuje część całkowita, część ułamkowa oraz cecha górna liczby rzeczywistej.

Rozdział 1

Cecha, sufit oraz część ułamkowa liczby rzeczywistej i ich własności

1.1 Definicje i podstawowe własności

Definicja 1. (cecha/podłoga liczby rzeczywistej)
Największą liczbę całkowitą, nie większą niż liczba rzeczywista r nazywamy cechą (podłogą lub częścią całkowitą) liczby rzeczywistej r. Oznacza się ją symbolem $[r]$ lub $\lfloor r \rfloor$.

Przykłady. $[4] = 4$, $[-9] = -9$, $[\pi] = 3$, $[7\frac{8}{11}] = 7$, $[-2\frac{17}{37}] = -3$

Twierdzenie 1. *Dla każdej liczby rzeczywistej r istnieje dokładnie jedna taka liczba całkowita c, że $c \leq r < c + 1$.*

Z twierdzenia 1. wynikają poniższe własności.

Własność 1. *Dla każdej liczby rzeczywistej r znajdziemy takie a że, $r = [r] + a$, przy czym a należy do przedziału $\langle 0, 1)$*

Własność 2. *Nierówność $[r] \leq r < [r]+1$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej r.*

Własność 3. *Dla każdej liczby rzeczywistej r i liczby całkowitej c zachodzi równość $[r + c] = [r] + c$.*

Dowód. Z własności 2. dostajemy $[r] \leq r < [r] + 1$ skąd wynika po przekształceniu, że $[r]+c \leq r+c < [r]+1+c$. Następnie korzystamy z twierdzenia 1., więc $[r+c] = [r]+c$. □

Definicja 2. (sufit/cecha górna liczby rzeczywistej)
Sufitem lub cechą górną liczby rzeczywistej r nazywamy najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od niej samej. Oznacza się ją symbolem $\lceil r \rceil$.

Przykłady. $\lceil 23 \rceil = 23$, $\lceil -8 \rceil = -8$,$\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 7\frac{11}{97} \rceil = 8$ $\lceil -2\frac{6}{27} \rceil = -2$

Własność 4. *Nierówności $\lfloor r \rfloor \leqslant r \leqslant \lceil r \rceil$ są prawdziwe dla wszystkich liczb rzeczywistych r.*

Dowód. Wynika to wprost z definicji jako, że podłoga jest największą liczbą całkowitą nie większą niż r, natomiast sufit jest najmniejszą liczbą całkowitą, nie mniejszą od niej samej. □

Własność 5. *Poniższa nierówność podwójna jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej r.*

$$\lceil r \rceil - 1 < r \leqslant \lceil r \rceil$$

Oznacza ona, że różnica sufitu liczby rzeczywistej r i 1 jest mniejsza niż sama liczba r, a jednocześnie r jest mniejsze lub równe swojemu sufitowi.

Dowód. Prawdziwośc drugiej nierówności wnioskujemy wprost z definicji ponieważ $r \leq \lceil r \rceil$, przy czym $r \in \mathbf{R}$. Wiemy, że każdą liczbę rzeczywistą r jesteśmy w stanie przedstawić w postaci $r = \lceil r \rceil - \eta$ przy czym $\eta \in \langle 0, 1)$, biorąc ten fakt pod uwagę dochodzimy do wniosku, że $\lceil r \rceil - 1 < r$. □

Definicja 3. (część ułamkowa/mantysa liczby rzeczywistej)
Częścią ułamkową lub mantysą liczby rzeczywistej nazywamy liczbę rzeczywistą r pomniejszoną o cechę tej liczby oraz oznaczamy w następujący sposób $\{r\} = r - [r]$.

Przykłady. $\{6\} = 0$, $\{-67\} = 0$, $\{4\frac{81}{97}\} = \frac{81}{97}$, $\{-3\frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$

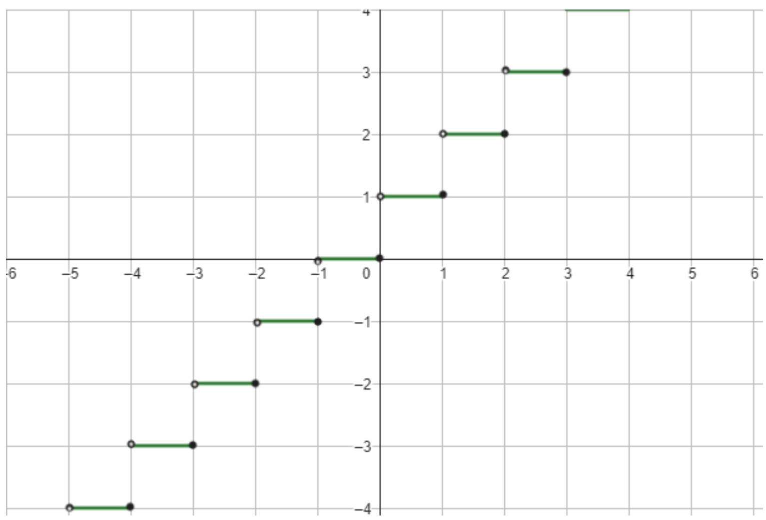
Własność 6. *Dla każdej liczby rzeczywistej r prawdziwa jest nierówność jej mantysy* $0 \leq \{r\} < 1$.

Dowód. Własność ta bezpośrednio wynika z definicji części ułamkowej. Również możemy zapisać dowolną liczbę rzeczywistą r w postaci $r = [r] + \eta$. Korzystamy ponownie z definicji mantysy i zapisujemy $\{r\}$ jako $\{r\} = [r] + \eta - [r] = \eta$, przy czym $\eta \in \langle 0, 1)$. □

1.2 Funkcje podłogi, sufitu i mantysy

Korzystając z definicji powyższych pojęć definiujemy funkcje $x \mapsto \lceil x \rceil$, $x \mapsto \{x\}$ oraz $x \mapsto [x]$, które będziemy rozpatrywać w zbiorze liczb rzeczywistych.

Poniżej został przedstawiony wykres funkcji $f(x) = \lceil x \rceil$



Własność 7. ***Funkcja*** $f(x) = \lceil x \rceil$ ***ma następujące własności***

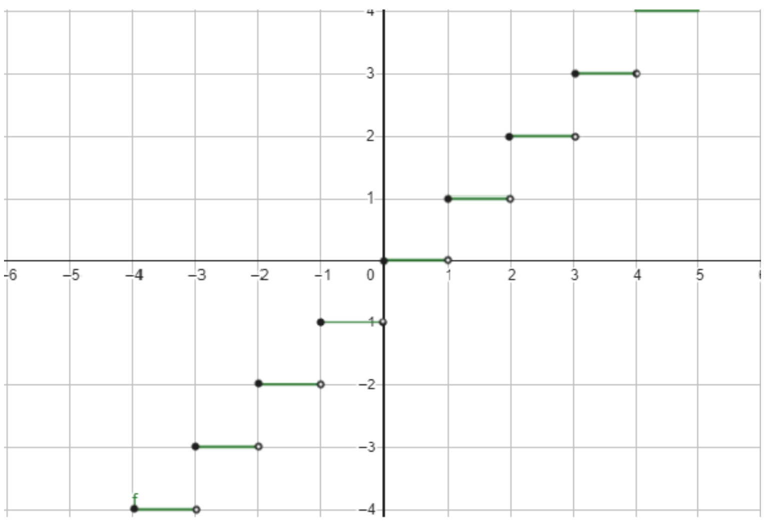
a) Do dziedziny funkcji f należą wszystkie liczby rzeczywiste.

b) Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb całkowitych, ponieważ sufit liczby rzeczywistej jest zawsze liczbą całkowitą.

c) Miejscami zerowymi są wszystkie liczby z przedziału $(-1, 0\rangle$.

d) Funkcja f jest niemalejąca.

Na poniższym rysunku znajduje się wykres funkcji $g(x) = [x]$



Własność 8. ***Poniżej znajdują się własności funkcji*** $g(x) = [x]$

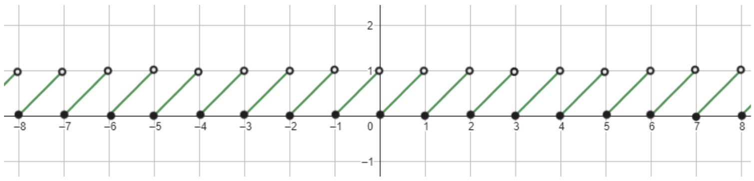
a) Dziedzina funkcji g to zbiór liczb rzeczywistych.

b) Zbiorem wartości funkcji g jest zbiór liczb całkowitych ponieważ, podłoga liczby rzeczywistej jest zawsze liczbą całkowitą.

c) Miejsca zerowe funkcji g zawierają się w przedziale $\langle 0, 1)$.

d) Funkcja jest niemalejąca.

Poniżej został narysowany wykres funkcji $h(x) = \{x\}$



Własność 9. ***Do własności funkcji*** $h(x) = \{x\}$ ***należą***

a) dziedziną funkcji h jest zbiór liczb rzeczywistych,

b) zbiór wartości funkcji h to przedział $\langle 0, 1)$,

c) funkcja h(x)=$\{x\}$ jest okresowa z okresem podstawowym równym 1.

d) z poprzedniej własności wynika, że miejscami zerowymi są wszystkie liczby ze zbioru liczb całkowitych.

1.3 Pozostałe własności części całkowitej liczby rzeczywistej

Własność 10. *Nierówność* $[m+n] \geq [m]+[n]$ *jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych m,n.*

Dowód. Skorzystamy z własności 1. i zapiszmy m i n jako $m = [m] + \mu$ $n = [n] + \eta$, $\eta, \mu \in \langle 0, 1)$ Wtedy $m + n = [m] + [n] + \mu + \eta$, przy czym $\mu + \eta \in \langle 0, 2)$. Rozważmy teraz dwa przypadki.

Z faktu, że $\mu + \eta < 1$ otrzymujemy $[m+n] = [m]+[n]$. W tej sytuacji nierówność przedstawiona w tezie jest prawdziwa.
Jeśli jednak $\mu + \eta \geq 1$, to $[m+n] = [m]+[n]+1$. Również w tym przypadku nierówność z dowodzonej własności jest zachowana, co kończy dowód. □

Własność 11. *Nierówność* $[m]+[n]+[m+n] \leq [2m]+[2n]$ *jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych m, n.*

Dowód. Podobnie jak w poprzedniej własności korzystamy z własności 1. i zapisujemy liczby m, n w postaci $m = [m] + \mu$, $n = [n] + \eta$, przy czym $\mu, \eta \in \langle 0, 1)$. Wtedy $m + n = [m] + [n] + \mu + \eta$. Rozważmy teraz dwa przypadki.

Jeżeli $\mu+\eta < 1$, to wtedy $[m+n] = [m]+[n]$. Przekształcamy równanie przez obustronne dodanie $[m], [n]$ otrzymujemy, więc $[m+n]+[m]+[n] = 2[m]+2[n]$. Wiadomo, że $2m \geq 2[m]$ oraz $2n \geq 2[n]$, skąd wynika, że $[2m] \geq 2[m]$ i $[2n] \geq 2[n]$. Ostatecznie otrzymujemy w tym przypadku, że skoro $[m] + [n] + [m+n] = 2[m] + 2[n]$ oraz $2[m] + 2[n] \leq [2m] + [2n]$, to

$$[m] + [n] + [m+n] \leq [2m] + [2n].$$

W tej sytuacji nierówność przedstawiona w tezie jest prawdziwa.

Wówczas gdy $\mu + \eta \geq 1$, to $[m+n] = [m] + [n] + 1$ stąd wynika równość

$$[m] + [n] + [m+n] = 2[m] + 2[n] + 1 \tag{1.1}$$

Wiemy, że w tym przypadku $\mu + \eta \geq 1$ skąd wiemy, że przynajmniej jedna z nierówności $\mu \geq \frac{1}{2}$, $\eta \geq \frac{1}{2}$ jest prawdziwa. Wtedy $2\mu \geq 1$ lub $2\eta \geq 1$. Zatem prawdziwe jest równanie $[2m] = [2[m]+2\mu] = 2[m]+1$ lub równanie $[2n] = [2[n]+2\eta] = 2[n]+1$. Otrzymujemy, więc nierówność $2[m] + 2[n] + 1 \leq [2m] + [2n]$ jest równoznaczna z nierównością przedstawioną w tezie na podstawie 1.1. Również w tym przypadku teza jest prawdziwa, co kończy dowód.

□

Własność 12. *Dla każdej liczby rzeczywistej r oraz liczby naturalnej n ($n \neq 0$), prawdziwe jest równanie* $[\frac{[r]}{n}] = [\frac{r}{n}]$.

Dowód. Wprowadzimy niewiadomą pomocniczą h. Niech będzie ona równa $h = [\frac{[r]}{n}]$. Korzystając z własności 2. zapisujemy nierówność

$$h \leq \frac{[r]}{n} < h + 1,$$

z której wynika nierówność podwójna $nh < [r] \leq n(h+1)$. Wiemy, że liczby $nh, n(h+1) \in \mathbf{Z}$, więc zachodzą nierówności $nh \leq r < n(h+1)$. Następnie możemy podzielić przez n, ponieważ $n \neq 0$. Otrzymujemy nierówności $h \leq \frac{r}{n} < h + 1$. Wiemy więc, że $h = [\frac{r}{n}]$, ale jednocześnie $h = [\frac{[r]}{n}]$ co oznacza, że $[\frac{[r]}{n}] = [\frac{r}{n}]$.

$\square$

Rozdział 2

Równania i nierówności

W poniższych przykładach przedstawimy jak rozwiązywać równania oraz nierówności z mantysą, sufitem i podłogą.

Zadanie 1. Rozwiązać równanie $[\frac{x+3}{4}] = \frac{3x+4}{7}$.

Rozwiązanie. Wprost z definicji podłogi wynika, że $\frac{3x+4}{7}$ musi być liczbą całkowitą. Następnie wprowadzamy pomocniczą niewiadomą m. Niech m będzie równe $m = \frac{3x+4}{7}$. Z tej zależności wyznaczamy niewiadomą x.

$$x = \frac{7m-4}{3}, \tag{2.1}$$

przy czym $m \in \mathbb{Z}$. Następnie korzystamy z własności 2. $\frac{3x+4}{7} \leq \frac{x+3}{4} < \frac{3x+11}{7}$ po obliczeniu wynika, że $x \in (-\frac{23}{5}, 1\rangle$. Nazwiemy ten przedział $\mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}$. Rozwiązań szukamy w przedziale $\mathbb{H}$, nasze rozwiązania również muszą mieć postać (2.1). Szukamy zatem takich liczb całkowitych m, żeby spełniały nierówność $-\frac{23}{5} < \frac{7m-4}{3} \leq 1$, po obliczeniu otrzymujemy, że $m \in (-\frac{7}{5}, 1\rangle$, przy czym $m \in \mathbb{Z}$ czyli $m \in \{-1, 0, 1\}$. Rozpatrzmy, więc przypadki

i. jeśli $m = -1$, to $x = -\frac{11}{3} \in \mathbb{H}$

ii. jeśli $m = 0$, to $x = -\frac{4}{3} \in \mathbb{H}$

iii. jeśli $m = 1$, to $x = 1 \in \mathbb{H}$

Zbiorem rozwiązań równania $[\frac{x+3}{4}] = \frac{3x+4}{7}$ jest zbiór $\{-\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 1\}$.

Zadanie 2. Rozwiązać równanie $2x - \sqrt{[x]} = 1$.

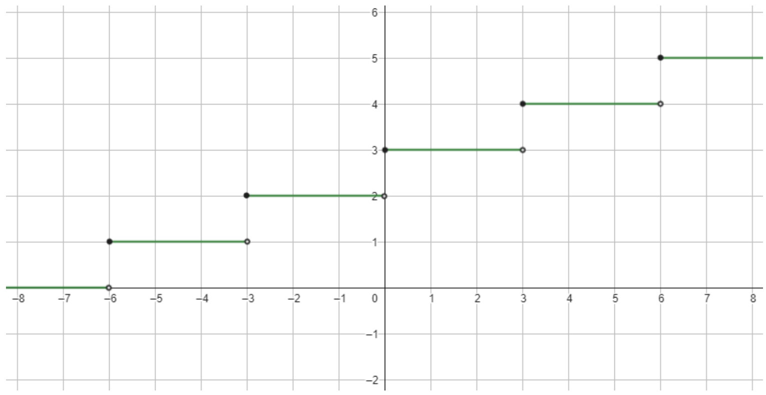
Rozwiązanie. Po prostym prostym przekształceniu otrzymymujemy równanie $2x - 1 = \sqrt{[x]}$. Jako, że $2x - 1$ jest równe pierwiastkowi, to $2x - 1 \geq 0$, więc $x \geq \frac{1}{2}$. Nasze równanie jest jednoznaczne z równaniem $[x] = 4x^2 - 4x + 1$. Korzystając z własności 1., przedstawiamy $[x]$ w postaci $[x] = x - \eta$,przy czym $\eta \in \langle 0, 1)$, więc $4x^2 - 5x + 1 = -\eta$. Stąd $-1 < x^2 - 5x + 1 \leq 0$. Po rozwiązaniu tej nierówności otrzymujemy zbiór rozwiązań nierówności $\langle \frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\rangle$. Po uwzględnieniu dziedziny równania zbiorem rozwiązań równania jest $(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\rangle$.

Zadanie 3. Rozwiązać równanie $[\frac{x+9}{3}] = [x+3]$.

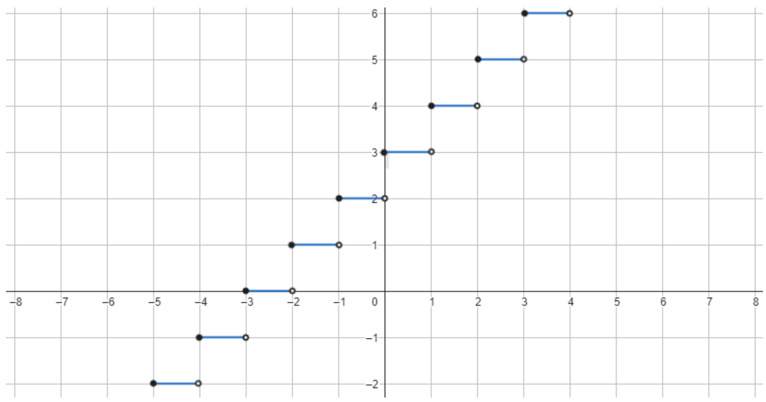
Rozwiązanie. Powyższe równanie możemy rozwiązać metodą graficzną. Definiujemy funkcje f oraz funkcje g. Rozpatrujemy wcześniej wspomniane funkcje w $\mathbf{R}$.

$$f(x) = [\frac{x+9}{3}], g(x) = [x+3]$$

Rysunek 1. $f(x) = [\frac{x+9}{3}]$



Rysunek 2. $g(x) = [x+3]$



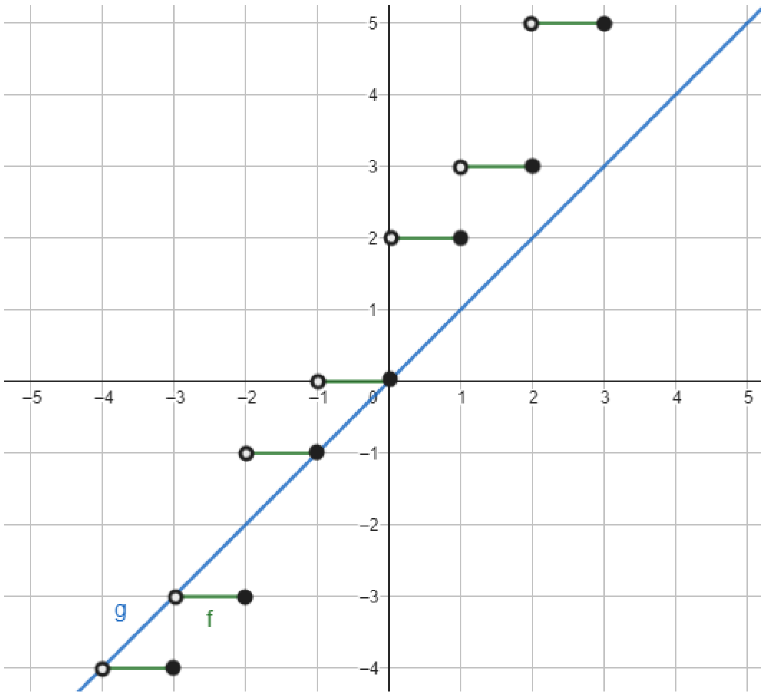
Zauważmy, że wykresy funkcji f i g pokrywają się w przedziale $\langle -1, 1\rangle$. Jest to zbiór rozwiązań naszej równości $2x - \sqrt{[x]} = 1$.

Zadanie 4. Rozwiązać nierówność $[3x+5] < \frac{8}{5}$.

Rozwiązanie. Zauważmy że, $[3x+5] \leq 1$, ponieważ $[3x+5] \in \mathbf{Z}$ i jest jednocześnie mniejsze od $\frac{8}{5}$. Jeżeli podłoga pewnej liczby rzeczywistej jest mniejsza lub równa 1 to oznacza, że ta liczba musi być mniejsza od 2. Z tego wynika, że $3x+5 < 2$, po rozwiązaniu otrzymujemy $x < \frac{7}{2}$, inaczej zapisując $x \in (-\infty, \frac{7}{2})$ jest to nasze rozwiązanie.

Zadanie 5. Rozwiązać nierówność $\lceil x \rceil + \lceil \frac{x}{2} \rceil \geq x$.

Rozwiązanie. Możemy rozwiązać naszą nierówność w sposób graficzny. Rozważmy funkcję f (wykres zielony) i funkcę g (wykres niebieski). Rozpatrujemy je w zbiorze liczb rzeczywistych. Niech funkcja f będzie zdefiniowana wzorem $f(x) = \lceil x \rceil + \lceil \frac{x}{2} \rceil$. Natomiast funkcja g będzie zdefiniowana przez $g(x) = x$.



Wykres funkcji f pokrywa się lub jest nad wykresem funkcji g w przedziale $(-2, +\infty)$. Zbiór ten jest naszym zbiorem rozwiązań nierówności $\lceil x \rceil + \lceil \frac{x}{2} \rceil \geq x$.

Zadanie 6. Rozwiązać równanie $[x^3] - [4x^2] - [4x] + 16 = \{x\}$.

Rozwiązanie. Zacznijmy od przekształcenia tego równania do postaci $[x^3] - [4x^2] - [4x] = \{x\} - 16$. Wiemy z definicji podłogi, że podłoga z dowolnej liczby rzeczywistej r jest liczbą całkowitą. Z faktu, że $[x^3], [4x^2], [4x] \in \mathbf{Z}$ wynika, że ich różnica również jest liczbą całkowitą, więc $\{x\} - 16 \in \mathbf{Z}$. Jeżeli $\{x\} - 16 \in \mathbf{Z}$, to $\{x\}$ musi być też liczbą całkowitą. Wiemy z definicji mantysy, że jedyną liczbą całkowitą jaką może być mantysa jest 0, ponieważ $\{x\} \in \langle 0, 1)$. Biorąc pod uwagę te wszystkie informacje wiemy, że $\{x\} = 0$, wynika z tego, że $x \in \mathbf{Z}$. Podłoga z dowolnej liczby całkowitej jest równa sobie samej. Stąd otrzymujemy równanie $x^3 - 4x^2 - 4x = -16$. Przenosimy wszystkie składniki na lewą stronę i stosujemy metodę grupowania wyrazów otrzymując $x^2(x-4)-4(x-4) = 0$ a następnie dostajemy $(x-4)(x^2-4) = 0$. Ostatecznie rozwiązaniem tego równania i naszego zadania są $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 4$.

Zadanie 7. Rozwiązać równanie $\{\frac{x-3}{5}\} = \frac{5}{7}$.

Rozwiązanie. Korzystając z definicji mantysy wiemy, że każdą mantysę dowolnej liczby rzeczywistej r można zapisać jako $\{r\} = r - [r]$. Naszym r jest $\frac{x-3}{5}$ więc , $\{\frac{x-3}{5}\} = \frac{x-3}{5} - [\frac{x-3}{5}]$. Podstawiając do równania $\{\frac{x-3}{5}\} = \frac{5}{7}$ otrzymujemy $\frac{x-3}{5} - [\frac{x-3}{5}] = \frac{5}{7}$. Po przekształceniu dochodzimy do wniosku, że $\frac{x-3}{5} - \frac{5}{7}$ jest liczbą całkowitą. Wprowadzimy sobie pomocniczą niewiadomą. Przyjmijmy, że $c = \frac{x-3}{5} - \frac{5}{7}$. Następnie wyznaczamy niewiadomą x.

$$x = 5c + \frac{46}{7}, \; c \in \mathbf{Z} \tag{2.2}$$

Korzystając z własności 2. możemy zapisać każdą liczbę r, w naszym przypadku $r = \frac{x-3}{5}$, w postaci $[r] \leq r < [r] + 1$,

$$\frac{x-3}{5} - \frac{5}{7} \leq \frac{x-3}{5} < \frac{7x-11}{35}$$

Zbiorem rozwiązań naszej nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych **R**. Szukamy zatem takich liczb rzeczywistych które mają postać (2.2). Takie liczby to $x = 5c + \frac{46}{7}$, przy czym $c \in \mathbf{Z}$, czyli (2.2) jest naszą odpowiedzią.

Zadanie 8. Rozwiązać nierówność $\{x + \frac{3}{4}\} > \frac{3}{11}$.

Rozwiązanie. Korzystamy z własności 9.c., czyli z tego, że funkcja $y = \{x\}$ jest okresowa. Otrzymujemy, zatem, że $x + \frac{3}{4} \in (c + \frac{3}{11}, c + 1)$, przy czym $c \in \mathbf{Z}$. Po obliczeniach wychodzi nam zbiór do którego należy x, $x \in (c - \frac{21}{44}, c + \frac{1}{4}), c \in \mathbf{Z}$. Jest to zbiór naszych rozwiązań.

Bibliografia

[1] Zbigniew Bobiński, Piotr Nodzyński, Adela Świątek, *Część całkowita liczby* Wydawnictwo AKSJOMAT, Toruń 2012.

[2] Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda, Marcin Kurczab, *Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Klasa 1. Zakres rozszerzony.* Wydawnictwo Oficyna Edukacyjna KRZYSZTOF PAZDRO, Warszawa 2019.