

# Zastosowanie metody wyczerpywania w przybliżaniu liczby $\pi$

Patrycja Kopiasz

Agata Łagosz

Wiktoria Paweła

Liceum Ogólnokształcące im. ks. Stanisława Konarskiego w  
Oświęcimiu

Praca matematyczna napisana pod opieką

mgr Pawła Pająka

konsultacja mgr Jolanta Pająk

# SPIS TREŚCI

Wstęp .....	3
Rozdział I .....	4
Metoda wyczerpywania.....	4
Aproksymacja pola koła.....	9
Aproksymacja objętości walca.....	11
Aproksymacja objętości kuli .....	13
Rozdział II.....	16
Pole $n$ – kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu $r = 1$ .....	16
Pole $n$ – kąta foremnego opisanego na kole o promieniu $r = 1$ .....	20
Podsumowanie .....	28
Bibliografia.....	29

# WSTĘP

Niniejsza praca została poświęcona metodzie wyczerpywania znanej również jako całka Eudoksa oraz jej zastosowaniu w przybliżaniu rozwinięcia dziesiętnej liczby  $\pi$ . Składa się ona z dwóch rozdziałów i podsumowania.

W rozdziale pierwszym została opisana metoda wyczerpywania wraz z dwoma przykładami jej zastosowania. Ponadto postawiona została otwarta hipoteza.

Rozdział drugi poświęcony został wyprowadzaniu dwóch wzorów. Pierwszy z nich to wzór na pole dowolnego  $n$  – kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu  $r = 1$ , a drugi na pole dowolnego  $n$  – kąta foremnego opisanego na tym samym kole. Zaznaczyć należy fakt, iż nie oparto się tutaj stricte na metodzie wyczerpywania. Metoda ta, stała się natomiast tutaj inspiracją do pokazania, jak za pomocą geometrii i algebry można „zobaczyć” rozwinięcie dziesiętne liczby  $\pi$  w bardzo ciekawy sposób. W niniejszym rozdziale zostały również postawione dwa pytania wraz z próbą odpowiedzi na nie.

Wszystkie rysunki zostały wykonane w programie Geogebra przy pomocy opiekunów, za co serdecznie dziękujemy.

# ROZDZIAŁ I

## Metoda wyczerpywania

Starożytni Grecy potrafili obliczać pola figur ograniczonych łamanymi zamkniętymi takimi jak trójkąt, czworokąt czy inny wielokąt z nich złożony. Również znane im były sposoby obliczania objętości brył ograniczonych prostymi ścianami takimi jak prostopadłościan. Problemem natomiast było obliczenie pola koła czy objętości kuli, walca i stożka. W V wieku p.n.e Antyfont z Ramnus zauważył, że podwajając kolejno liczbę boków wielokąta wpisanego w koło można przybliżyć się do jego pola. Kilka dekad później Eudoksos z Knidos dopracował tę metodę dziś znaną jako „metoda wyczerpywania”. W starożytności posługiwali się nią również Euklides oraz Archimedes. Metoda ta polegała na przybliżaniu pola czy objętości figury przez pola czy objętości figur prostszych, wpisywanych bądź też opisywanych na niej.

Treść metody wyczerpywania:

*„Jeżeli z jakiejś figury płaskiej (przestrzennej) odejmiesz więcej niż połowę, z tego co zostanie znowu odejmiesz więcej niż połowę i będziesz tak postępował dalej, to suma pól (objętości) odjętych części dowolnie dokładnie przybliży pole (objętość) tej figury.”*

### Analiza metody wyczerpywania

Metodę wyczerpywania zadaną jak wyżej przedstawimy jako dwa twierdzenia w sposób następujący:

Twierdzenie 1.

*Daną mamy figurę  $F$  o polu równym  $P$ . Jeżeli z tej figury odejmiemy najpierw figurę, której pole stanowi więcej niż połowa pola figury  $F$ , następnie z tej reszty co została, odejmiemy znów figurę, której pole stanowi więcej niż połowa pola tej reszty i postępując będziemy tak dalej, to suma pól odjętych kolejno figur będzie bardzo bliska polu figury  $F$ .*

Twierdzenie 2.

*Daną mamy bryłę  $F$  o objętości równej  $V$ . Jeżeli z tej bryły odejmiemy najpierw bryłę, której objętość stanowi więcej niż połowa objętości bryły  $F$ , następnie z tej reszty co została, odejmiemy znów bryłę, której objętość stanowi więcej niż połowa objętości tej reszty i postępuwać będziemy tak dalej, to suma objętości odjętych kolejno brył będzie bardzo bliska objętości bryły  $F$ .*

Uzasadnimy twierdzenie 1 (twierdzenie 2 - analogicznie) następującym rachunkiem:

Oznaczmy pole początkowej figury  $F$  jako  $P$ . Pola kolejno odejmowanych figur jako  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ . Należy zaznaczyć, iż odejmowane figury nie muszą być spójne. Założenie twierdzenia 1: „Daną mamy figurę  $F$  o polu równym  $P$ . Jeżeli z tej figury odejmiemy na początku figurę, której pole stanowi więcej niż połowa pola figury  $F$ , następnie z tej reszty co została, odejmiemy znów figurę, której pole stanowi więcej niż połowa pola tej reszty i postępuwać będziemy tak dalej” zapiszemy symbolicznie następująco:

niech:

$S_1 > \frac{1}{2}P$  co rozumiemy jako: pole  $S_1$  stanowi więcej niż połowa pola  $P$  wyjściowej figury  $F$ ,

$S_2 > \frac{1}{2}(P - S_1)$  co rozumiemy jako: pole  $S_2$  stanowi więcej niż połowa pola reszty co pozostała z odjęcia pola  $S_1$  figury od pola  $P$  figury wyjściowej  $F$ ,

$S_3 > \frac{1}{2}(P - S_1 - S_2) = \frac{1}{2}(P - (S_1 + S_2))$  co rozumiemy jako: pole  $S_3$  stanowi więcej niż połowa pola reszty, która pozostała przez odjęcie z pola  $P$  sumy pól  $S_1$  oraz  $S_2$ , aż w końcu:

$$S_n > \frac{1}{2}(P - S_1 - S_2 - S_3 - \dots - S_{n-1}) = \frac{1}{2}(P - (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1})),$$

co rozumiemy jako: pole  $S_n$  – tej odejmowanej figury stanowi więcej niż połowa pomiędzy różnicą pola  $P$  figury  $F$  a sumą pól od  $S_1$  aż do  $S_{n-1}$  wszystkich kolejno odejmowanych figur.

Tezą naszego twierdzenia jest:

*„suma pól odjętych kolejno figur będzie bardzo bliska polu figury  $F$ ”,*

co symbolicznie zapiszemy jako:

$$P \geq S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots \geq P \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) = P.$$

Aby uzasadnić powyższe nierówności i równanie podzielimy je na trzy etapy.

Etap 1.

Pierwsza nierówność:

$$P \geq S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots$$

wynika z faktu, że z pola  $P$  figury  $F$  odejmowaliśmy kolejno rozłączne figury o polach  $S_1, S_2, S_3, S_4$  i tak dalej ...

Etap 2.

Drugą nierówność:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots \geq P \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right),$$

wykażemy następująco (poprzez indukcję):

z założenia wiemy, że:  $S_1 > \frac{1}{2}P$  oraz  $S_2 > \frac{1}{2}(P - S_1)$ . Następnie:

$$S_1 + S_2 > S_1 + \frac{1}{2}(P - S_1) = S_1 + \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}S_1 >$$

$$> \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P\right) = \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}P,$$

czyli:  $S_1 + S_2 > \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}P$ . Idąc dalej, otrzymujemy:

$$S_1 + S_2 + S_3 > S_1 + S_2 + \frac{1}{2}(P - (S_1 + S_2)) = S_1 + S_2 + \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 =$$

$$= \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}(S_1 + S_2) > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{4}P\right) = \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P,$$

czyli:  $S_1 + S_2 + S_3 > \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P$ . Dla czterech składników rachunek będzie

następujący:

$$\begin{aligned}
S_1 + S_2 + S_3 + S_4 &> S_1 + S_2 + S_3 + \frac{1}{2}(P - (S_1 + S_2 + S_3)) = \\
&= \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{2}S_3 = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_3) > \\
&> \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P\right) = \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P + \frac{1}{16}P.
\end{aligned}$$

W ten sam sposób co wcześniej otrzymamy:

$$\begin{aligned}
&S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots + S_{n-1} + S_n > \\
&> S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots + S_{n-1} + \frac{1}{2}(P - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots + S_{n-1})) = \\
&= \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{2}S_3 + \frac{1}{2}S_4 + \dots + \frac{1}{2}S_{n-1} = \\
&= \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots + S_{n-1}) > \\
&> \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P + \frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P + \frac{1}{16}P + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}P\right) = \\
&= \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}P + \frac{1}{8}P + \frac{1}{16}P + \frac{1}{32}P + \dots + \frac{1}{2^n}P = \\
&P\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n}\right),
\end{aligned}$$

czyli:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots + S_n > P\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Zatem:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots \geq P \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right).$$

Etap 3.

Pozostaje nam uzasadnić jeszcze ostatnie równanie:

$$P \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) = P.$$

Powyzsza równość sprowadza się do wykazania, że:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1.$$

Lewa strona równania to suma zbieżnego szeregu geometrycznego:

$$D = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \text{ gdzie: } a_1 = \frac{1}{2} \text{ oraz } q = \frac{1}{2} \in (-1; 1).$$

Podstawiając do wzoru:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \frac{a_1}{1 - q},$$

otrzymujemy:

$$D = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Zatem:

$$P \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) = P \cdot 1 = P.$$

Na podstawie uzasadnień z etapu I, etapu II oraz etapu III otrzymujemy ostatecznie:

$$P \geq S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots \geq P \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) = P.$$

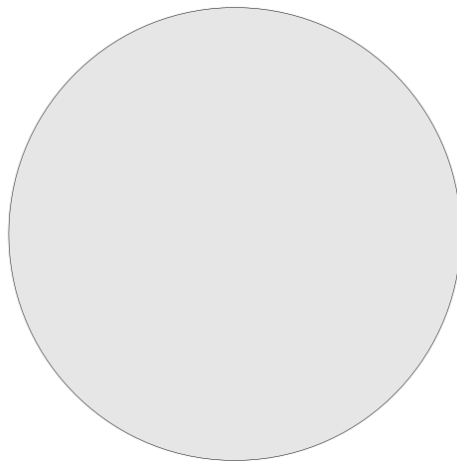


Jako przykłady zastosowania metody wyczerpywania możemy przytoczyć ideę aproksymacji pola koła oraz aproksymacji objętości walca na podstawie rysunków. Zastanowimy się również nad aproksymacją objętości kuli.

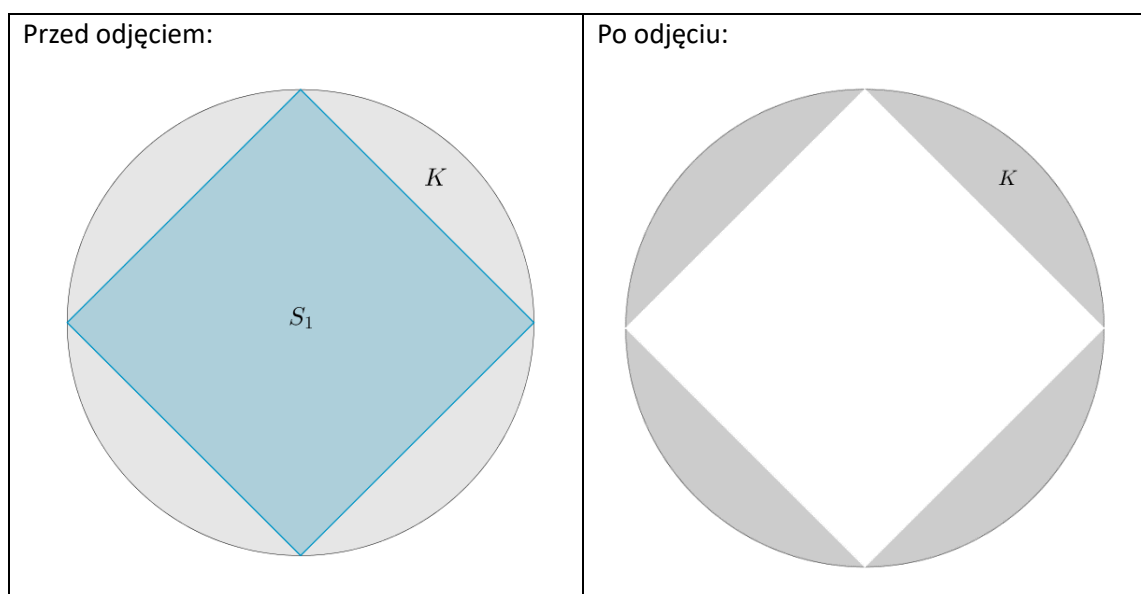
Aproksymacja pola koła.

Dane niech będzie koło o polu równym  $K$ . Następnie odejmować będziemy kolejno wielokąty, których pola są równe  $S_1, S_2, S_3, \dots$  i pole każdego zgodne jest z założeniem twierdzenia 1. Mamy więc:

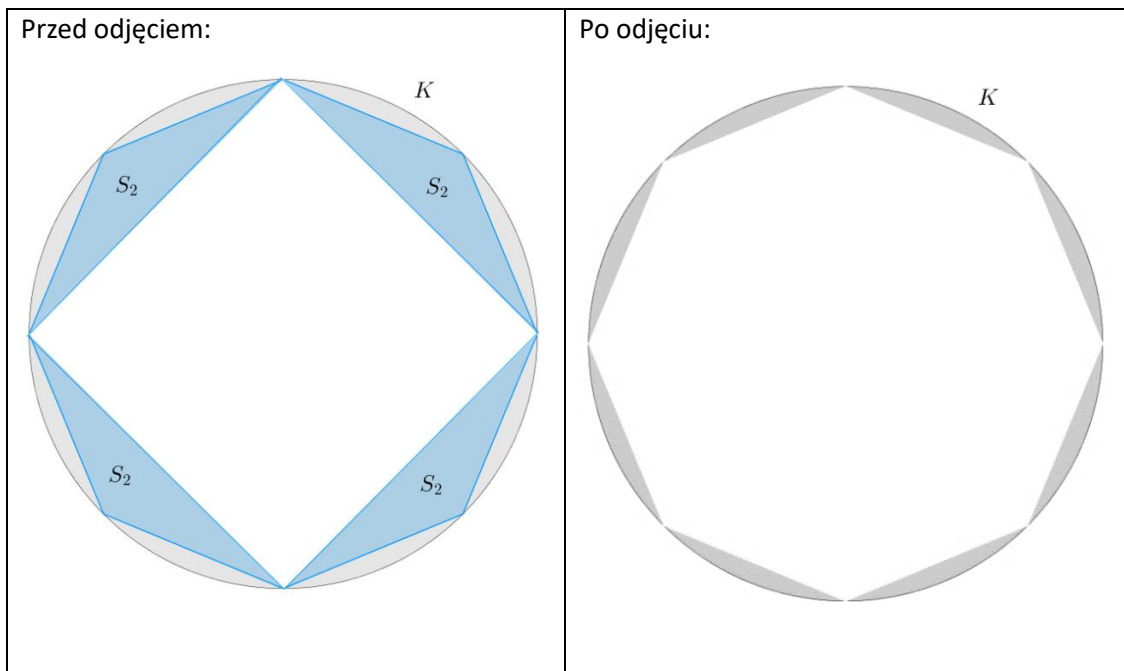
1.



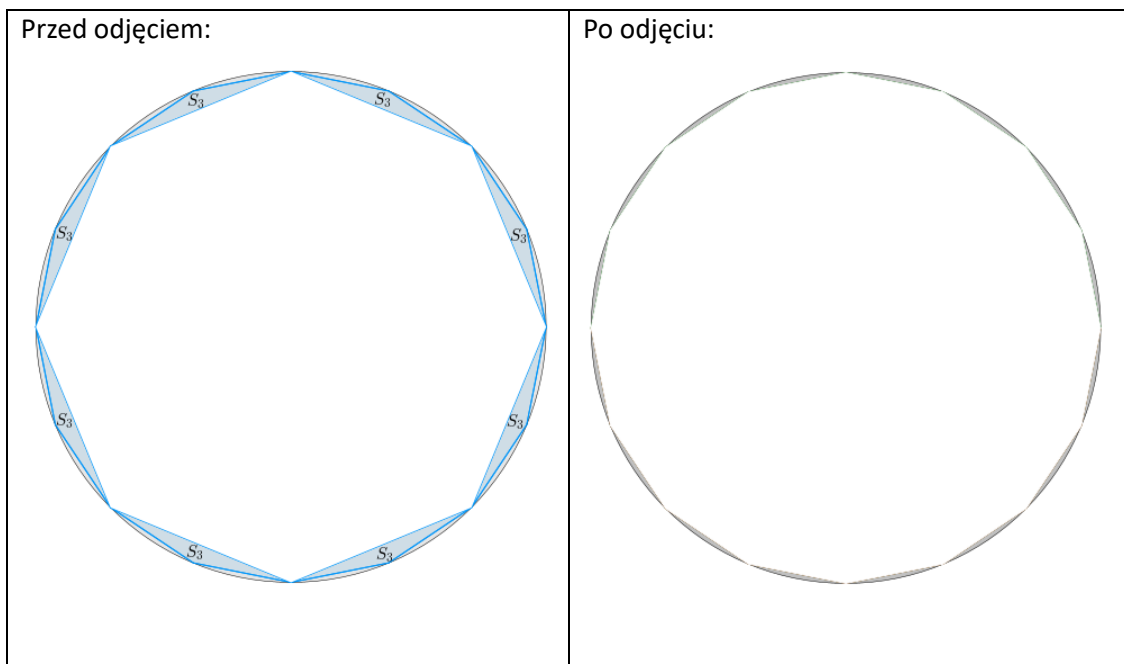
2.



3.



4.

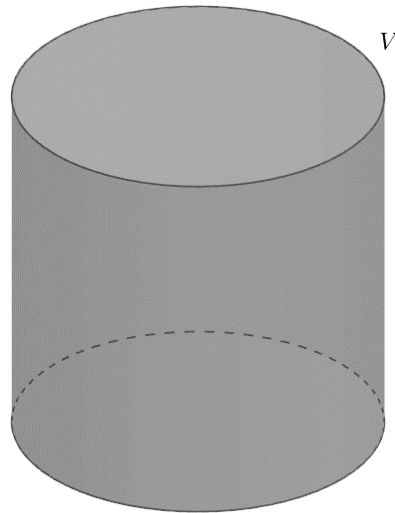


5. Łatwo można zauważyć, że suma pól kolejno odejmowanych figur, przybliża pole koła.

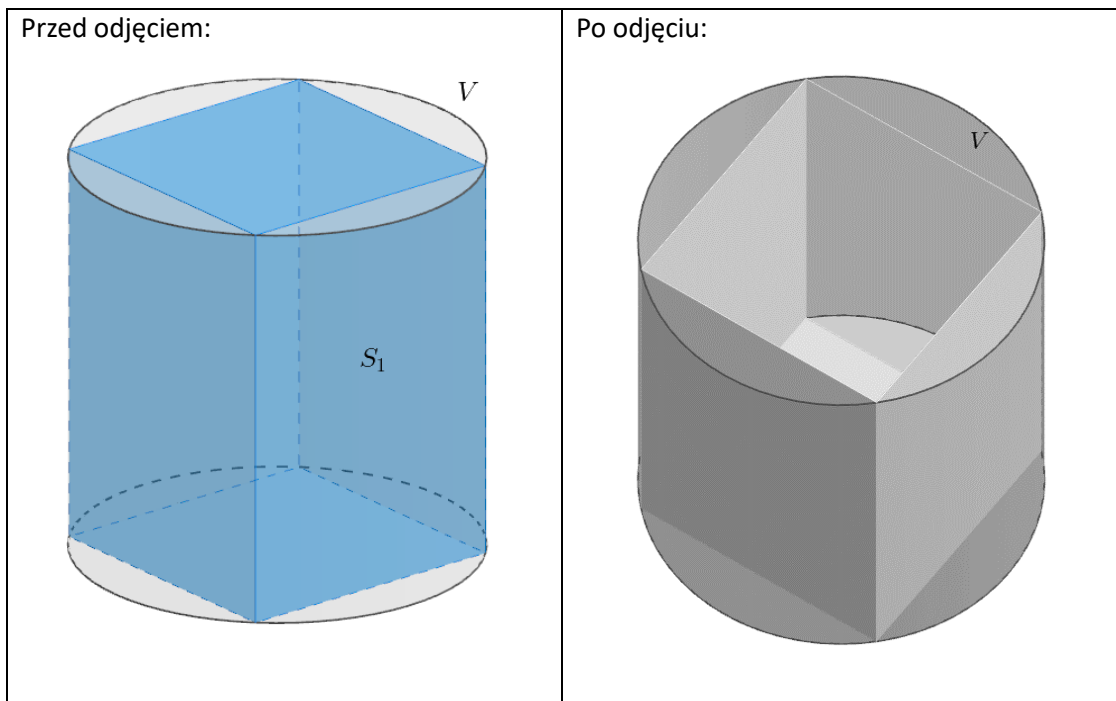
Aproksymacja objętości walca.

Dany niech będzie walec o objętości równej  $V$ . Następnie odejmować będziemy kolejno wielościany, których objętości są równe  $S_1, S_2, S_3, \dots$  i objętość każdego zgodna jest z założeniem twierdzenia 2. Mamy więc:

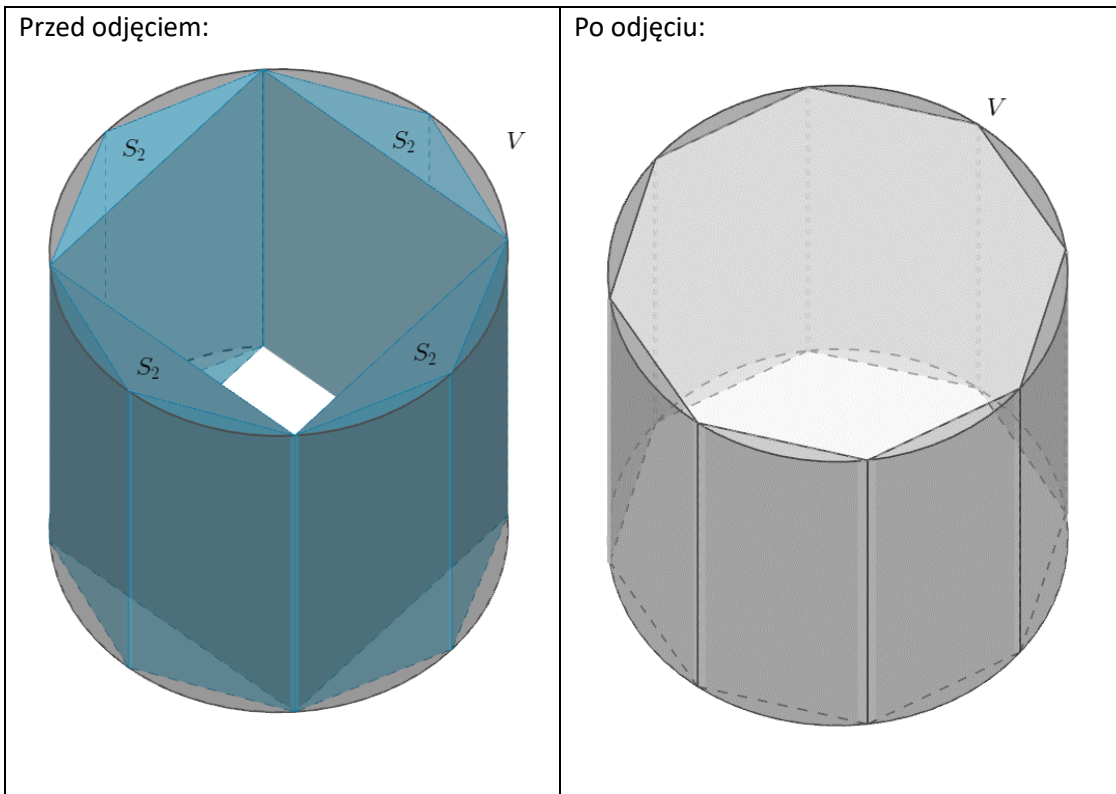
1.



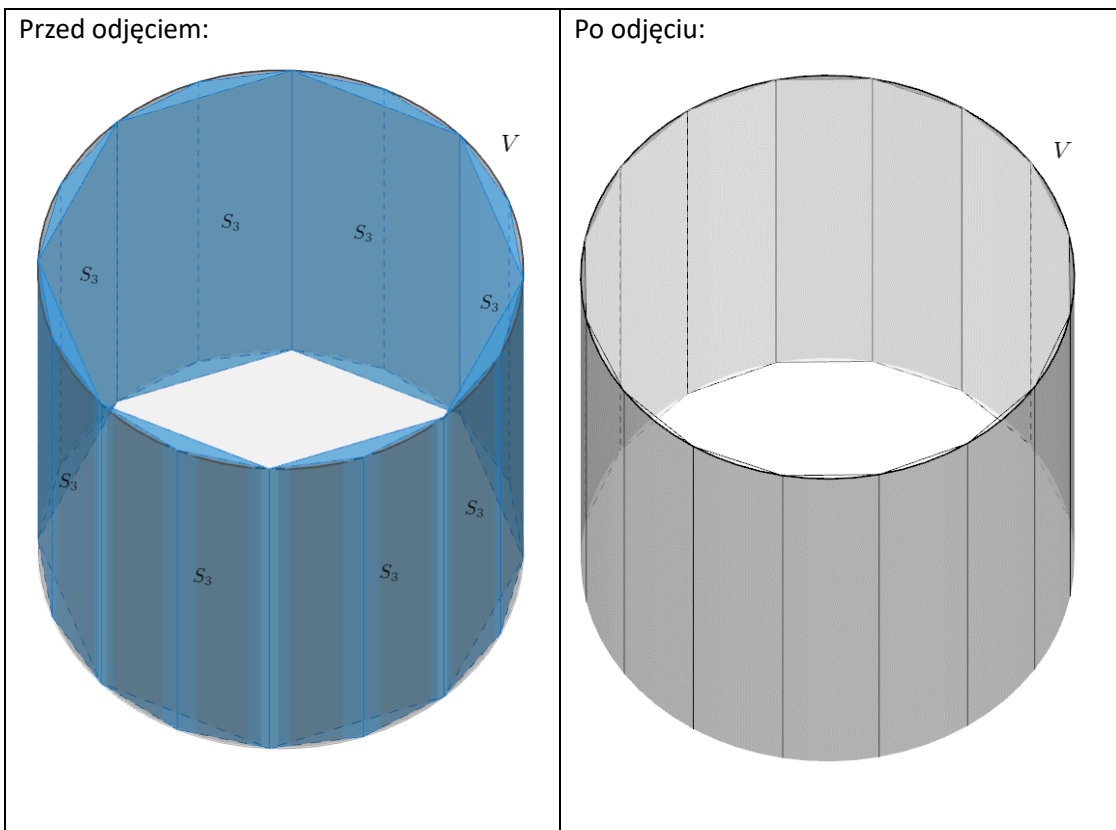
2.



3.



4.



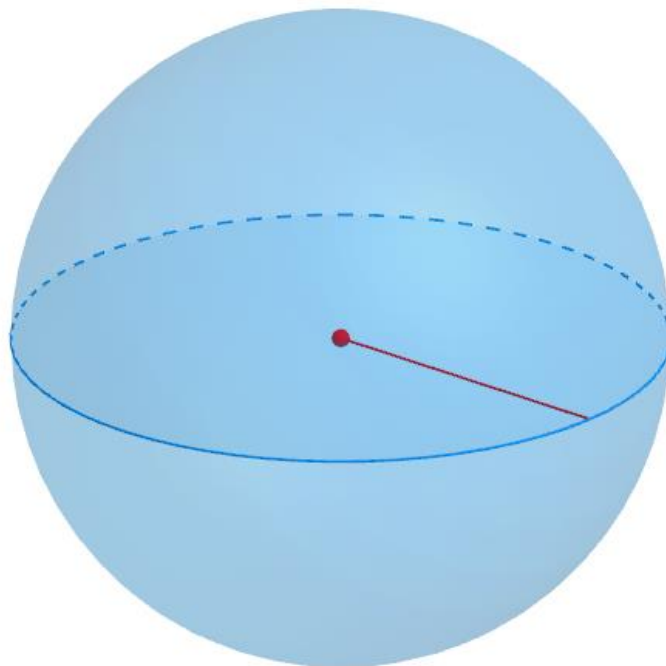
5. Łatwo można zauważyć, że suma objętości kolejno odejmowanych wielościanów, przybliży objętość walca.

Aproksymacja objętości kuli.

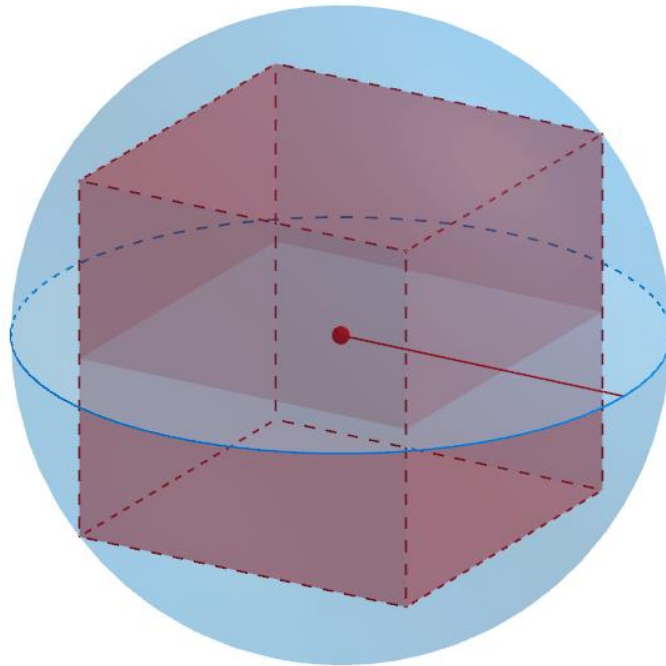
*Wiedząc jak „wyczerpać” pole koła oraz objętość walca, czy w sposób analogiczny da się to samo zrobić z objętością kuli?*

Odpowiedź:

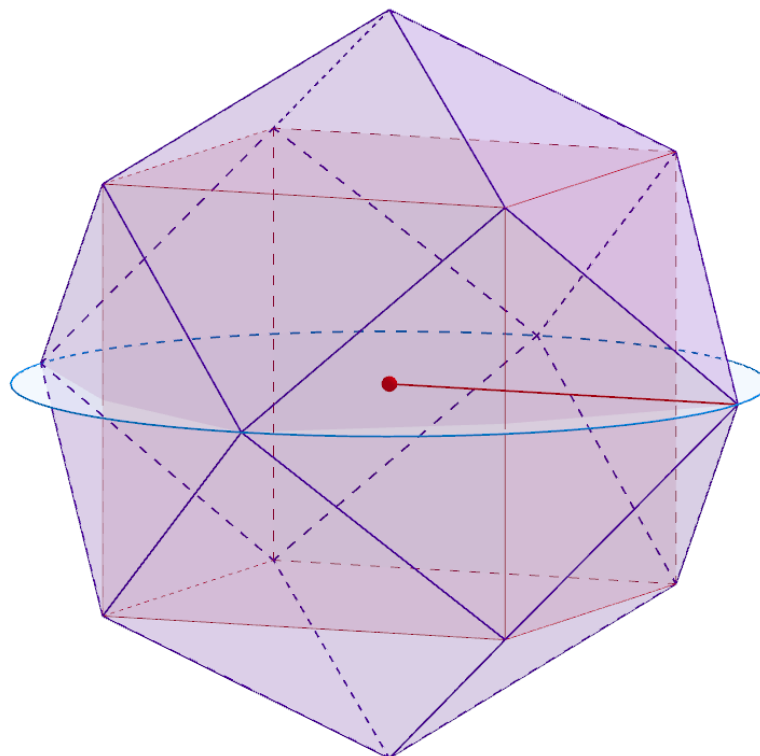
Wydawać by się mogło, że poprzez analogię do wyczerpywania pola koła, z kulą jest podobnie. Wpiszemy najpierw sześcian, na jego ścianach zbudujemy ostrosłupy o podstawach przystających do ścian sześcianu i postępując będziemy tak dalej, aż osiągniemy zamierzony rezultat. Czy aby na pewno jest to takie proste? Aby się temu bliżej przyjrzeć spójrzmy na poniższe rysunki:



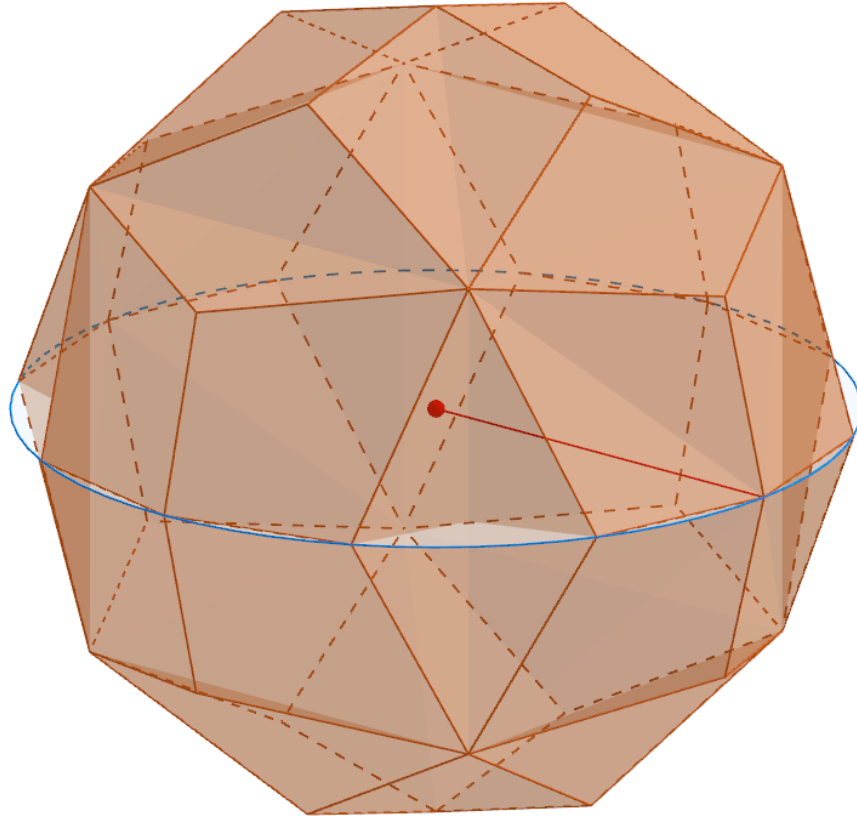
Wpiszmy w powyższą kulę sześcian:



Następnie na wszystkich ścianach sześcianu zbudujemy odpowiednie ostrosłupy jak to pokazano na rysunku poniżej:



Teraz spróbujmy na wszystkich ścianach ostrosłupów zbudować odpowiednie nowe ostrosłupy tak jak to pokazano na rysunku poniżej:



Wniosek:

Starając się wyczerpać objętość kuli w sposób analogiczny do wyczerpywania objętości walca napotykamy problem związany z założeniem metody wyczerpywania. Polega on na tym, że objętość sześcianu wpisanego w tę kulę nie stanowi więcej niż połowa jej objętości. Niemniej jednak jako ciekawostkę możemy potraktować fakt, iż wpisując w kulę najpierw sześcian, a następnie ostrosłupy zbudowane na jego ścianach, i dalej kolejne ostrosłupy na ścianach poprzednich wielościanów, w taki sposób, że spodkiem wysokości każdego nowo powstałego czworościanu (*dobudowywanego*) jest środek ciężkości jego podstawy, a wierzchołkiem punkt należący do sfery, to suma objętości wszystkich tych brył przybliży objętość kuli. Niestety znalezienie wzoru wyrażającego powyższe rozumowanie okazało się zbyt trudne dla nas. Pozostawiamy więc tę kwestię czytelnikowi jako problem otwarty.

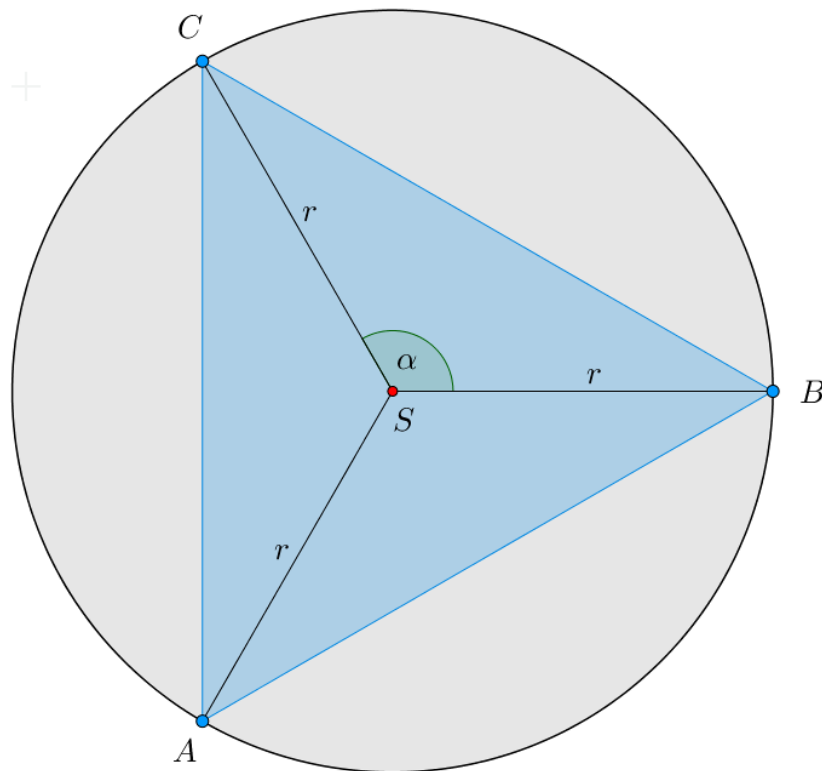
## ROZDZIAŁ II

Pole  $n$  - kąta foremnego wpisanego i opisanego na kole o promieniu  $r = 1$

W tym rozdziale wyprowadzimy wzory na pole dowolnego  $n$  – kąta foremnego wpisanego oraz opisanego na kole o promieniu  $r = 1$ . Posłużymy się tutaj procesem uogólniania. Zaczniemy badać pole trójkąta równobocznego wpisanego w koło o promieniu  $r = 1$ , następnie kwadratu oraz dziewięciokąta foremnego. Na podstawie pewnych obserwacji podamy wzór dla dowolnego  $n$  – kąta foremnego opisanego na kole o promieniu  $r = 1$ . Zauważymy, że wraz ze wzrostem liczby boków naszych wielokątów foremnych, ich pole będzie coraz bliższe polu naszego koła, którego pole jest równe  $\pi$ . Analogicznie postępując będziemy z  $n$  – kątami foremnymi opisanymi na tym kole. Po wyprowadzaniu tych wzorów zadamy dwa pytania z nimi związane. Zapraszamy do lektury.

I. Pole  $n$  – kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu  $r = 1$ .

1. Dany niech będzie trójkąt równoboczny  $ABC$  wpisany w koło o promieniu  $r = 1$ .





Zauważmy, że trójkąt  $ABC$  złożony jest z trzech przystających trójkątów równoramiennych  $ABS$ ,  $BCS$ ,  $CAS$ . Pole trójkąta  $BCS$  wyraża się wzorem:

$$P_{\triangle BCS} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \alpha.$$

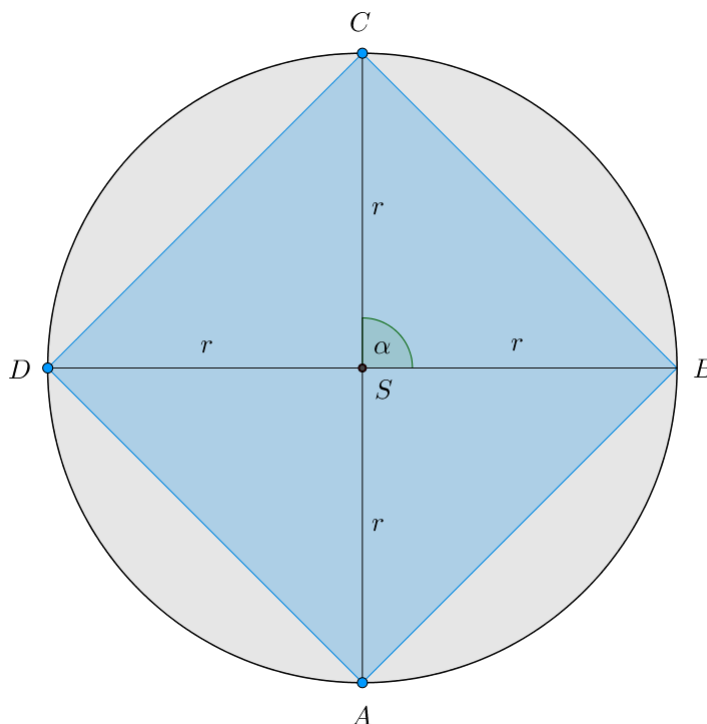
Teraz wiedząc, że  $\alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$  oraz korzystając z założenia, że  $r = 1$ , otrzymujemy:

$$P_{\triangle BCS} = \frac{1}{2} \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Zatem pole trójkąta  $ABC$  jest równe:

$$P_{\triangle ABC} = 3 \cdot P_{\triangle BCS} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 1,2990.$$

2. Postępując jak wcześniej, wpiszmy w koło o promieniu  $r = 1$ , kwadrat  $ABCD$ .



łatwo zauważyć, że kwadrat  $ABCD$  złożony jest z czterech przystających trójkątów równoramiennych  $ABS$ ,  $BCS$ ,  $CDS$  oraz  $DAS$ . Pole trójkąta  $BCS$  wyraża się wzorem:

$$P_{\triangle BCS} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \alpha.$$

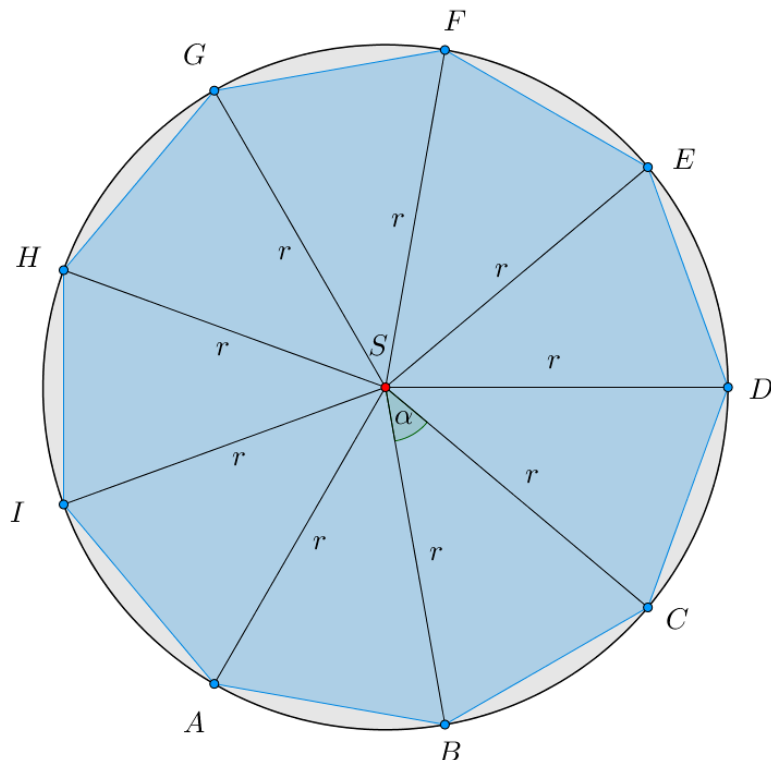
Teraz wiedząc, że  $\alpha = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$  oraz korzystając z założenia, że  $r = 1$ , otrzymujemy:

$$P_{\triangle BCS} = \frac{1}{2} \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2}.$$

Zatem pole kwadratu  $ABCD$  jest równe:

$$P_{\square ABCD} = 4 \cdot P_{\triangle BCS} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

3. Poprzez analogię do przykładów wcześniejszych, idąc nieco dalej wpiszmy w koło o promieniu  $r = 1$ , dziewięciokąt foremny  $ABCDEFGHI$ .



Zauważmy, że dziewięciokąt  $ABCDEFGHI$  złożony jest z dziewięciu przystających trójkątów równoramiennych  $ABS, BCS, CDS, DES, EFS, FGS, GHS, HIS$  oraz  $IAS$ . Pole trójkąta  $BCS$  wyraża się wzorem:

$$P_{\triangle BCS} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \alpha.$$

Teraz wiedząc, że  $\alpha = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$  oraz korzystając z założenia, że  $r = 1$ , otrzymujemy:

$$P_{\triangle BCS} = \frac{1}{2} \cdot \sin 40^\circ \approx \frac{1}{2} \cdot 0,64279 = 0,3214.$$

Zatem pole dziewięciokąta foremnego  $ABCDEFGHI$  jest równe:

$$P_{ABCDEFGHI} = 9 \cdot P_{\triangle BCS} \approx 9 \cdot 0,3214 = 2,8926.$$

4. Na podstawie wcześniejszych przykładów można zaobserwować pewną zależność dla pola dowolnego  $n$ -kąta foremnego wpisanego w koło o polu równym  $P_\bullet = \pi$ .

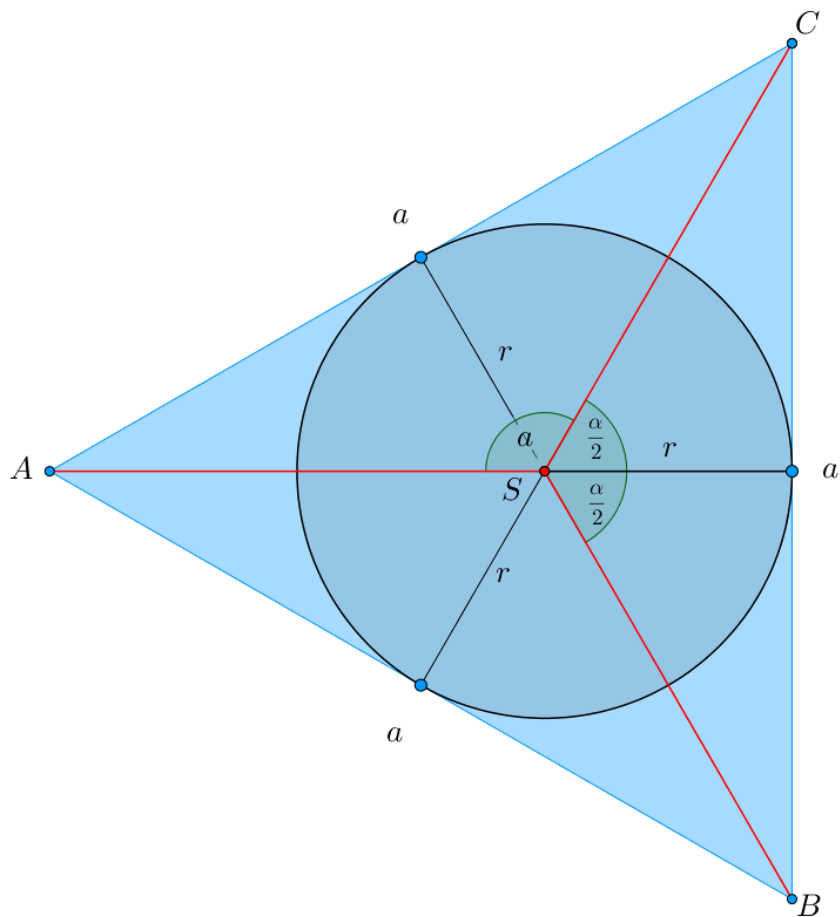
Pole takiego  $n$ -kąta foremnego to iloczyn  $n$  pól trójkątów równoramiennych, gdzie ich ramiona mają długość 1, a kąt między tymi ramionami jest równy  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ . Zatem otrzymujemy następujący wzór:

$$P_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}, \text{ dla } n \in \mathbb{N}_3,$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę boków wpisanego  $n$ -kąta foremnego w koło o promieniu  $r = 1$ .

II. Pole  $n$  – kąta foremnego opisanego na kole o promieniu  $r = 1$ .

1. Dany niech będzie trójkąt równoboczny  $ABC$  opisany na kole o promieniu  $r = 1$ .



Łatwo zauważyć, że trójkąt  $ABC$  złożony jest z trzech przystających trójkątów równoramiennych  $ABS$ ,  $BCS$ ,  $CAS$ . Pole trójkąta  $BCS$  wyraża się wzorem:

$$P_{\triangle BCS} = \frac{a \cdot r}{2}.$$

Chcemy teraz wyrazić długość boku  $a$  naszego trójkąta  $BCS$  przy pomocy kąta  $\alpha$  oraz długości promienia  $r$ .

Niech:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}a}{r}$$

i stąd:

$$a = 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Podstawmy do powyższego wzoru  $\alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$  oraz  $r = 1$ . Wówczas:

$$a = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{120^\circ}{2} = 2 \cdot \sqrt{3} \approx 3,4641.$$

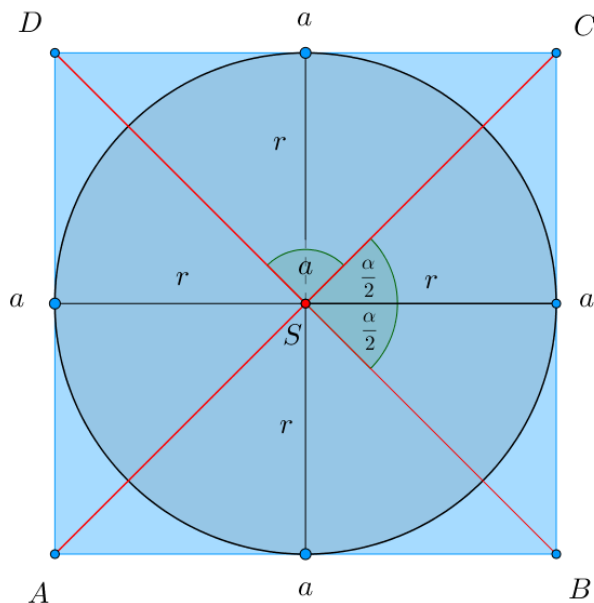
Pole trójkąta  $ABC$  wyraża się wzorem:

$$P_{\Delta ABC} = 3 \cdot P_{\Delta BCS} = 3 \cdot \frac{a \cdot r}{2}.$$

Uwzględniając wyżej wyznaczone wartości dla  $a$  oraz  $r$ , ostatecznie otrzymujemy:

$$P_{\Delta ABC} \approx 3 \cdot \frac{3,4641}{2} = 5,19615.$$

2. Dany niech będzie kwadrat  $ABCD$  opisany na kole o promieniu  $r = 1$ .



Łatwo zauważyć, że kwadrat  $ABCD$  złożony jest z czterech przystających trójkątów równoramiennych  $ABS$ ,  $BCS$ ,  $CDS$  oraz  $DAS$ . Pole naszego czworokąta  $ABCD$  wyraża się wzorem:

$$P_{\square ABCD} = 4 \cdot P_{\triangle BCS} = 4 \cdot \frac{a \cdot r}{2}.$$

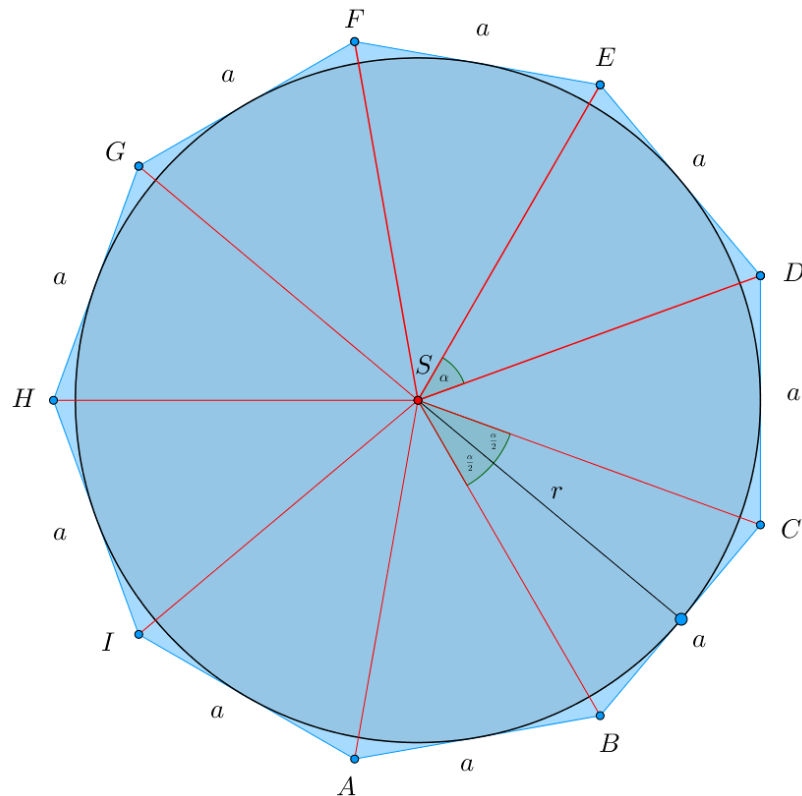
Na podstawie wcześniejszego przykładu otrzymujemy:

$$a = 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ gdzie teraz } \alpha = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Zatem, uwzględniając powyższe wartości dla  $a$  oraz  $r$ , otrzymujemy:

$$P_{\square ABCD} = 4 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{2}}{2} = 4 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 4.$$

3. Następnie, dany niech będzie dziewięciokąt foremny  $ABCDEFGHI$  opisany na kole o promieniu  $r = 1$ .



Zauważmy, że dziewięciokąt  $ABCDEFGHI$  złożony jest z dziewięciu przystających trójkątów równoramiennych  $ABS, BCS, CDS, DES, EFS, FGS, GHS, HIS$  oraz  $IAS$ . Pole naszego dziewięciokąta foremnego  $ABCDEFGHI$  wyraża się wzorem:

$$P_{ABCDEFGHI} = 9 \cdot P_{\triangle BCS} = 9 \cdot \frac{a \cdot r}{2}.$$

Podobnie jak wcześniej, wnioskujemy, że:

$$a = 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ gdzie teraz } \alpha = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ.$$

Zatem, uwzględniając powyższe wartości dla  $a$  oraz  $r$ , otrzymujemy:

$$P_{ABCDEFGHI} = 9 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{40^\circ}{2}}{2} = 4 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ \approx 3,2757.$$

4. Na podstawie obserwacji, wnioskujemy, że pole dowolnego  $n$  – kąta foremnego opisanego na kole o promieniu  $r = 1$ , to iloczyn  $n$  pól trójkątów równoramiennych, w których długość wysokości wynosi  $r = 1$ , a podstawę  $a$  każdego z tych trójkątów wyrażamy następująco:

$$a = 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ gdzie } \alpha = \frac{360^\circ}{n} \text{ i } n \in \mathbb{N}_3,$$

czyli:

$$a = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\frac{360^\circ}{n}}{2} = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Stąd nasz szukany wzór jest postaci:

$$P_n = n \cdot \frac{a \cdot r}{2} = n \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}{2},$$

co po uproszczeniu daje:

$$P_n = n \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}, \text{ dla } n \in \mathbb{N}_3,$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę boków  $n$  – kąta foremnego opisanego na kole o promieniu  $r = 1$ .

- III. Powyższe wzory zmotywowały i zachęciły nas do zbadania szeregu różnych kwestii z nimi związanymi. Postaramy się je przedstawić poprzez zadanie dwóch pytań i udzielnie (*o ile to możliwe*) na nie odpowiedzi.

Pytanie 1.

*Czy istnieje jakaś zależność pomiędzy polami  $n$  – kątów foremnych wpisanych i opisanym na kole o promieniu  $r = 1$ ? Wpisywanie czy opisywanie  $n$  – kątów foremnych daje szybszą aproksymację liczby  $\pi$ ?*

Odpowiedź:

Pole koła o promieniu  $r = 1$  jest równe  $\pi$ . Przybliżmy więc liczbę  $\pi$ , z dokładnością do pierwszych dziesięciu cyfr jej rozwinięcia dziesiętnego. Mamy więc:

$$\pi = 3,141592\ 6535 \dots$$

W poniższej tabeli przedstawimy porównawczo pola odpowiednich  $n$  – kątów foremnych wpisanych i opisanym na kole o polu równym  $\pi$ . Zaobserwujmy, dla której figury, pole jako pierwsze uzyska pierwszą cyfrę po przecinku równą 1?



$n$	Pole $n$ – kąta wpisanego w koło o polu równym $\pi$ (zaokrąglamy do sześciu miejsc po przecinku)	Pole $n$ – kąta opisanego na kole o polu równym $\pi$ (zaokrąglamy do sześciu miejsc po przecinku)
3	1,299038	5,196152
4	2	4
5	2,377641	3,632713
6	2,598076	3,464101
7	2,736410	3,371022
8	2,828427	3,313708
9	2,892544	3,275732
10	2,938926	3,249197
11	2,9735244	3,229891
12	3	3,215390
13	3,020701	3,204212
14	3,037186	3,195409
22	3,099058	3,163122
23	3,102663	3,161277

Na podstawie uzyskanych wyników, widzimy, że pole 14 – kąta foremnego opisanego na badanym kole, szybciej daje pierwszą cyfrę po przecinku równą 1, niż pole 14-kąta weń wpisanego. Zastanówmy się, czy pole  $n$  – kąta foremnego opisanego na badanym kole, uzyska także szybciej drugą cyfrę rozwinięcia dziesiętnej liczby  $\pi$ , równą tym razem 4? Spójrzmy na wyniki w poniższej tabeli.

$n$	Pole $n$ – kąta wpisanego w koło o polu równym $\pi$ (zaokrąglamy do sześciu miejsc po przecinku)	Pole $n$ – kąta opisanego na kole o polu równym $\pi$ (zaokrąglamy do sześciu miejsc po przecinku)
32	3,121445	3,151715
33	3,122646	3,151118
34	3,123742	3,150563
35	3,124746	3,150057
36	3,125667	3,149592

Widzimy, że znowu i tym razem pole 36 – kąta opisanego na badanym kole szybciej od 36 – kąta foremnego wpisanego w koło uzyskało jako drugą cyfrę po przecinku cyfrę równą 4. Co ciekawe dopiero 114 – kąt foremny wpisany w koło, daje nam pole, którego druga cyfra po przecinku jest równa 4.

$n$	Pole $n$ – kąta wpisanego w koło o polu równym $\pi$ (zaokrąglamy do sześciu miejsc po przecinku)	Pole $n$ – kąta opisanego na kole o polu równym $\pi$ (zaokrąglamy do sześciu miejsc po przecinku)
113	3,139974	3,142402
114	3,140002	3,142388
115	3,140029	3,142374

Czy podobnie będzie dla trzeciej cyfry po przecinku? Czy i tym razem pole  $n$  – kąta foremnego opisanego na kole będzie górowało nad  $n$  – kątem foremnym wpisanym? Spójrzmy na wyniki w poniższej tabeli. Szukaną, trzecią cyfrą tym razem jest 1.

$n$	Pole $n$ – kąta wpisanego w koło o polu równym $\pi$ (zaokrąglamy do sześciu miejsc po przecinku)	Pole $n$ – kąta opisanego na kole o polu równym $\pi$ (zaokrąglamy do sześciu miejsc po przecinku)
158	3,140764	3,142007
159	3,140775	3,142000
160	3,140782	3,141996
187	3,141002	3,141888

Podobnie jak wcześniej, tym razem pole 160 – kąta foremnego opisanego na kole uzyskało szybciej jako trzecią cyfrę po przecinku jedynkę. Czy na podstawie tych obserwacji można jednoznacznie stwierdzić, że pole  $n$  – kąta foremnego opisanego na kole będzie szybciej przybliżać rozwinięcie dziesiętne liczby  $\pi$ ? Niestety, nie. Już dla czwartej cyfry równej 5, wynik ten szybciej uzyska 473 – kąt foremny wpisany w badane koło. Zobaczmy na wyniki w poniższej tabeli.

$n$	Pole $n$ – kąta wpisanego w koło o polu równym $\pi$ (zaokrąglamy do sześciu miejsc po przecinku)	Pole $n$ – kąta opisanego na kole o polu równym $\pi$ (zaokrąglamy do sześciu miejsc po przecinku)
472	3,141499	3,141639
473	3,141500	3,141639
474	3,141500	3,141639
475	3,141501	3,141638
1187	3,141578	3,141599

Dopiero pole 1187 – kąta foremnego opisanego na kole, uzyskało jako czwartą cyfrę równą 5. Jednak co ciekawe, ten sam wielokąt, uzyskał również piątą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby  $\pi$  równą 9. Zatem szybciej, niż 1187 – kąt wpisany.

Czy istnieje zatem zależność pozwalająca jednoznacznie stwierdzić, pole którego z  $n$  – kątów, wpisanego czy opisanego na kole o polu równym  $\pi$  szybciej to pole przybliża? Pozostawiamy to jako problem otwarty.

## Pytanie 2.

*Wiemy jak za pomocą geometrii i algebry pokazać aproksymację liczby  $\pi$ . Podstawą jest metoda wyczerpywania omówiona w rozdziale II. Czy istnieje sposób, aby tak jak liczbę  $\pi$ , można było przybliżyć  $\sqrt{2}$  czy  $\sqrt{3}$ ?*

Odpowiedź:

Niestety nie udało nam się znaleźć figury, której pole czy objętość byłyby równe  $\sqrt{2}$  czy  $\sqrt{3}$  i można by było wykorzystać metodę wyczerpywania do ich przybliżenia. Pozostawiamy to jako problem otwarty.

# PODSUMOWANIE

Na samym początku metoda wyczerpywania okazała się dla nas wielkim wyzwaniem, gdyż brakowało nam wiedzy, aby zrozumieć jej ideę. Jako uczennice klasy pierwszej natrafiłyśmy na wiele zagadnień, z którymi nie miałyśmy jeszcze styczności na lekcjach matematyki. Z czasem jednak, dzięki wsparciu i pomocy opiekunów, zaczęłyśmy się do niej przekonywać.

Napisanie niniejszej pracy sprawiło nam wiele trudu, ale i dużo radości. Spojrzałyśmy na matematykę w nieco inny sposób. Nauczyłyśmy się wielu ciekawych rzeczy i nabrałyśmy pokory do *królowej nauk*. Zdałyśmy sobie sprawę, że nie wystarczy umieć jeden dział, aby sprostać podjętemu wyzwaniu. Dodatkową nowością było to, że czytając tekst *starożytnych* nie można go interpretować dosłownie. Przykładem jest słowo *wielkość*, które dziś utożsamić można z polem, objętością, długością lub obwodem. Znalezienie pomocnych skryptów, notatek, wykładów, pisanie tekstu matematycznego, czy zrobienie rysunków w programie GeoGebra, również do prostych nie należało. Dzięki pomocy nauczycieli dobrnęłyśmy jednak do końca, za co serdecznie dziękujemy.

# BIBLIOGRAFIA

I. Link do wykładów:

[https://www.math.uni.wroc.pl/~swiatkow/\\_dydaktyka/geom\\_elem.html](https://www.math.uni.wroc.pl/~swiatkow/_dydaktyka/geom_elem.html)

Geometria Elementarna 1

1. Wykład „*Jak starożytni Grecy mierzyli pola figur o krzywoliniowych brzegach - metoda wyczerpywania Eudoksosa*”
2. Z książki Marka Kordosa „*Wykłady z historii matematyki*”
3. Z książki Jerzego Mioduszewskiego „*Ciągłość. Szkice z historii matematyki*” O metodzie wyczerpywania mowa jest od strony 56.

II. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Link do strony:

chrome-

extension://efaidnbmnnnibpcajpcgltclefindmkaj/<https://www.mimuw.edu.pl/sites/default/files/wyczerpywanie.pdf>

III. [https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda\\_wyczerpywania](https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_wyczerpywania)

IV. [https://en.wikipedia.org/wiki/Method\\_of\\_exhaustion](https://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_exhaustion)

### Opinia opiekuna

Uczennice Patrycja Kopiasz, Agata Łagosz oraz Wiktoria Pawela są uczennicami pierwszej klasy Liceum Ogólnokształcącego im. ks. Stanisława Konarskiego w Oświęcimiu. Realizują rozszerzony program nauczania matematyki. Dwie z nich: Agata oraz Patrycja brały udział w Małopolskim Konkursie Prac Matematycznych w roku 2023. Napisały wtedy pracę pod tytułem *„Od problemu Monty’ego Halla przez zasadę szufladkową i paradoks hazardzisty do prawdopodobieństwa”*. Nauczycielem matematyki Agaty i Wiktorii jest mgr Paweł Pająk, a Patrycji mgr Jolanta Pająk.

Uczennice sukcesywnie, co tydzień, od początku listopada spotykały się naprzemiennie z nauczycielami, znacznie poszerzając swoją wiedzę z zakresu geometrii, algebry oraz trygonometrii. Były otwarte na nowe propozycje, nie zniechęcały się, doczytywały różne wykłady, czy skrypty dotyczące „Metody wyczerpywania”. Dały się poznać również jako zgrany i ambitny zespół, z wielkim potencjałem matematycznym.

Treści zawarte w niniejszej pracy wykraczają poza podstawę programową w liceum. Przy pomocy opiekunów uczennice starały się edytować tekst matematyczny oraz uczyły się wykonywania rysunków w programie GeoGebra.

Patrycja, Agata oraz Wiktoria włożyły bardzo dużo wysiłku i serca w stworzenie tej pracy. Skrupulatnie analizowały treści w niej zawarte opierając się na tekstach ujętych w bibliografii. Stawiały niestandardowe pytania, na które starały się udzielić odpowiedzi. Praca z dziewczętami sprawiała mi, jako nauczycielowi, wiele radości i satysfakcji. Konsultantem merytorycznym była Pani mgr Jolanta Pająk.

Paweł Pająk