ROZKŁAD SZEŚCIANU NA PRZYSTAJĄCE WIELOŚCIANY

Paweł Cybulski XX Liceum Ogólnokształcące w Krakowie

Jestem Paweł Cybulski, uczeń 2 klasy XX Liceum Ogólnokształcącego w Krakowie. Już w Szkole Podstawowej interesowałem się matematyką. Moja przygoda z nią od zawsze mnie fascynowała. Wymyślałem jak coś można zrobić w lepszy oraz szybszy sposób. Zawsze bliżej było mi do tworzenia nowych niż korzystania z gotowych rozwiązań. Przez ostatnie miesiące zaintrygowała mnie bryła sześcianu, którą każdy z nas dobrze zna. Postanowiłem napisać pracę, jak można ją rozkładać na identyczne lub enancjomorficzne bryły.

Rozkład sześcianu

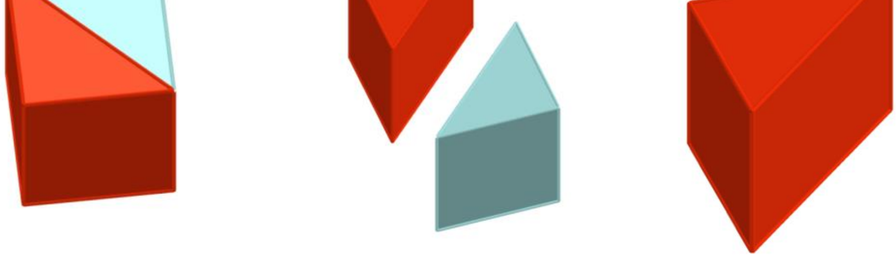
Sześcian ma 8 wierzchołków oraz 12 krawędzi - 8 krawędzi podstaw i 4 krawędzie boczne. Da się zawsze rozłożyć na dwie przystające części, przez rozcięcie go dowolną płaszczyzną przechodzącą przez jego środek. Ja postanowiłem rozciąć go na większą liczbę przystających części.

Do takich rozkładów sześcianu dopuściłem też bryły enancjomorficzne, co oznacza że nie nakładają się na siebie, mimo, że posiadają podobny kształt oraz tę samą objętość. Przykładem enancjomorfizmu są dwie rękawiczki. Jeśli złożymy ze sobą dłonie, to będą się pokrywać, lecz gdy popatrzymy na nie tak, jakby leżały na stole, to kciuki się stykają. To oznacza, że rękawiczki mają takie same objętości, zaś ich bryły są odbiciem lustrzanym względem siebie (jak można zauważyć poniżej).

rys. 1

Rozkład sześcianu na 2 części

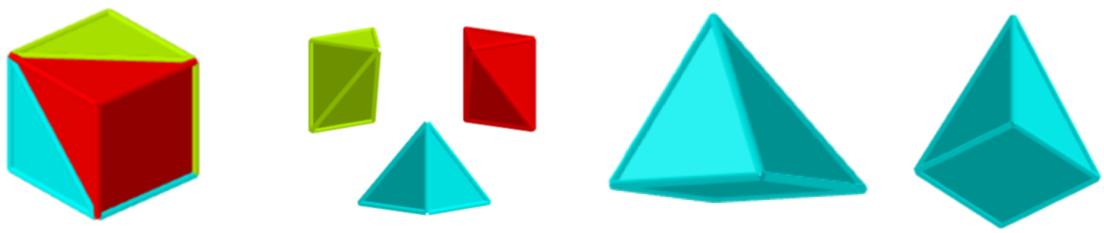
Jeżeli płaszczyzna przetnie środek sześcianu, to zawsze rozłoży go na dwie przystające części. Ilustrują to poniższe rysunki.



rys. 2

Rozkład sześcianu na 3 części

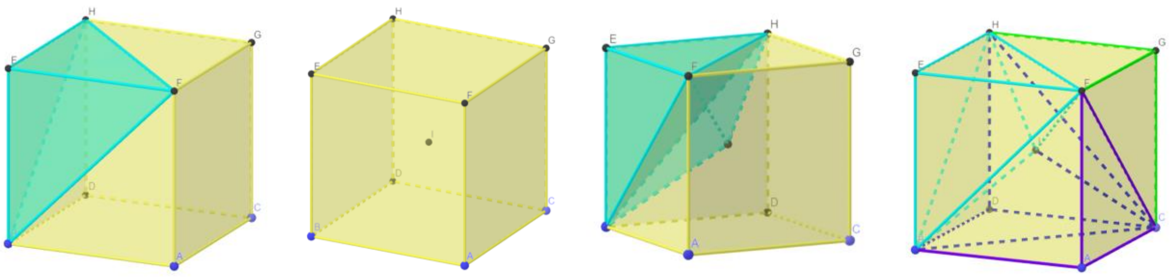
Aby uzyskać rozkład na 3 części trzeba skonstruować prostą, która zawiera jedną z przekątnych sześcianu. Ta prosta będzie zawierać wspólną krawędź trzech przystających ostrosłupów, na które możemy rozciąć sześcian.



rys. 3

Rozkład sześcianu na 4 części

Aby uzyskać rozkład na 4 części potrzebujemy zrobić 3 poniższe kroki.



rys 4 a, b, c, d

Krok 1:
Tworzymy ostrosłup, których wierzchołki są umiejscowione na czterech wierzchołkach (jak widać powyżej) (rys. 4a).

Krok 2:
Tworzymy środek sześcianu (rys. 4b).

Krok 3:
Dodajemy do wcześniejszego ostrosłupa nowy ostrosłup o tej samej podstawie, którego wierzchołek będzie środkiem sześcianu jak widać na ilustracji rys. 4c.

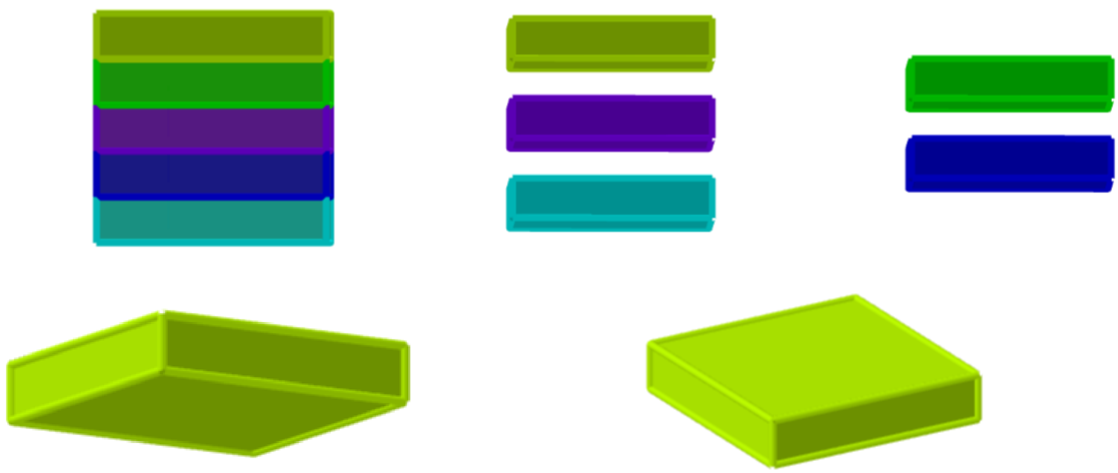
Gdy zrobimy 3 powyższe kroki otrzymamy pierwszą bryłę tego rozkładu. Teraz wystarczy tylko dodać 3 pozostałe bryły, jedną naprzeciwko oraz dwie poniżej jak widać na rys.4 d. Na rysunku 5 a, b, c jest pokazany rozkład, zaś na rysunku 6a i b wygląd bryły tego rozkładu.

rys. 5 a, b, c

rys. 6 a, b

Sześcian na 5 części

Aby uzyskać rozkład na 5 części, wystarczy podzielić sześcian na 5 jednakowych graniastosłupów o podstawie kwadratu. To bardzo banalny rozkład, ale wydaje mi się, że nie da się w inny sposób pokroić sześcian na 5 przystających wielościanów.

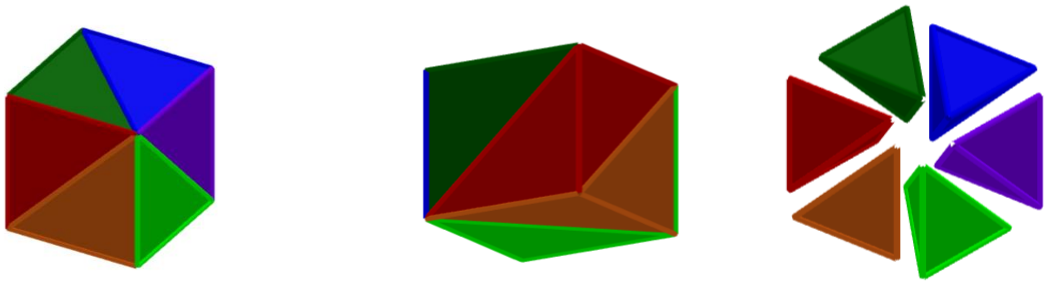


rys. 7

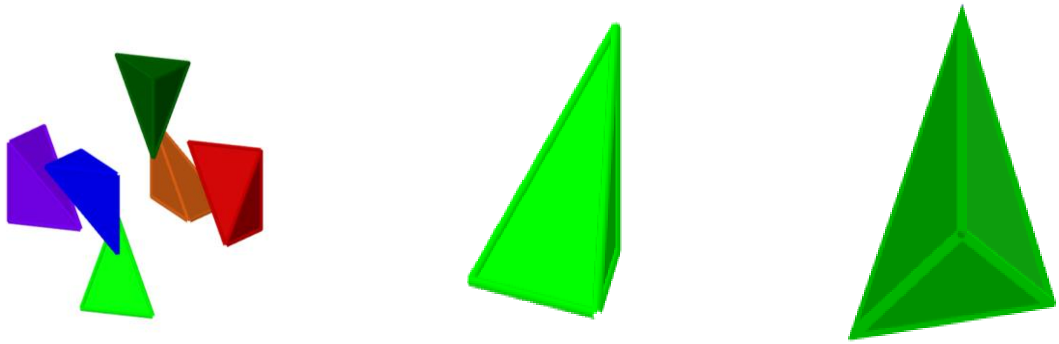
Sześcian na 6 części

Metoda 1 (przyjmujemy bryły enancjomorficzne powstałe z rozkładu sześcianu)

Żeby uzyskać rozkład sześcianu na 6 części rozkładamy go na 3 części, a następnie dzielimy każdą z uzyskanych brył na dwie przystające części, pionową płaszczyzną przechodzącą przez ich środek.



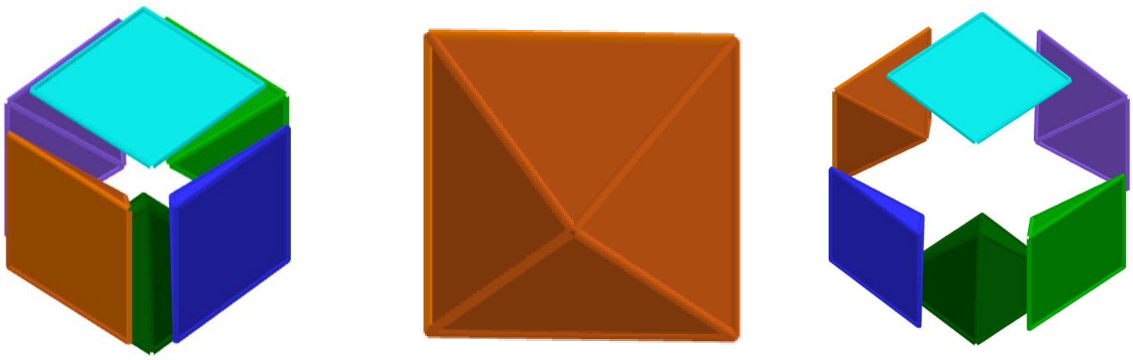
rys. 8



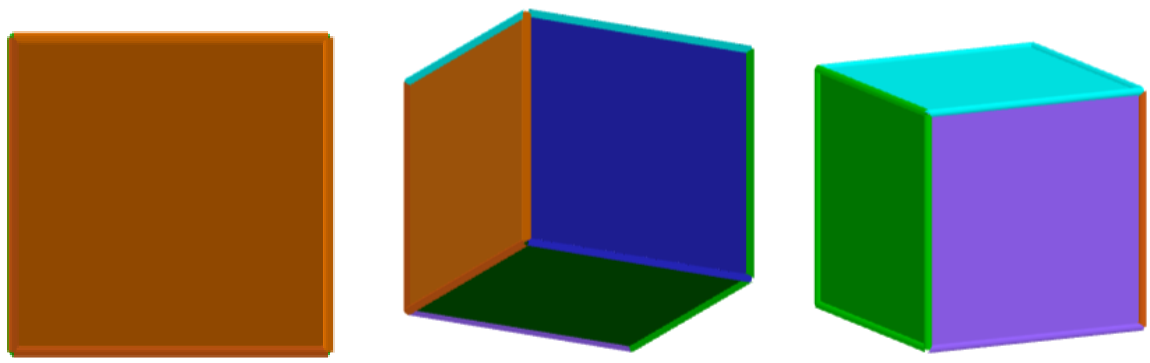
rys. 9

Metoda 2

Aby uzyskać inny rozkład sześcianu na 6 części, możemy podzielić sześcian na 6 jednakowych ostrosłupów o podstawach będących ścianami sześcianu, których wierzchołki leżą w środku sześcianu – rys. 10 a, b, c. Rys. 11 a, b, c ilustruje trzy rzuty jednej z sześciu wielościanów, na które rozcięto sześcian.



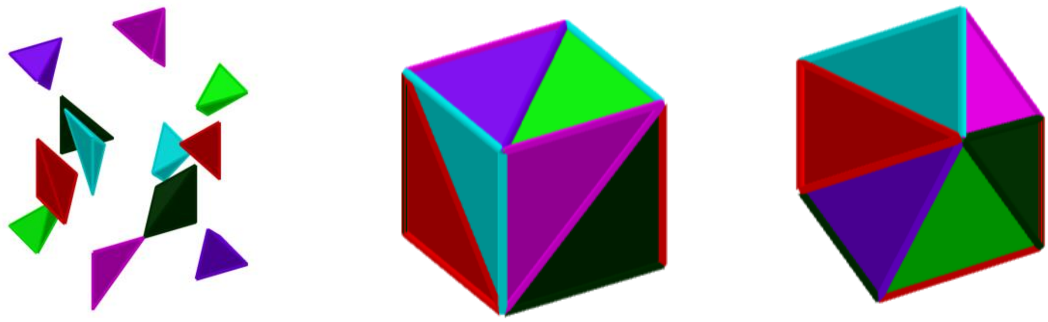
rys. 10 a, b, c



rys. 11 a, b, c.

Rozkład na 12 części

Metoda 1
W tej metodzie przyjmiemy jako przystające bryły również bryły enancjomorficzne powstałe z rozkładu sześcianu)
Enancjomorfizm można tu zauważyć na przykładzie ostrosłupów, które są dla siebie odbiciem lustrzanym. Ich objętości są sobie równe. Jeśli chcemy uzyskać tą metodą rozkład na 12 części wystarczy podzielić każdy z elementów wcześniejszego rozkładu sześcianu na 4 kawałki, jeszcze dodatkowo na 3 części.



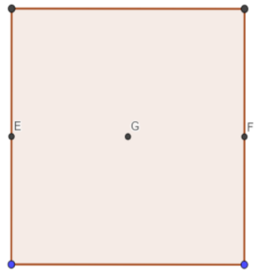
rys. 12 a, b, c.

rys. 13 a, b, c.

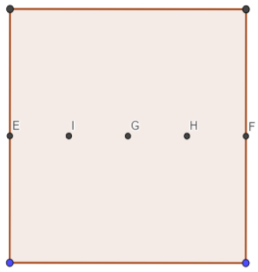
Metoda 2

Aby uzyskać rozkład na 12 części inną metodą wykonujemy na każdej ze ścian sześcianu następujące czynności:

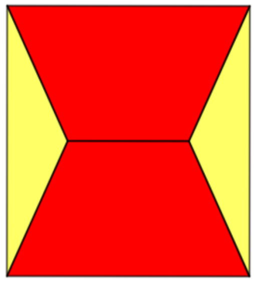
Krok 1:
Znajdujemy środek kwadratu będącego jedną ze ścian sześcianu – punkt G – rys. 13a.



rys. 14a



rys. 14b



rys. 14c

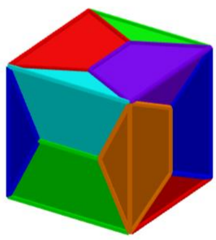
Krok 2:
Tworzymy środki odcinków ***EG*** i ***GF*** – punkty ***I*** oraz ***H*** – rys. 14 b.

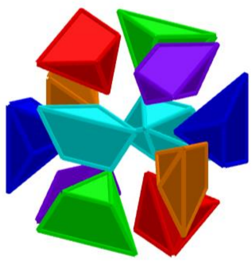
Krok 3:
Tworzymy dwa trójkąty równoramienne oraz dwa trapezy równoramienne tak, ja to ilustruje rys. 14c.

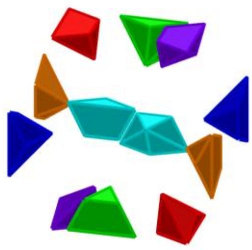
Krok 4:
Gdy zrobimy powyższe kroki na każdej ze ścian to otrzymamy wstępny szkic rozkładu sześcianu na 12 części. Teraz utworzymy wielościany których sąsiednie ściany są trójkątem jednej ściany sześcianu i pięciokątem sąsiedniej ściany. Krawędzią tych ścian jest wspólny odcinek trójkąta i pięciokąta.

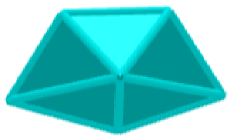
Powstała w ten sposób każda z 12 brył ma jeden z wierzchołków w środku sześcianu. Oznacza to, że wierzchołki trójkątów i pięciokątów łączę ze środkiem sześcianu.

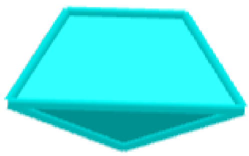
Rysunki 15 a-c ilustrują sposób tworzenia tego rozkładu a rys. 16 d-f różne rzuty jednej z przystających części tego rozkładu.

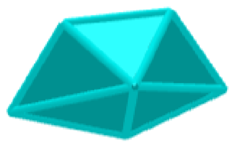

rys. 15a


rys. 15b


rys. 15c


rys. 16d

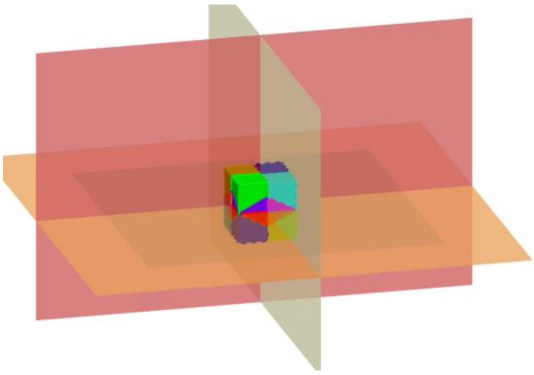

rys. 16e


rys. 14f

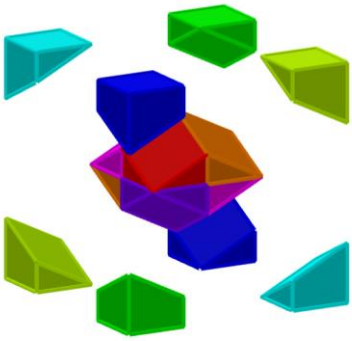
Rozkład na 16 części

Metoda 1

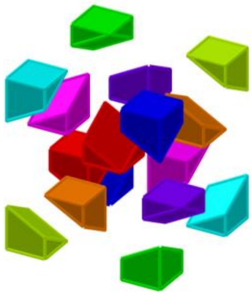
Jeśli chcemy uzyskać rozkład na 16 części wystarczy umieścić w sześcianie dwunastościan rombowy tak, żeby jego środek był środkiem sześcianu, a sześć jego wierzchołków stykało się z sześcianem w środkach jego ścian. Następnie dwunastościan rombowy rozcinamy na 4 jednakowe wielościany trzema płaszczyznami, jak widać na rysunku 17a. Pozostałą część sześcianu wypełniamy 8 bryłami, które są dokładnie tymi samymi elementami, na które rozcięliśmy dwunastościan rombowy.



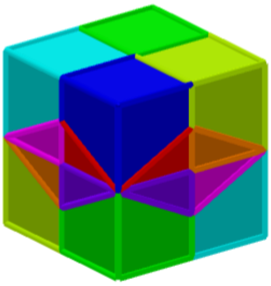
rys. 17a



rys. 17b

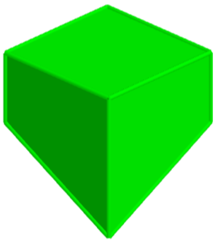


rys. 17c

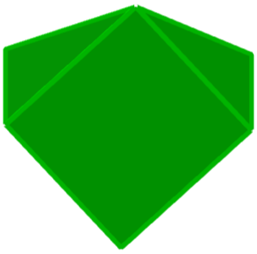


rys. 17d

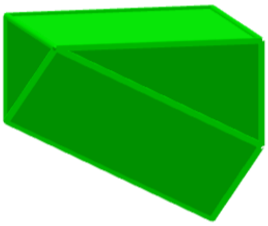
Rysunki 18 a – 18d ilustrują cztery różne rzuty jednego z szesnastu ośmiościanów, na które rozcięliśmy sześcian.



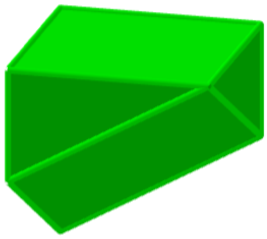
rys. 18a



rys. 18b



rys. 18c

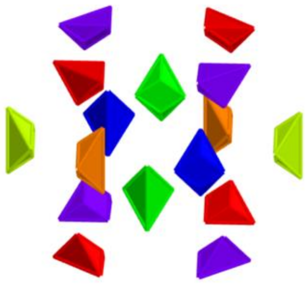


rys. 18d

Metoda 2

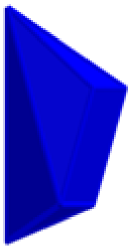
Jeśli chcemy uzyskać podobny rozkład sześcianu na 12 przystających części ponownie do sześcianu wkładamy dwunastościan. Przecinamy jego bryłę dwoma płaszczyznami prostopadłymi do siebie, aby uzyskać 4 przystające pięciościany. Następnie uzupełniamy dwunastościan rombowy do sześcianu takimi dwunastoma przystającymi pięciościanami.

rys 19 a

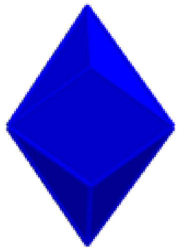


rys 19 b

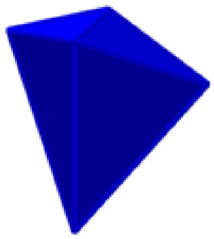
Rysunki 19c – e ilustrują trzy różne rzuty jednego z szesnastu pięciościanów, na które rozcięto sześcian.



rys 19 c



rys 19 d



rys 19 e

Rozkład na 24 części

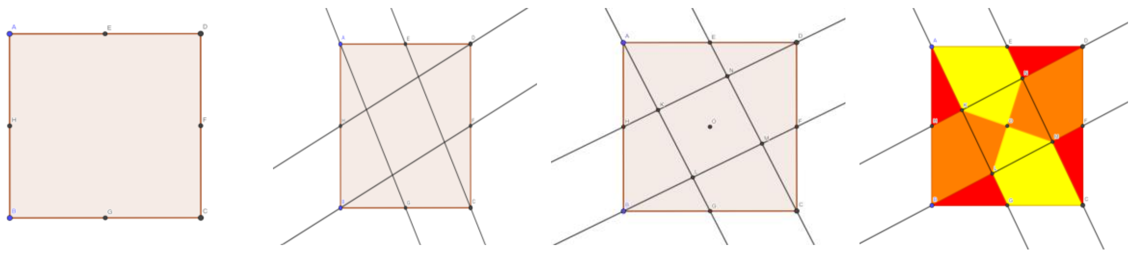
Aby uzyskać rozkład na 24 części wykonujemy 4 poniższe kroki:

Krok 1:
Na każdym boku kwadratu znajdujemy jego środek.

Krok 2:
Każdy wierzchołek kwadratu łączymy odcinkiem ze środkiem odpowiedniego boku kwadratu.

Krok 3:
Aby wykonać ten krok potrzebujemy uzyskać środek jednego z kwadratów sześcianu i zrobić punkty na każdym przecięciu prostych.

Krok 4:
Teraz kreślimy 4 trójkąty (czerwone na rys. 20d) oraz 4 pięciokąty (żółte i pomarańczowe na rys. 20d).

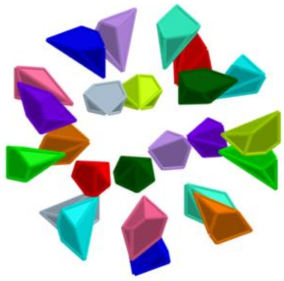


Rys. 20 a, b, c, d

Jeżeli zrobimy 4 powyższe kroki na każdej ze ścian sześcianu to uzyskamy 24 przystające wielościany, na które sześcian można rozciąć. W tym momencie wystarczy tylko, aby wierzchołki każdego pięciokąta i trójkąta ze sąsiedniej ściany zostały połączone ze środkiem sześcianu. Otrzymamy w ten sposób 24 przystające elementy na które rozcięto sześcian – rys. 21 a i b.

e

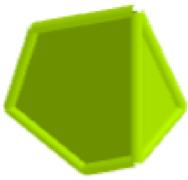
rys. 21a



rys. 21b

Rysunki 21 c, d i e ilustrują trzy różne rzuty jednego z tych dwudziestu czterech przystających elementów.

rys. 21c



rys. 21d

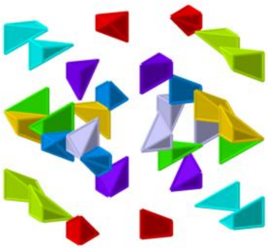
rys. 12e

Rozkład na 32 części

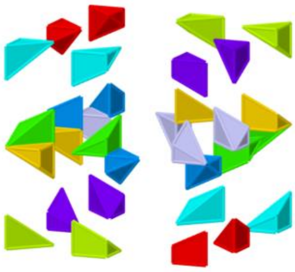
Przyjmujemy tu również jako wielościany przystające bryły enancjomorficzne.

Jeśli chcemy uzyskać rozkład na 32 części potrzebujemy elementy rozkładu na 16 części, aby każdą z nich podzielić na kolejne dwie części płaszczyzną pionową przechodzącą przez jej środek.

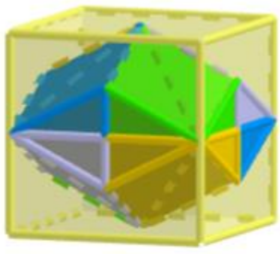
Rysunki 20 a, b, c, d ilustrują sposób tworzenia takiego rozkładu zaś rysunki 20 e, f, g rzuty jednego z 32 przystających wielościanów – rozkładów sześcianu.



rys. 22a

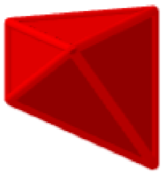


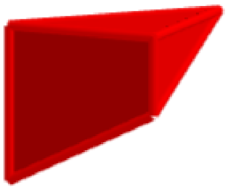
rys. 22b



rys. 22c


rys. 22d

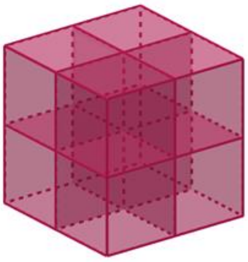

rys. 22e


rys. 22f


rys. 22g

Rozkład sześcianu na przystające sześciany

Gdybyśmy chcieli rozłożyć sześcian na inne mniejsze sześciany, to warto zauważyć, że najmniejsza liczba tych sześcianów jest równa 8, a każda następna to kolejna potęga liczby 8 – rys. 23. Ogólnie liczba mniejszych sześcianików będzie równa 8^n dla n > 0.

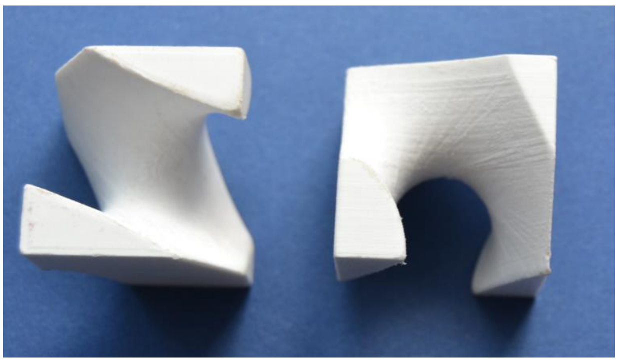

rys. 23

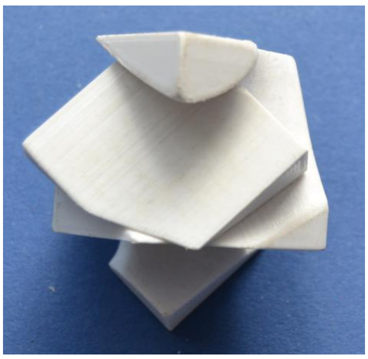
Inne podziały sześcianu

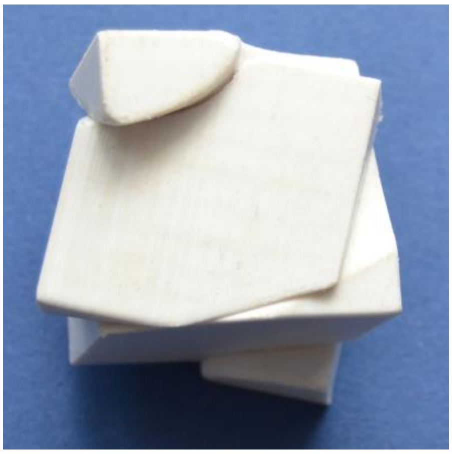
Oprócz opisanych tu podziałów sześcianu na przystające elementy na uwagę zasługuje bryła zwana „***screw cube***”. Jest to sześcian podzielony na dwie przystające bryły niczym nie przypominające wielościanów.

Mają one jednak dość ciekawą budowę, gdyż jedna z nich „wkręca” się w drugą uzupełniając się wzajemnie do sześcianu.

Rysunki 24 – 27 ilustrują cztery z wielu kolejnych etapów ich „składania”. Modele tych dziwnych tworów zostały wydrukowane przeze mnie na drukarce 3D typu ENDER 3 na podstawie materiałów odnalezionych w Internecie.


rys. 24


rys. 25

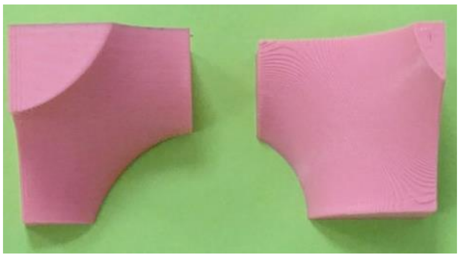


rys. 26

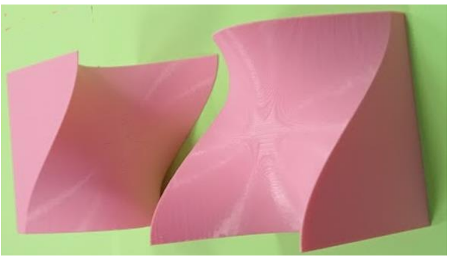
rys. 27

Innymi przystającymi segmentami sześcianu również odbiegające swym wyglądem od wielościanów są powierzchnie hiperboliczne, które można wymyśleć na ekranie GeoGebry poprzez tworzenie w nim gęstej sieci odpowiednich odcinków, które w całości kreują tzw. powierzchnię prostokreślną. Wydruk modelu takiego podziału sześcianu udostępnił mi opiekun mojej pracy.

Rysunki 28 i 29 ilustrują obie części rozdzielone a następnie złożone w sześcian.



rys. 28



rys. 29

Podziękowania

Chciałbym szczególnie podziękować Panu dr Bronisławowi Pabichowi za zorganizowanie ciekawych zajęć matematyki na szkolnym Kole Matematycznym, które pozwoliły mi rozwinąć moje umiejętności matematyczne, zwiększyły ciekawość świata oraz za redakcje tego projektu.

Również bardzo dziękuję za trud włożony w moją edukację matematyczną Pani mgr Krystynie Długosz oraz dyrekcji XX Liceum Ogólnokształcącemu w Krakowie za edukację na wysokim poziomie.

Jestem również wdzięczny rodzinie, która wspierała mnie oraz motywowała, abym zwiększał swoją wiedzę i zainteresowania w zakresie matematyki.