Spis treści:

1. Wstęp

Lubimy wspólnie z rodziną i klasą odwiedzać Rynek Główny w Krakowie, który jest jednym z najpiękniejszych w Europie, pełen kultury i wyjątkowego uroku. Kraków to miasto również pełne historii, zabytków i niepowtarzalnego klimatu, które zawsze nas fascynuje. Każda wizyta jest dla nas niezapomnianym przeżyciem. Piękno architektury Krakowa często wynika z harmonii, proporcji i detali, w tym ukrytych figur geometrycznych. Te ozdobne elementy, często wykonane z kamienia lub metalu, zdobią wiele budynków w mieście i są ważnymi elementami jego architektonicznego dziedzictwa. Oto kilka popularnych zabytków Krakowa, gdzie możemy znaleźć takie figury obrotowe: Barbakan, Zamek na Wawelu, Bazylika Mariacka, Sukiennice, Brama Floriańska, Wieża Ratuszowa, itd.

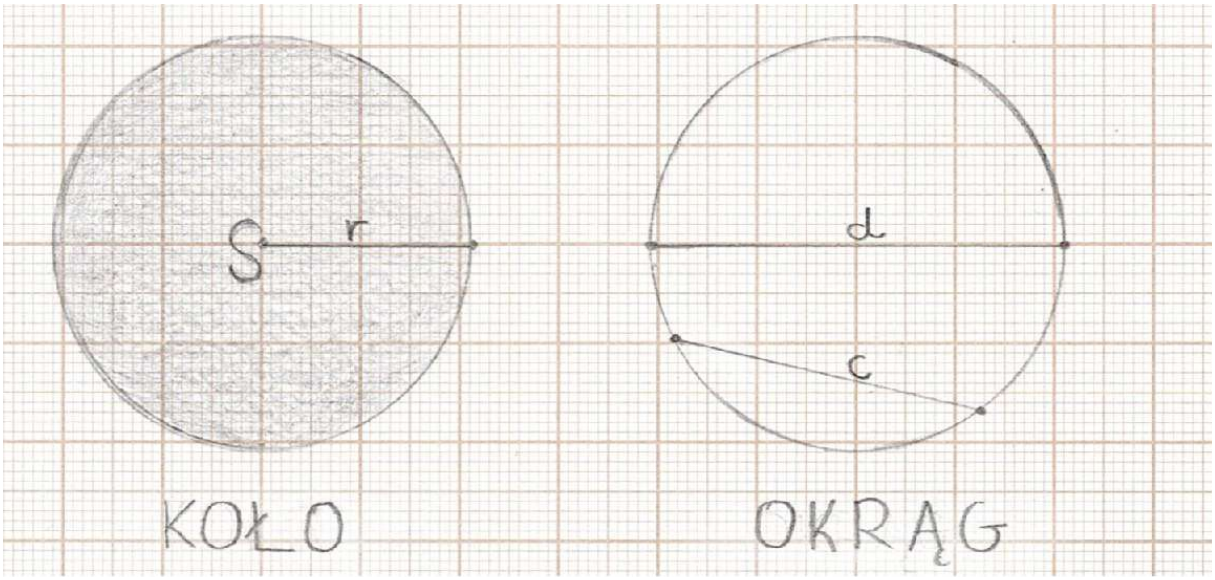
Pomysł na napisanie pracy matematycznej o figurach obrotowych powstał podczas takich wędrówek po Krakowie. Chciałybyśmy dowiedzieć się, jak policzyć ilość potrzebnego materiału do wykonania tych konstrukcji. Poznać sposoby i możliwości wykonania takich obliczeń. Tutaj z pomocą przychodzi nam dziedzina matematyki zwana geometrią, która swoją uwagę skupia właśnie na figurach geometrycznych, ich własnościach i zależnościach zachodzących między nimi. Przeglądając wzory matematyczne do obliczania własności figur geometrycznych zauważyłyśmy nieznaną dla nas dotychczas wartość liczby pi (π), która powtarza się cyklicznie i to od informacji związanych z tą liczbą rozpoczynamy naszą pracę.

2. Definicje oraz właściwości koła i okręgu.

Okrąg to zbiór punktów na płaszczyźnie, które są odległe od punktu centralnego (środka okręgu- S) o stałą odległość nazywaną promieniem(r). W praktyce to krzywa, którą rysuje nam cyrkiel. Okrąg jest „pusty w środku". Jest jedynie linią, brzegiem koła.

Koło to obszar wypełniony punktami wewnątrz okręgu, wraz z jego brzegiem. W praktyce to okrąg i każdy punkt, który znajduję się w jego wnętrzu.

Istnieje wiele właściwości okręgów i kół, w tym te, które przedstawiamy w naszej pracy.



1. Długość okręgu:
   jest to długość krzywej, którą wykreśliłyśmy cyrklem. Obliczana jest za pomocą wzoru:
   $$Obw=2\pi r,$$
   gdzie r to promień okręgu, a π (pi) to liczba określająca stosunek obwodu okręgu do jego średnicy (≈3.14).
2. Pole powierzchni koła:
   to obszar wewnątrz okręgu, obliczany za pomocą wzoru:
   $$P = \pi r^2$$
3. Cięciwa (c):
   to odcinek łączący dwa punkty leżące na okręgu.
4. Promień (r):

to odległość od środka okręgu do dowolnego punktu leżącego na okręgu.

5. Średnica (d):

   to odcinek przechodzący przez środek okręgu, łączący dwa punkty leżące na okręgu. Jego długość jest równa dwukrotności promienia.

6. Środek okręgu (S):

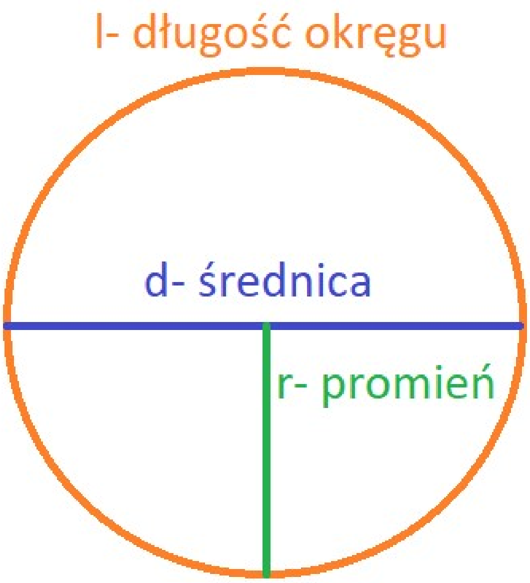
   to punkt wewnątrz okręgu, równo odległy od każdego punktu na jego brzegu.

2.1. Liczba pi (π)

Przyjmuje się, że pierwszą osobą, która dokonała odkrycia liczby pi był Grecki matematyk Archimedes w III w. p.n.e. Dokonał tego odkrycia poprzez tworzenie kolejnych wielokątów zbudowanych na okręgu i wpisanych w okrąg. Do wyniku doszedł po wykreśleniu foremnego wielokąta o 96 bokach. Symbol π został wprowadzony przez walijskiego matematyka Williama Jonesa w roku 1706. Symbol ten jest pierwszą literą greckiego słowa περίμετρον – perimetron, co oznacza obwód. Liczbę π wykorzystywano już w starożytności do tak praktycznych zajęć jak rolnictwo i budownictwo.

Liczba π powstała w wyniku obserwacji, jako stosunek obwodu koła (długość okręgu l) do jego średnicy d i jest to wartość stała:

$l/d = \pi$ lub $l = \pi d = 2\pi r$



Ponieważ stosunek obwodu koła do jego średnicy jest stały i wyrażony liczbą

$$\pi = l/d \approx 3{,}14,$$

to stąd wnika, że im większa średnica koła, tym proporcjonalnie większa przebyta odległość przez punkt ustalony na jego obwodzie podczas toczenia. Co możemy zapisać:

$$l = \pi d = 2\pi r \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot r$$

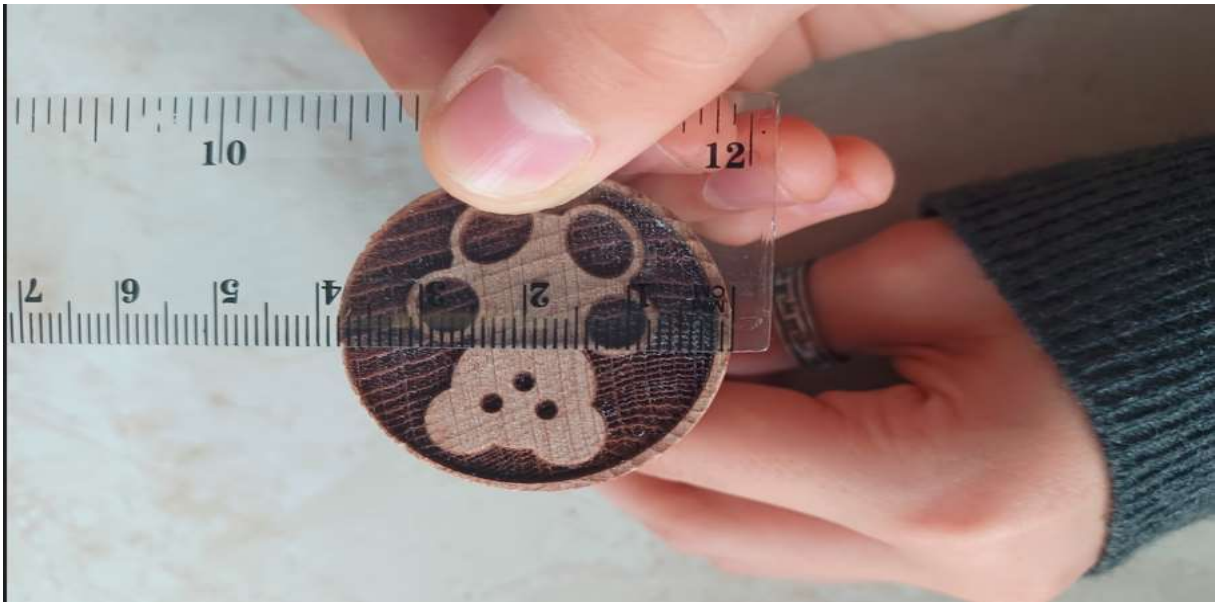
Sprawdzamyile wyniesie liczba pi w naszym ćwiczeniu i czy zostanie zachowany stały stosunek obwodu koła do jego średnicy. Posłużyły nam do tego celu pieczątka do robienia ciasteczek i pudełko na świąteczne ciasteczka.

Wygląd użytych rekwizytów w przeprowadzonych ćwiczeniach:

Na początek zmierzyłyśmy średnicę koła świątecznego pudełka i pieczątki do ciasteczek.

Średnica koła pieczątki do ciasteczek wynosiła 38,5mm, a średnica koła świątecznego pudełka wynosiła 152mm.

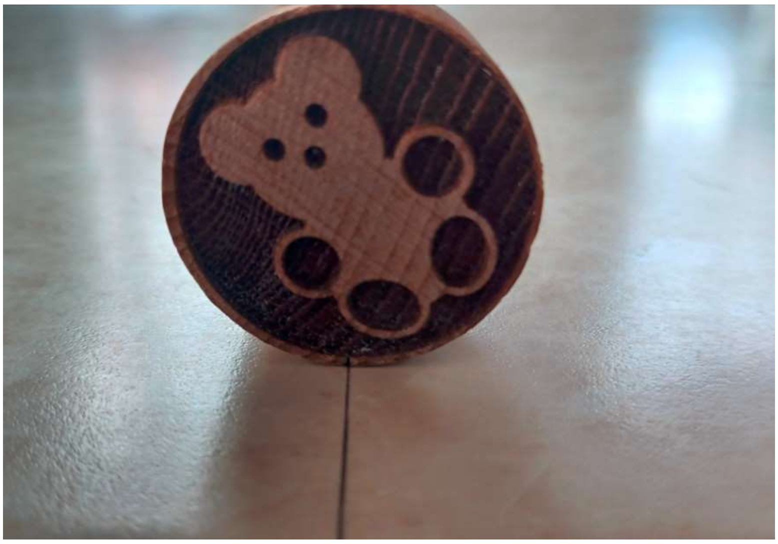
Pomiar średnicy pieczątki do robienia ciasteczek.



Pomiar średnicy pudełka na świąteczne ciasteczka.

Następnie zaznaczyłyśmy linię pionową na obwodzie koła pieczątki i pudełka. Taką samą linię wykonałyśmy na podstawie, od której rozpoczął się nasz pomiar długości obwodu koła. Po ustawieniu w jednej linii pionowej kreski na obwodzie koła pieczątki i pudełka z kreską na podstawie pomiarowej, rozpoczęłyśmy pełny obrót tych kół wzdłuż linii prostej, aż do momentu dotknięcia podstawy pomiarowej przez pionową kreskę zaznaczoną uprzednio na obwodzie koła pudełka i pieczątki.

Start ćwiczenia pełnego obrotu pieczątki do robienia ciasteczek.



Zmierzona długość obwodu pieczątki do ciasteczek.

Start ćwiczenia pełnego obrotu pudełka na świąteczne ciasteczka.

Zmierzona długość obwodu pudełka do ciasteczek.

Otrzymałyśmy następujące wyniki z naszych pomiarów:

Długość obwodu pieczątki do ciasteczek wyniósł 121mm, a długość obwodu pudełka świątecznego 480mm.

Teraz możemy przejść do wyznaczenia wartości π z naszych pomiarów.

Wartość π dla pieczątki do robienia ciasteczek obliczyłyśmy następująco:

l= długość obwodu pieczątki =121mm

d = średnica pieczątki = 38,5mm

$\pi_{\text{PIECZĄTKI}}$ = l/d = długość obwodu pieczątki / średnicę pieczątki = 121mm/38,5mm = 3,142857…

Wartość π dla pudełka na świąteczne ciasteczka obliczyłyśmy następująco:

l= długość obwodu pudełka = 480mm

d = średnica pudełka = 125mm

$\pi_{\text{PUDEŁKA}}$ = l/d = długość obwodu pudełka / średnicę pudełka = 480mm/152mm =

= 3,157894…

Wartość liczby pi do trzeciego miejsca po przecinku wynosi π ≈ 3,141…

My otrzymałyśmy : $\pi_{\text{PIECZĄTKI}}$ = 3,142… ; $\pi_{\text{PUDEŁKA}}$ = 3,157…

Wnioski z przeprowadzonego ćwiczenia:

- wartość otrzymanych wyników jest bliska rzeczywistej wartości liczby pi, choć nie identyczna.

- przeprowadzone ćwiczenie pokazało nam, że bez względu na wielkość koła jego obwód w stosunku do średnicy jest stały i nazywany liczbą pi.

- różnica w wyniku końcowym naszego ćwiczenia w stosunku do wartości rzeczywistej liczby pi jest spowodowana niedokładnościami jakie miały miejsce przy jego wykonywaniu, jak również z dokładności użytych przyrządów pomiarowych.

Przeprowadzone ćwiczenie pokazało nam , że liczbę π (pi) nie można przedstawić jako ułamek dziesiętny o skończonej wartości, co oznacza, że jest to liczba niewymierna. Najczęściej używana przybliżona wartość π to 3,14. Poniżej liczba pi z rozwinięciem jej wartości do 204 miejsc po przecinku:

π ≈ 3,141592 653589 793238 462643 383279 502884 197169 399375 105820 974944 592307 816406 286208 998628 034825 342117 067982 148086 513282 306647 093844 609550 582231 725359 408128 481117 450284 102701 938521 105559 644622 948954 930381 964428…

Jest to jedna z najważniejszych stałych matematycznych i występuje w wielu obszarach matematyki, fizyki i innych naukach przyrody.

Ciekawostki związane z liczbą π :

- dzień 14 marca przyjmuje się jako święto liczby pi, ponieważ pierwsze trzy cyfry π to 3, 1, 4, co odpowiada dacie 14 marca (3/14 w formacie amerykańskim).

- pierwszy raz użyto symbolu pi w 1706r, a zrobił to walijski matematyk William Jones.

- nieskończona nieprzewidywalność, ponieważ rozwinięcie π jest nieskończone i nieprzewidywalne, co oznacza, że nie ma ustalonego wzoru dla kolejnych cyfr. Znane są biliony miejsc po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π (w 2022 roku rekord wynosił ponad 62,8 biliona cyfr!), ale nie ma reguły, która pozwalałaby przewidzieć kolejne cyfry bez ich obliczania.

- niewymierność π, co oznacza, że nie można jej przedstawić jako ułamek dwóch liczb całkowitych. Dowód tego faktu został po raz pierwszy przedstawiony przez Johannesa Ludwiga Lamberta w 1768 roku.

- jak określano przybliżenie π w historii: Starożytni matematycy tacy jak Archimedes użył wielokątów wpisanego i opisanego wokół koła, aby oszacować π z większą precyzją. Znane są również przybliżenia π w tekstach biblijnych (1 Księga Królewska 7:23) i przez starożytne kultury.

- w kryptografii, algorytmy oparte na Pi są używane do generowania kluczy szyfrujących.

- powszechnie używanym przybliżeniem i zupełnie wystarczającym jest π o wartości 3,14. Bardzo dobrym przybliżeniem tej niewymiernej liczby π jest ułamek **22/7** – ta wartość była już używana w starożytnym Egipcie. Różni się od faktycznej wartości o około **0,04025%.**

- Albert Einstein urodził się w dniu π – 14 marca 1879 roku.

- Rekord Guinnesa w zapamiętywaniu ilości cyfr po przecinku, składających się na liczbę π, należy do Japończyka, zapamiętał on aż 100 000 liczb. Na ten wyczyn potrzebował on 16 godzin. Co dwie godziny mógł zrobić sobie przerwę na skorzystanie z toalety i spożycie kulek ryżowych.

2.2 Okrąg i koło w obliczeniach.

Do obliczeń przyjmujemy wartość pi równą 3,14.

Zadanie 1.

Oblicz pole powierzchni i obwód koła o średnicy 5cm.

d = 5cm czyli r=d/2 = 2,5cm

Obw = 2πr = 2•3,14•2,5cm = 15,7cm

$P = \pi r^2 = 3{,}14 \bullet (2{,}5cm)^2 = 19{,}625cm^2$

Odpowiedź: Pole powierzchni koła wynosi $19{,}625cm^2$,a jego obwód wynosi 15,7cm.

Zadanie 2.

Oblicz pole koła, którego obwód wynosi 18,84cm.

$Obw = 2\pi r = 2 \bullet 3{,}14 \bullet r$

$18{,}84 = 2 \bullet 3{,}14 \bullet r$

$18{,}84 = 6{,}28 \bullet r \ / \ 6{,}28$

$r = 18{,}84/ \ 6{,}28$

$r = 3cm$

$P = \pi r^2 = 3{,}14 \bullet (3cm)^2 = 28{,}26cm^2$

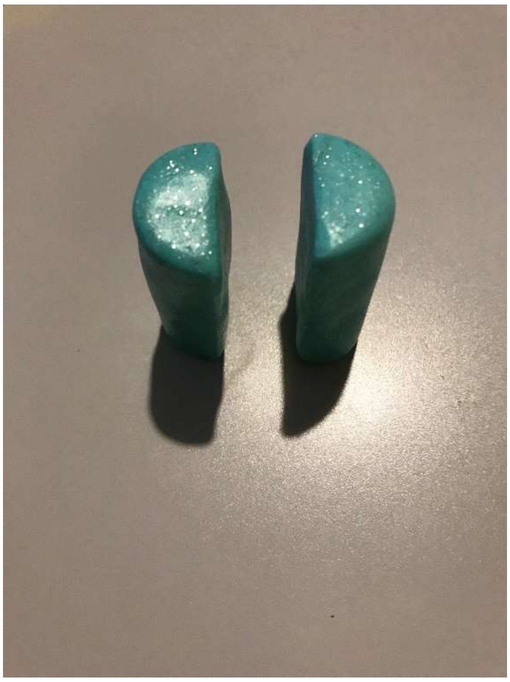
Odpowiedź: Pole koła wynosi $28{,}26cm^2$.

3.Bryły obrotowe

Bryła obrotowa to bryła geometryczna, która powstaje w wyniku obrotu figury płaskiej wokół prostej (nazywanej osią obrotu). Na przykład, gdy obrócimy trójkąt prostokątny wzdłuż jednej z jego przyprostokątnych o kąt pełny (czyli 360^0) to otrzymamy stożek. Figura płaska może być obracana na wiele sposobów np. wzdłuż boków albo wzdłuż wysokości.

Do najbardziej rozpoznawalnych brył obrotowych zaliczamy między innymi: stożek, walec oraz kulę. Wśród mniej znanych brył obrotowych możemy znaleźć np. torus, beczkę czy elipsoidę obrotową.

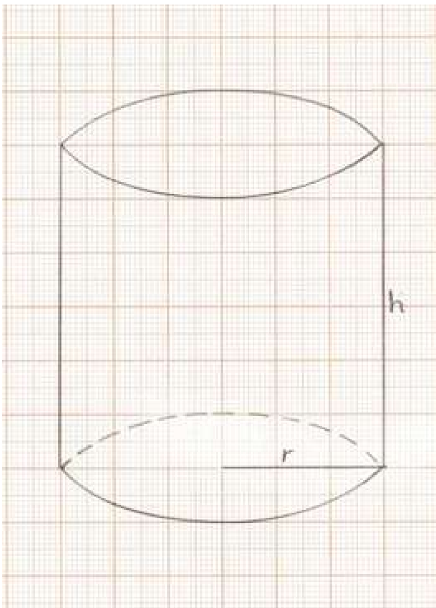
Podstawowymi przekrojami bryły obrotowej są : przekrój osiowy i przekrój poprzeczny. Przekrój osiowy to to część wspólna tej bryły z płaszczyzną zawierającą oś obrotu, a przekrój poprzeczny to to część wspólna tej bryły z płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu. Poniżej przedstawiamy wykonane przez nas przekroje walca.



przekrój osiowy

przekrój poprzeczny

3.1 Walec

Walec to bryła powstała przez obrót prostokąta wokół prostej zawierającej dowolny jego bok. Każdy odcinek (a także jego długość) łączący dwie podstawy walca oraz każdy odcinek do nich prostopadły nazywany jest wysokością walca. Objętość walca jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości. Występuje w postaci np. słupów informacyjnych lub koszy na śmieci. Oto parę wzorów ułatwiających obliczanie jego pola powierzchni i objętości:

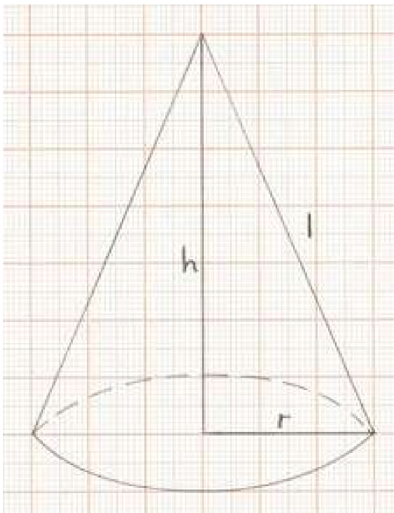
- wzór na pole podstawy walca : $Pp = \pi r^2$
- wzór na objętość walca : $V = Pp \cdot h = \pi r^2 h$
- wzór na pole powierzchni bocznej walca : $Pb = 2\pi rh$
- wzór na pole powierzchni całkowitej walca : $Pc = 2\pi(r^2 + rh) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, gdzie:

r - długość promienia podstawy walca

h - wysokość walca

3.2 Stożek





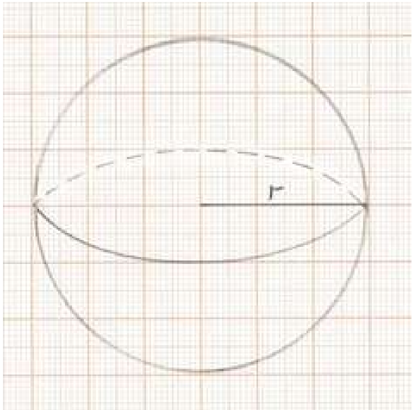
Stożek to bryła, która powstaje w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z jego przyprostokątnych. Nazywamy ją wysokością stożka, a drugą promieniem podstawy. Przeciwprostokątna trójkąta staje się tworzącą stożka. Pole powierzchni bocznej stożka to pole wycinka koła, z którego zbudowany jest stożek. Wzory, które umożliwiają obliczanie jego pola powierzchni i objętości :

- wzór na pole podstawy stożka : $Pp = \pi r^2$
- wzór na objętość stożka : $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$
- wzór na pole powierzchni bocznej stożka : $Pb = \pi rl$
- wzór na pole powierzchni całkowitej stożka : $Pc = \pi r^2 + \pi rl = \pi r (r + l)$, gdzie:

r - długość promienia podstawy stożka
l - długość tworzącej stożka
h - wysokość stożka

3.3 Kula





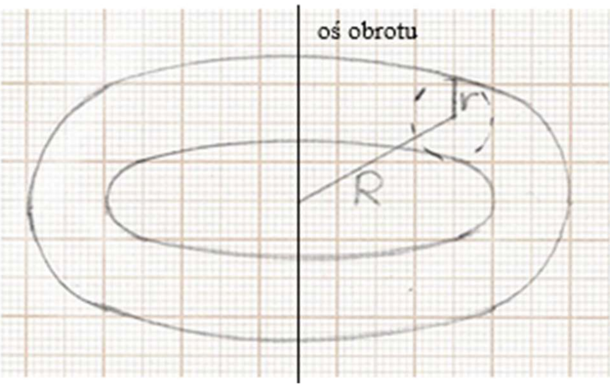
Kula to bryła, którą otrzymujemy przez obrót półkola wokół średnicy lub koła wokół jego jednej z osi symetrii. Powierzchnię kuli nazywamy sferą. Kulę możemy spotkać na co dzień w postaci np. globusa, piłki czy lizaka. Do obliczeń związanych z kulą stosujemy wzory:

- wzór na objętość kuli : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- wzór na pole kuli : $P = 4\pi r^2$, gdzie:

r - długość promienia kuli

3.4 Torus





Torus, inaczej nazywany torusem pierścieniowym, to bryła, która powstaje w wyniku obrotu okręgu wokół prostej leżącej w jego płaszczyźnie, ale nie przecinającej tego okręgu. Przykładem torusa może być np. obwarzanek, dętka z koła rowerowego.

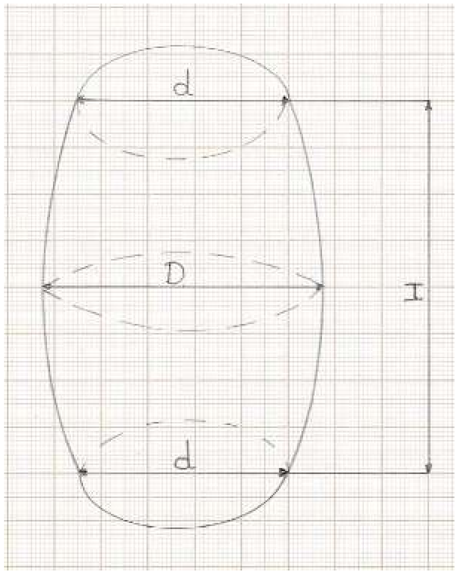
Objętość i pole powierzchni torusa możemy obliczyć za pomocą następujących wzorów :

- wzór na objętość torusa : $V = 2 \bullet \pi^2 \bullet R \bullet r^2$
- wzór na pole powierzchni torusa : $P = 4 \bullet \pi^2 \bullet R \bullet r$, gdzie

R –promień torusa

r - promień okręgu.

3.5 Beczka



Beczka to bryła powstająca przez obrót figury płaskiej ograniczonej łukiem, dwoma odcinkami jednakowej długości prostopadłymi do osi obrotu i osią obrotu, wokół tej osi.

Wzór na objętość beczki :

- wzór na objętość beczki, gdy łuk tworzący jej powierzchnię boczną jest fragmentem okręgu : $V = {}^1/_{12}\pi h(2D^2 + d^2)$, gdzie

D - średnica beczki w jej najszerszym punkcie

d - średnica beczki w jej najwęższym punkcie

h - wysokość beczki.

Gdy d = 0, bryła upraszcza się do elipsoidy, gdy D = d - do walca.

4. .Gdzie można znaleźć bryły obrotowe w Krakowie?

Przykłady brył obrotowych możemy odnaleźć w architekturze. Stożki odnajdziemy na przykład w kształtach dachów wielu budowli. Słynna Krzywa Wieża w Pizie jest zbudowana na wzór walca. W paryskiej sali kinowej La Geode możemy zaobserwować kształt kuli. Wzorując się na słynnych zabytkach światowych chciałyśmy poszukać zabytków w kształcie brył obrotowych w naszym rodzinnym mieście Krakowie.

Na zdjęciu został uwieczniony Barbakan. Kształtem przypomina on walec.

Na fotografii widać basztę, która ma kształt walca i służyła kiedyś do obrony miasta.

Na zdjęciu można dostrzec kulę wieńczącą dach kamienicy przy zbiegu ulic Basztowej i Długiej.

Na fotografii znajduje się totem reklamowy, kształtem przypominający walca. Usytuowany jest przed Aquaparkiem i obok hotelu Swing.

Zdjęcie przedstawia budynek nazywany „okrąglakiem''. Znajduje się na ulicy Bociana. Jego postać przypomina walca.

Na fotografii usytuowana jest TAURON Arena Kraków. Kształtem przypomina elipsoidę obrotową - bryłę, która jest zamkniętą powierzchnią drugiego stopnia powstałą przez obrót elipsy wokół jednej z jej osi symetrii. Każdy jej przekrój jest płaszczyzną (elipsą lub okręgiem w szczególnym przypadku).

5.Przykładowe zadania o bryłach obrotowych

W niniejszym rozdziale chcemy podzielić się zadaniami ułożonymi przez nas. Inspiracją do ich powstania (ułożenia i rozwiązania) była nasza obserwacja, że bryły obrotowe spotykamy każdego dnia wśród otaczającego nas świata. Spacer, wyjście do sklepu mogą stać się okazją do rozpoznawania figur geometrycznych.

Zadanie 1.

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego pojemnika na deszczówkę. Wynik podaj z dokładnością do całości.

Rozwiązanie:

- promień - r - 30,5 cm
- wysokość - h - 94 cm
- objętość pojemnika:

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 30{,}5^2 \cdot 94 = 87443{,}5\pi\ cm^3 = 274572{,}59\ cm^3 = 274{,}57259\ dm^3 \approx 275\ l$

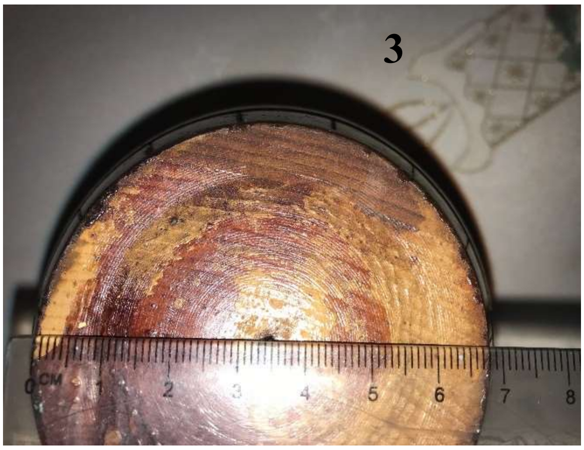
- pole całkowite pojemnika:

$P_c = 2\pi(r^2 + rh) = 2\pi(30{,}5^2 + 30{,}5 \cdot 94) = 2\pi(930{,}25 + 30{,}5 \cdot 94) = 2\pi(930{,}25 + 2867) =$
$= 2\pi \cdot 3797{,}25 = 7594{,}5\pi\ cm^2 \approx 7594{,}5 \cdot 3{,}14\ cm^2 = 23846{,}73\ cm^2 \approx 238\ dm^2$

Do pomiarów tego pojemnika użyłyśmy specjalnej aplikacji na telefon o nazwie „Miarka”. Jest ona połączona z aparatem w telefonie. Żeby uzyskać potrzebne wymiary należy zaznaczyć punkt, od którego chcemy zacząć. Później powoli przesuwamy telefonem aż do momentu, kiedy zakończymy mierzenie. Wtedy na ekranie pojawi nam się wymiar obiektu. Niestety nie zawsze wymiary wykonane telefonem są dokładne. W rzeczywistości ten pojemnik ma 112,8 cm wysokości i 64,8 cm szerokości (średnicy).Objętość tego pojemnika według naszych pomiarów i obliczeń wyszła o 10 litrów mniejsza niż ta podana w ofercie sklepu. Niewątpliwie wpływ na to mają nie tylko pomiary, ale przyjęte przez nas przybliżenie liczby pi.

Zadanie 2

Oblicz objętość beczki.



Zanim zaczęłam rozwiązywać to zadanie nalałam wody do tej beczki, a potem przelałam ją do pojemnika z podziałką mililitrową. To wykazało, że beczka ma pojemność 515 ml. Zmierzyłam grubość ścianki (zdjęcie 4), ponieważ zaciekawiło mnie czy będzie to miało jakikolwiek wpływ na otrzymany przeze mnie wynik. Żeby to zrobić należy od promienia większej średnicy odjąć 7 mm, a następnie pomnożyć otrzymany wynik przez dwa.

D_1 - 11 cm (średnica całej beczki mierzona na zewnątrz)

R_1 (promień) - 11 cm : 2 = 5,5 cm

5,5 cm - 0,7 cm = 4,8 cm

4,8 cm * 2 = 9,6 cm

d_1 = 6,8 cm

Rozwiązanie:

- średnica beczki w jej najszerszym punkcie - D - 9,6 cm (samego „wnętrza" po odliczeniu grubości ścianki)
- średnica beczki w jej najwęższym punkcie - d - 6,8cm – 1,4 cm = 5,4 cm
- wysokość beczki - h - 11,2 cm – 0,7 cm = 10,5 cm
- objętość beczki:

$V = 1/12\pi h(2D^2 + d^2) = 1/12 * \pi * h * (2D^2 + d^2) =$

$= 1/12 * \pi * 10{,}5\ cm * (2 * (9{,}6\ cm)^2 + (5{,}4\ cm)^2) =$

$= 1/12 * \pi * 10{,}5\ cm * (2 * 92{,}16\ cm^2 + 29{,}16\ cm^2) =$

$= 1/12 * \pi * 10{,}5\ cm * (184{,}32\ cm^2 + 29{,}16\ cm^2) =$

$= 1/12 * \pi * 10{,}5\ cm * 213{,}48\ cm^2 =$

$= 1/12 * \pi * 2241{,}54\ cm^3 =$

$= \pi * 186{,}795 cm^3 \approx 586{,}5363\ cm^3 = 586{,}5363\ ml$

W tego typu działaniach łatwo się pomylić już nawet na etapie pomiarów.Taką sytuację można dostrzec na dwóch zdjęciach nr. 2 i 3. Zdjęcie nr. 2 przedstawia małą średnicę beczki mierzoną od góry, a zdjęcie nr. 3 od dołu. Różnica to „tylko” 4 mm. Właściwy pomiar to ten wykonany od dołu, ponieważ widać tam małe wgłębienie na środku. Dzięki temu można łatwo ustalić, gdzie jest środek koła i poprawnie ułożyć linijkę.

Zadanie 3

Pani Ola chciała posadzić pomidory w doniczce o kształcie stożka ściętego. Zastanawiała się jaką ilość ziemi potrzebuje, jeżeli musi ją wymieniać 4 razy do roku. Pomóż pani Oli podjąć decyzję o zakupie ziemi tak, aby opcja była najbardziej ekonomiczna.

Ceny ziemi :

- 6,98 zł/sztukę - 10l
- 14,98 zł/sztukę - 20l

Rozwiązanie :

W pierwszej kolejności musimy obliczyć objętość jednej donicy. Wymiary donicy pani Oli przedstawiają się następująco:

- wysokość - h - 38 cm = 3,8 dm
- średnica otworu górnego - 40 cm - promień - R - 20 cm = 2 dm
- średnica dna (górna powierzchnia) - 23 cm - promień - r - 11,5 cm = 1,15dm

Objętość stożka ściętego obliczmy ze wzoru:

$$V = \frac{1}{3} * \pi * h *(r^2 + rR + R^2).$$

$V = \frac{1}{3} * \pi * h *(r^2 + rR + R^2) =$

$= \frac{1}{3} * 3{,}14 * 3{,}8\ dm *((1{,}15\ dm)^2 + 1{,}15\ dm \bullet 2\ dm + (2\ dm)^2) =$

$= \frac{1}{3} * 3{,}14 * 3{,}8\ dm *(1{,}3225\ dm^2 + 2{,}3\ dm^2 + 4\ dm^2)=$

$= \frac{1}{3} * 3{,}14 * 3{,}8\ dm * 7{,}6225\ dm^2 =$

$= \frac{1}{3} * 11{,}932 dm * 7{,}6225\ dm^2 =$

$= \frac{1}{3} * 90{,}95167\ dm^3 = 30{,}31722(3)\ dm^3 \approx 30{,}32 dm^3 = 30{,}32\ l$

30,32l * 4 = 121,28 l –tyle ziemi pani Ola potrzebuje rocznie

Warto obliczyć jaki jest koszt 1 litra ziemi w zależności od pojemności worków.

Rodzaj worka	Cena	Cena za 1 litr
Worek 10 l	6,98 zł	6,98 zł : 10 = 0,698 zł
Worek 20 l	14,98 zł	14,98 zł : 20 = 0,749 zł

Rozpatrujemy różne warianty uwzględniając, że najtaniej wychodzi kupno jak największej ilości worków 10 l:

(1) same worki 20 l

20l * 7 = 140l

Ile zapłaci za 7 paczek ziemi po 20 litrów?

14,98 zł * 7 = 104,86 zł

(2) same worki 10 l

13 * 6,98 zł = 90,74 zł

(3) 6 worków 20 l i 1 worek 10 l

6 * 14,98 zł + 6,98 zł = 89,88 zł + 6,98 zł = 96,86 zł

Odp.: Najbardziej ekonomiczną opcją dla pani Oli jest kupno 13 worków ziemi po 10 litrów.

Zadanie 4.

Obliczamy na podstawie poznanych wzorów elementy typowej wieży obronnej z epoki średniowiecza, jaką możemy zaobserwować w krakowskiej architekturze. Podane są poniżej następujące informacje i rysunki:

Dane:

$r=6m$

$r_1 = 7,47m$

$h_1 = 15,04m$

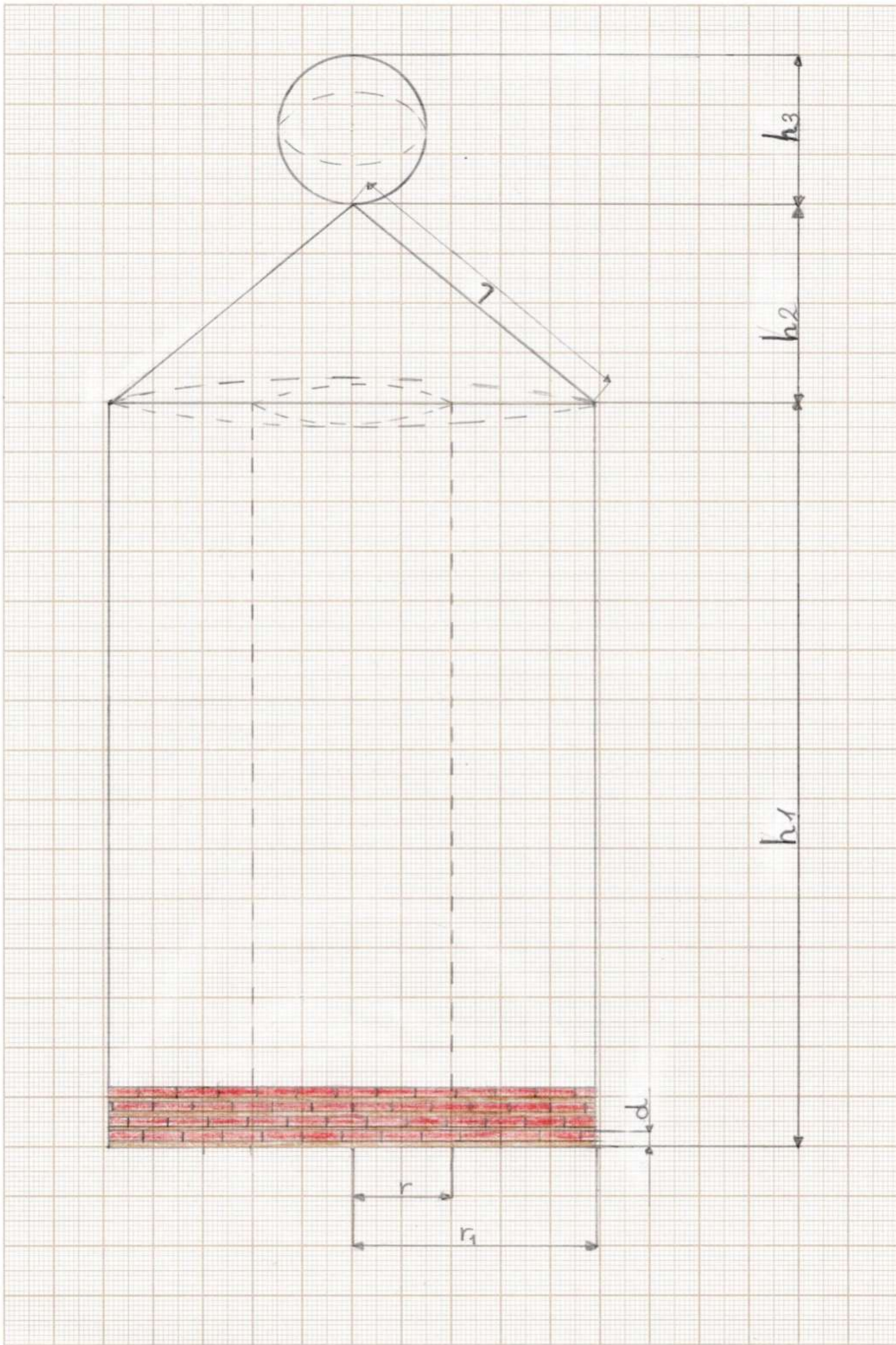
$h_2=3m$

$h_3=0,5m$

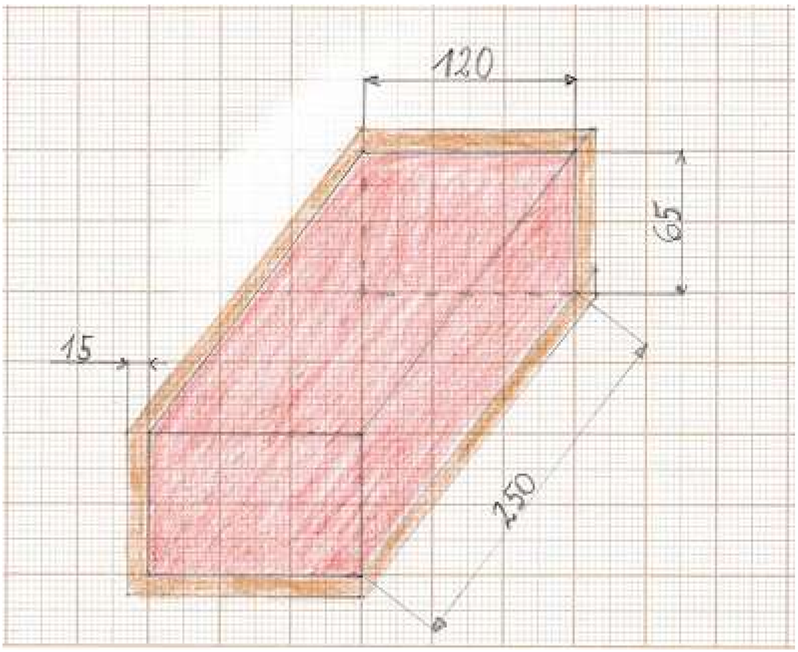
$l = 8,05m$

$d = 0,08m$

Rysunek wieży:



Rysunek cegły (wymiary na rysunku są podane w mm). Kolorem czerwonym oznaczona jest cegła, a kolorem brązowym oznaczona jest fuga murarska.



Dane:

120mm = 0,12m ;

65mm = 0,065m ;

250mm = 0,25m

Rozpatrujemy następujące problemy:

a) obliczyć objętość i pole powierzchni zewnętrznej całej wieży oraz osobno każdej z jej części.

Przedstawioną wieżę możemy podzielić na trzy znane nam figury geometryczne to jest: walec, stożek i kula.

Obliczamy objętość walca, czyli podstawę wieży:

$V_w = Pp \bullet h = \pi \bullet r^2 \bullet h = \pi r_1^2\ h_1 = 3{,}14 \bullet (7{,}47m)^2 \bullet 15{,}04m = 2635{,}23098304m^3$

Obliczamy pole powierzchni bocznych walca, czyli zewnętrzne pole murów wieży:

$Pb_w = 2 \bullet \pi \bullet r \bullet h = 2 \bullet 3{,}14 \bullet\ r_1 \bullet\ h_1 = 2 \bullet 3{,}14 \bullet 7{,}47m \bullet 15{,}04m = 705{,}550464m^2$

Obliczamy objętość stożka, czyli objętość dachu wieży:

$V_S = ⅓ \bullet Pp \bullet h = ⅓ \bullet \pi \bullet r^2 \bullet h = ⅓ \bullet \pi \bullet r_1^2 \bullet\ h_2 = ⅓ \bullet\ 3{,}14 \bullet (7{,}47m)^2 \bullet 3m = 175{,}214826m^3$

Obliczamy pole powierzchni bocznych stożka, czyli zewnętrzne pole dachu wieży:

$Pb_S = \pi \cdot r \cdot l = 3,14 \cdot r_1 \cdot l = 3,14 \cdot 7,47m \cdot 8,05m = 188,81919m^2$

Obliczamy objętość kuli na dachu wieży:

gdzie $r_K = {}^1/_2 h_3 = 0,25m$

$V_K = {}^4/_3 \cdot \pi \cdot r^3 = {}^4/_3 \cdot \pi \cdot ({}^1/_2 h_3)^3 = {}^4/_3 \cdot 3,14 \cdot (0,25m)^3 = 0,0654166667m^3$

Obliczamy pole powierzchni kuli na dachu wieży:

$P_K = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot ({}^1/_2 h_3)^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot (0,25m)^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 0,0625m^2 = 0,785m^2$

Obliczamy całkowitą objętość wieży, to jest sumę objętości walca, stożka i kuli:

$V_C = V_W + V_S + V_K = 2635,23098304m^3 + 175,214826m^3 + 0,0654166667m^3 =$

$= 2810,5112257067m^3$

Obliczamy całkowite pole powierzchni bocznej wieży jako sumę pól powierzchni bocznych walca i stożka oraz pole powierzchni kuli:

$P_C = Pb_w + Pb_S + Pb_K = 705,550464m^2 + 188,81919m^2 + 0,785m^2 = 895,154654m^2$

b) gdybyśmy chcieli pomalować całą wieżę na zewnątrz, to ile potrzeba litów farby jeżeli 1l farby wystarczy na pomalowanie $10m^2$ powierzchni.

Pole powierzchni bocznych wieży wyliczyliśmy powyżej następująco:

$P_C = Pb_w + Pb_S + Pb_K = 705,550464m^2 + 188,81919m^2 + 0,785m^2 = 895,154654m^2$

Skoro 1l farby wystarczy na pomalowanie $10m^2$ to ile litrów potrzeba na $895,154654m^2$ powierzchni ? układamy poniższą proporcję i wyliczamy:

1l - 10 m²

? - 895,145m²

$$1l \bullet 895{,}154654m^2 = 10m^2 \bullet ? \ / \ 10m^2$$

$$\frac{1l \bullet 895{,}154654m^2}{10m^2} = \frac{\cancel{10m^2} \bullet ?}{\cancel{10m^2}}$$

$$89{,}5154654l = ?$$

Odpowiedź: Na 895,154654m² powierzchni bocznej wieży potrzeba 89,5154654 l farby do jej pomalowania.

c) Ile cegieł potrzeba na wykonanie muru w przedstawionej na rysunku wieży, jeżeli w jednej warstwie oznaczonej literą d ułożone jest 1800 cegieł. Pomiędzy cegłami jest fuga murarska o wysokości 0,015m jak pokazano na powyższym rysunku. Wysokość cegły z fugą jest równa 0,08m.

Liczymy ile warstw cegieł jest w murze, dzieląc wysokość muru przez wysokość jednej cegły łącznie z fugą.

Ilość warstw = h_1 / d = 15,04m / 0,08m = 188

Łączna ilość cegieł w murze to iloczyn liczby warstw i ilości cegieł w warstwie.

Łączna ilość cegieł = 188 • 1800 = 338400 sztuk

Odpowiedź: Łączna ilość cegieł w murze wynosi 338400 sztuk

d) Ile potrzeba zaprawy murarskiej do połączenia cegieł w murze.

W podpunkcie a) policzyliśmy jaka jest objętość całego walca w podstawie wieży i wyszedł nam poniższy wynik:

$V_w = Pp \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi r_1^2 h_1 = 3{,}14 \cdot (7{,}47m)^2 \cdot 15{,}04m = 2635{,}23098304m^3$

Teraz obliczamy objętość walca, która stanowi przestrzeń we wnętrzu wieży:

$V_{ww} = Pp \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi r^2 h_1 = 3{,}14 \cdot (6m)^2 \cdot 15{,}04m = 1700{,}1216m^3$

Następnie liczymy jaka jest objętość samego muru odejmując od objętości całej walca objętość walca stanowiącego przestrzeń we wnętrzu wieży:

$V_{MURU} = V_w - V_{ww} = 2635{,}23098304m^3 - 1700{,}1216m^3 = 935{,}10938304m^3$

Wyliczamy objętość jaką w murze stanowią cegły, to jest iloczyn ilości cegieł i objętości jednej cegły, zaczynając od wyliczenia objętości jednej cegły:

Objętość jednej cegły $= 0{,}065m \cdot 0{,}25m \cdot 0{,}12m = 0{,}00195m^3$

Objętość cegieł w murze wieży $= V_{CEGIEŁ} = 338400 \cdot 0{,}00195m^3 = 659{,}88m^3$

Obliczamy objętość zaprawy murarskiej do połączenia cegieł w murze jako różnicę pomiędzy objętością muru, a objętością wszystkich cegieł użytych do wykonania tego muru.

Objętość zaprawy murarskiej $= V_{MURU} - V_{CEGIEŁ} = 935{,}10938304m^3 - 659{,}88m^3 = 275{,}22938304m^3$

Odpowiedź: Trzeba zużyć $275{,}22938304m^3$ zaprawy murarskiej do połączenia cegieł w murze wieży.

6. Zakończenie

Poznawanie figur obrotowych, jak i część matematyki , którą jest geometria okazała się być dla nas bardzo interesująca. Nasza praca dostarczyła nam wielu emocji i zaskoczeń. Odbywając tą matematyczną podróż, mogłyśmy poczuć jakbyśmy były bohaterkami pasjonującej przygody. Odkryłyśmy jak matematyka otacza nas w codziennym życiu. Najprzyjemniejszym zadaniem było dla nas odkrywanie figur obrotowych w architekturze naszego miasta Krakowa. Efektami tych odkryć podzieliłyśmy się w relacji fotograficznej zamieszczonej w pracy.

W pierwszym etapie praca wymagała od nas zgłębienia literatury w celu poznania i zrozumienia geometrii brył obrotowych. Zaczynałyśmy od prostych, ale ważnych elementów figur geometrycznych takich jak: promień, obwód, pole powierzchni, itd. Niezwykle ciekawym doświadczeniem było poznanie właściwości liczby π, a przeprowadzone przez nas doświadczenie polegające na wyliczeniu jej wartości było bardzo pouczające.

Ważne przy pracy z figurami obrotowymi okazały się również równania i wzory, ponieważ odgrywają kluczową rolę w zrozumieniu ich właściwości. Mogłyśmy się o tym przekonać na podstawie wykonanych obliczeń do zadań umieszczonych w pracy. Przekonałyśmy się, że z wiedzą matematyczną o figurach obrotowych, budynki w architekturze Krakowa, które je przedstawiają nie są już dla nas tak bardzo tajemnicze i wiele ich elementów moglibyśmy policzyć znając ich podstawowe wymiary.

Wreszcie przekonałyśmy się, że geometria to niezwykle ciekawa część matematyki co mamy nadzieję udało nam się potwierdzić powyższą pracą.

7.Bibliografia

1. Kowal Stanisław, (Warszawa, 1970) „Przez rozrywkę do wiedzy”, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne
2. Navarro Joaquin przełożył Wiktor Bartol, (Toruń, 2012) „Tajemnice liczby π”, RBA
3. Głuch Wojciech (red.), (Wrocław, 2003) „Słownik matematyczny”, EUROPA
4. Daniel, Jędrychowski, Rucińska (red.), (Warszawa 2001) „Matematyka 2001”, WSiP
5. Szwedler Irena (red.), (Warszawa, 1972), „Mały słownik matematyczny”, Wiedza Powszechna
6. Rucińska, Olszewska, Kowalik, Wolińska, Zamek-Gliszczyński (red.), (Warszawa, 2007) „Matematyka 2001”, WSiP

Strony internetowe:

- http://www.matematyka.wroc.pl
- https://www.matemaks.pl
- https://www.obliczeniowo.com.pl
- https://www.wikipedia.org
- https://fajnepodroze.pl