OD INWERSJI DO PORYZMU STEINERA

Klaudia Stańczyk

Uczennica XX Liceum Ogólnokształcącego w Krakowie

PORYZM STEINERA

Poryzm Steinera, znany również jako Twierdzenie Steinera, to fascynujące matematyczne zagadnienie, które od dawna przyciąga uwagę badaczy i entuzjastów matematyki. To eleganckie twierdzenie zapewnia zestawienie okręgów, które przechodzą przez te same punkty, co dane określone okręgi.

Motywacja do napisania tego artykułu wynika z mojego głębokiego zainteresowania matematyką oraz pragnienia zgłębienia tajemnic niezwykłych zagadnień. Poryzm Steinera stanowi nie tylko interesujące wyzwanie matematyczne, ale również otwiera drzwi do wielu kreatywnych zastosowań, zarówno w czystej matematyce, jak i praktycznych dziedzinach, takich jak geometria obliczeniowa, grafika komputerowa czy inżynieria.

W dalszej części skupię się na analizie poryzmu Steinera, jego historii oraz działania. Prześledzę także, jak to twierdzenie wpłynęło na rozwój geometrii, jakie inspiracje niesie dla przyszłych pokoleń matematyków, oraz przytoczę pojęcie inwersji. Zapraszam do zgłębienia tej fascynującej gałęzi matematyki, która wciąż wzbudza zdumienie i zachwyt swoją głębią.

Zastosowanie

Poryzm, choć pierwotnie wywodzi się z dziedziny matematyki geometrycznej, znalazło swoje zastosowanie również w innych obszarach, oto jak to twierdzenie wpłynęło na różne dziedziny:

Geometria Obliczeniowa

W geometrii obliczeniowej, gdzie badamy algorytmy i metody rozwiązujące problemy geometryczne za pomocą komputerów, może być używany poryzm Steinera. Twierdzenie to dostarcza informacji o warunkach, w których dany zestaw okręgów może być opisany jako zbiór okręgów przechodzących przez te same punkty. Jest to istotne w kontekście optymalizacji układów okręgów lub w analizie przestrzennej geometrii.

Grafika Komputerowa

W grafice komputerowej, w której tworzymy i renderujemy obrazy za pomocą komputera, poryzm Steiner'a może być wykorzystany do generowania i manipulacji obiektami geometrycznymi, które składają się z okręgów lub ich fragmentów. Może być również używany do optymalizacji układu okręgów w celu stworzenia estetycznych i efektywnych wzorców, na przykład w tworzeniu tekstur czy wzorów dekoracyjnych.

Inżynieria

W inżynierii, gdzie matematyka odgrywa kluczową rolę w analizie i projektowaniu struktur oraz systemów, poryzm Steinera może być stosowany do projektowania układów okręgów w różnych kontekstach, takich jak projektowanie drogi kołowej dla maszyn, analiza ruchu obiektów czy projektowanie maszyn czy konstrukcji z wykorzystaniem kół lub ich elementów. Pozwala to inżynierom analizować i optymalizować układy okręgów w celu uzyskania pożądanych właściwości, takich jak stabilność, wydajność czy estetyka.

W każdej z tych dziedzin, poryzm Steinera stanowi cenny narzędzie analityczne oraz kreatywne źródło inspiracji do dalszych badań i zastosowań w praktyce. Jego zastosowanie pokazuje, jak matematyka może mieć praktyczne zastosowanie i przyczyniać się do rozwoju nowych technologii oraz rozwiązań inżynierskich.

INWERSJA

Aby mówić o poryźmie Steinera musimy najpierw poznać definicję i własności przekształcenia zwanego ***inwersją w kole***.

Definicja

Obieramy na płaszczyźnie stały okrąg ***o(S,r)***

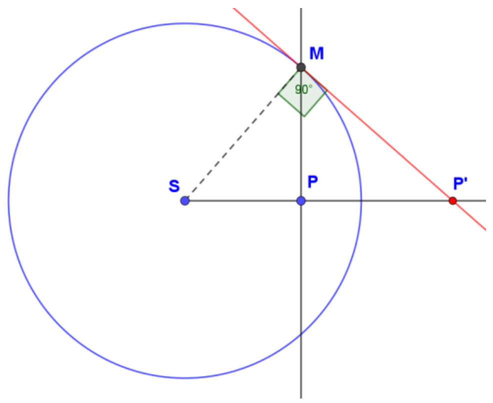
Obrazem punktu ***P*** różnego od punktu ***S*** jest taki punkt ***P'***, że:

$$|SP'| \cdot |SP| = r^2$$

Istnieje konstrukcja geometryczna która pozwala utworzyć dla danego punktu ***P*** leżącego we wnętrzu koła inwersyjnego jego obraz w inwersji. Oto jej opis.

- Kreślimy półprostą ***SP***.
- W punkcie ***P*** wystawiamy prostopadłą do tej półprostej.
- Przecina ona okrąg w dwóch punktach – niech jeden z nich nazywa się ***M***.
- W punkcie ***M*** wystawiamy styczną do okręgu.
- Przecina ona półprostą wystawiona ze środka okręgu w puncie ***P'***.
- Punkt ***P'*** jest obrazem punktu ***P*** w inwersji względem koła o środku ***S*** i promieniu **r**.

Rysunek 1 jest zrzutem pliku GeoGebry konstrukcji obrazu ***P'*** punktu ***P*** w inwersji względem okręgu o środku S.



rys. 1

Gdy punkt ***P*** znajduje się na zewnątrz koła inwersyjnego konstrukcja jego obrazu w tej inwersji przebiega w przeciwnym kierunku niż opisana powyżej konstrukcja.

Należy jeszcze udowodnić, że konstrukcja ta spełnia warunki definicji inwersji. Oto dowód poprawności tej konstrukcji:

- Wprowadźmy kąt α między półprostą ***SP*** i promieniem ***OM***.
- Trójkąt ***APM*** i ***AMP'*** są podobne, bo maja te same kąty.
- Zatem otrzymujemy proporcję:

$$\frac{|AP|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|AP'|}$$

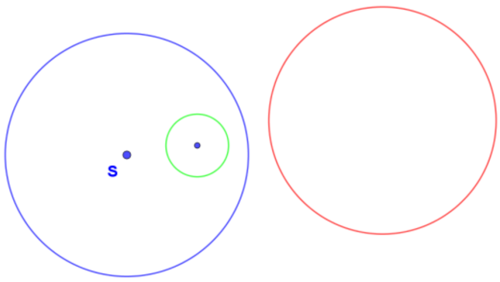
Czyli inaczej: $\frac{|AP|}{r}| = \frac{r}{|AP'|}$

Co dowodzi, że |***AP***| |***AP'***| = r^2

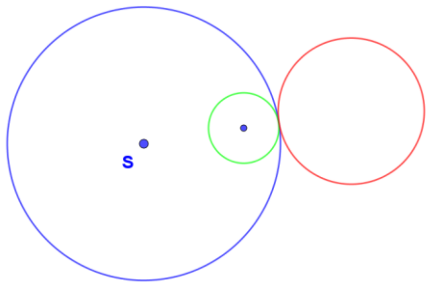
WŁASNOŚCI INWERSJI

Inwersja ma kilka bardzo ciekawych własności, odbiegających od własności innych przekształceń geometrycznych:

- Obrazem okręgu znajdującego się wewnątrz koła inwersyjnego jest okrąg znajdujący się na zewnątrz tego koła i na odwrót – rys. 2.
- Obrazem okręgu stycznego do koła inwersyjnego jest okrąg również styczny do tego koła – rys. 3.

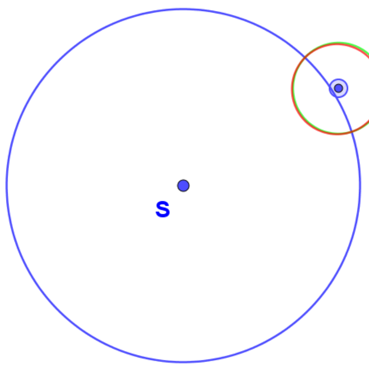


rys. 2

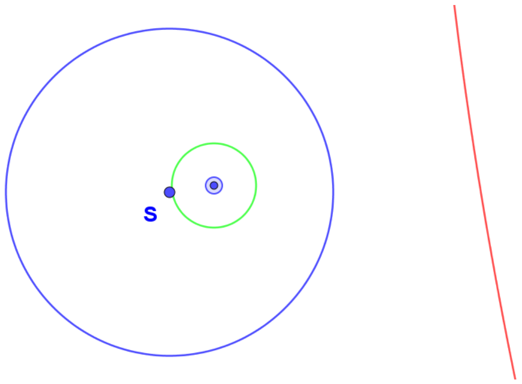


rys. 3

- Obrazem okręgu który przecina okrąg inwersyjny pod kątem prostym jest ten sam okrąg – okręg ten i inwersyjny nazywamy wówczas ortogonalnymi – rys. 4
- Obrazem okręgu który przechodzi przez środek okręgu inwersyjnego jest prosta – rys. 5.



rys. 4

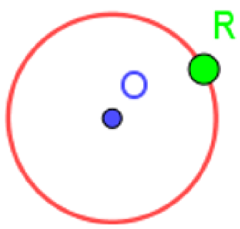


rys. 5

Konstrukcja poryzmu Steinera w płaszczyźnie

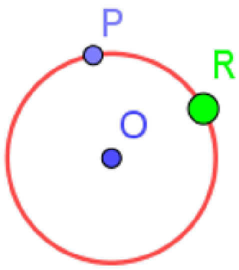
Oto kolejne kroki konstrukcji poryzmu Steinera:

1.Kreślimy okrąg o środku ***O*** i promieniu ***r***.



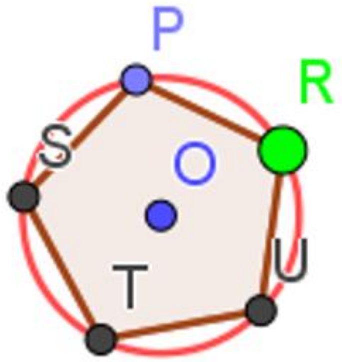
rys. 6

2. Na okręgu obieramy punkt ***P***.



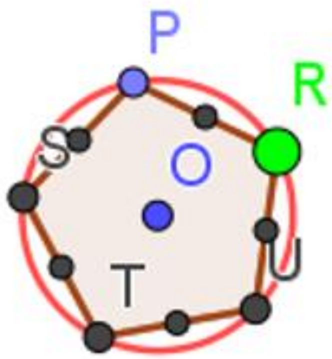
rys. 7

3. Obracamy pięciokrotnie punkt ***R*** o 72° - w tym przypadku powstanie 5 wierzchołków pięciokąta foremnego.



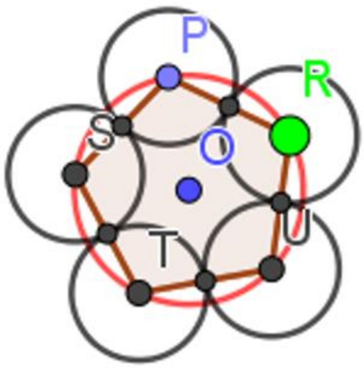
rys. 8

4. Wyznaczmy środki boków, przez które będą przechodzić okręgi.



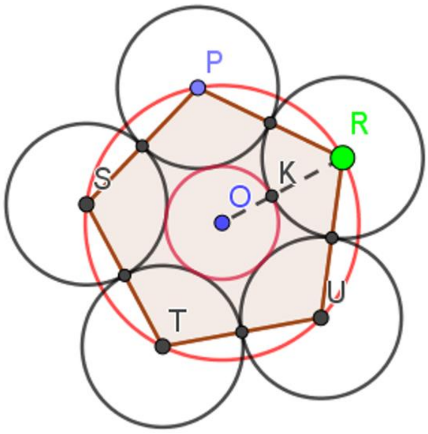
rys. 9

5. Kreślimy okręgi o środkach w wierzchołkach pięciokąta foremnego przechodzące przez środki jego boków.



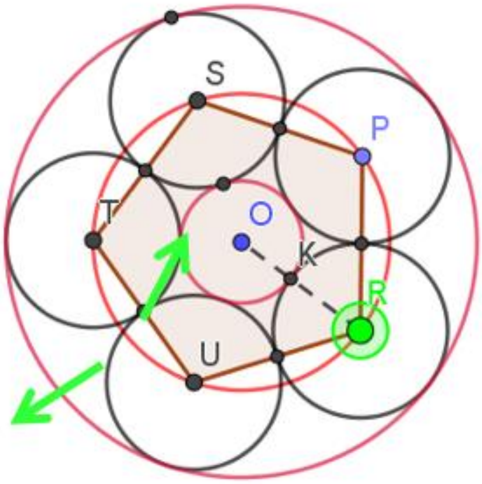
rys. 10

6. Niech punkt ***K*** będzie przecięciem jednego z okręgów z odcinkiem ***OR***. Kreślimy czerwony okrąg środku ***O***, przechodzący przez ten punkt ***K***.



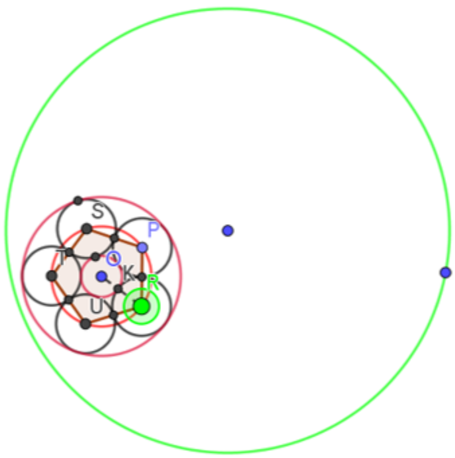
rys. 11

7. Poruszając punktem ***P***, poruszamy wszystkimi okręgami w dużym kole.



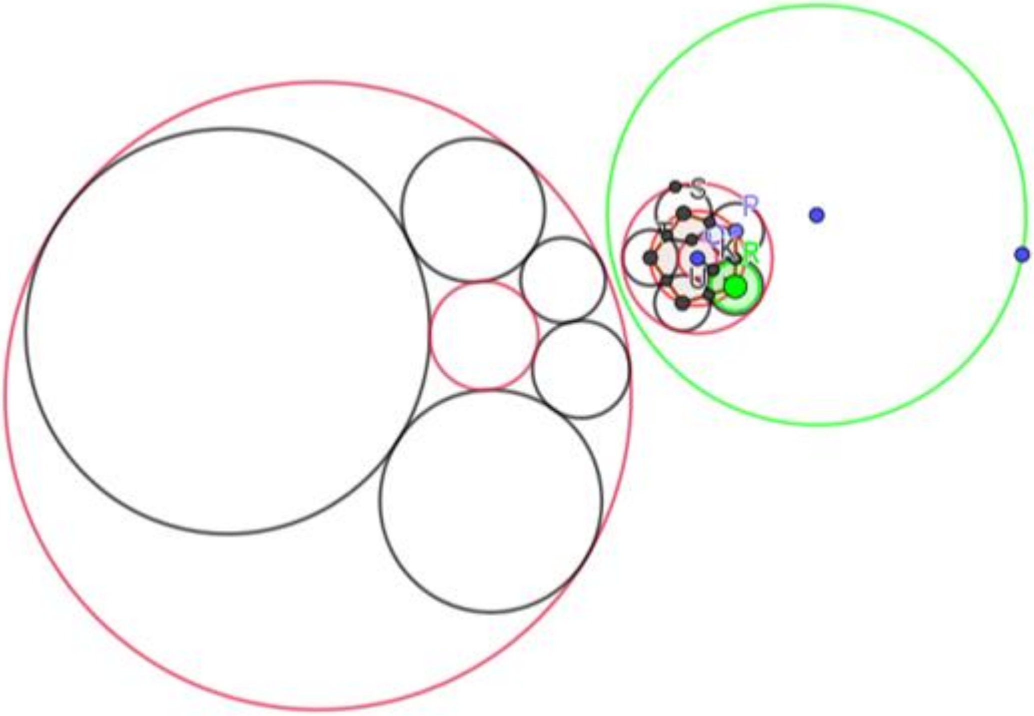
rys. 12

8. Kreślimy duży okrąg obejmujący wszystkie okręgi – będzie to okrąg inwersyjny.



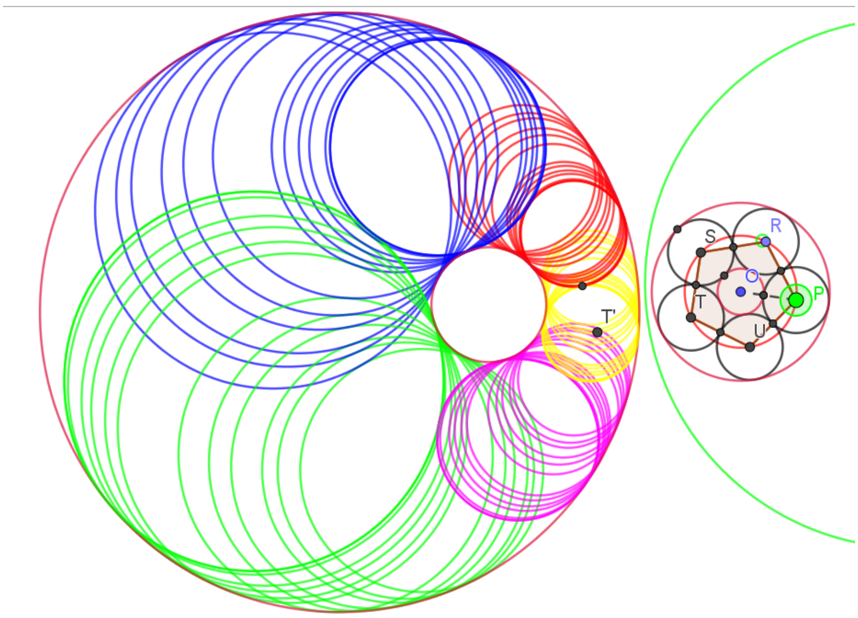
rys. 13

8. Odbijamy wszystkie okręgi w inwersji względem tego koła.



rys. 14

Otrzymaliśmy twór geometryczny, który nosi nazwę poryzmu Steinera. Jest on zdecydowanie dynamiczny. Ruch całego poryzmu generuje ruch punktu ***P***. Jeśli zaznaczymy różnymi kolorami okręgi przekształcane w poryzm, to uaktywniając je opcją ślad możemy tę dynamikę wykreślić na ekranie. Rysunek ilustruje to.



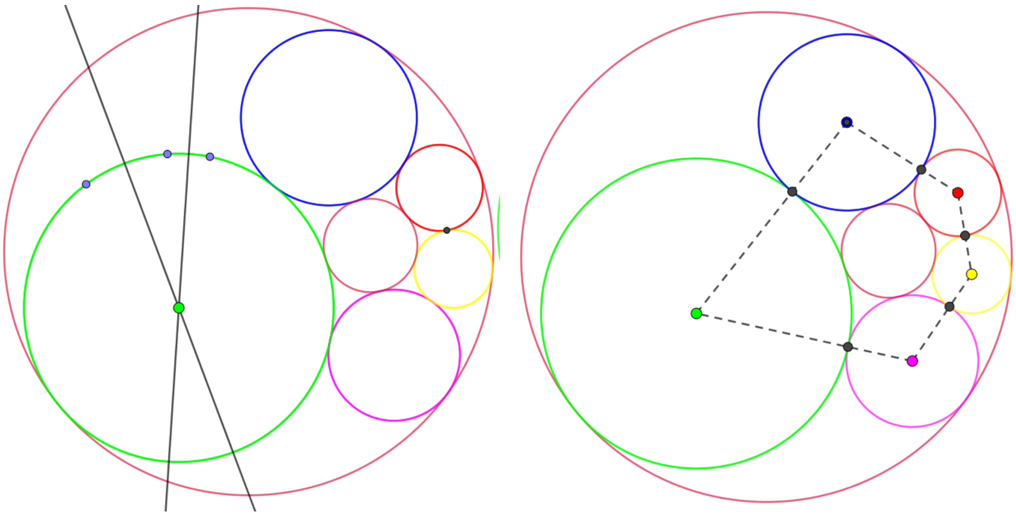
rys. 15

HEXLET SODDY'EGO

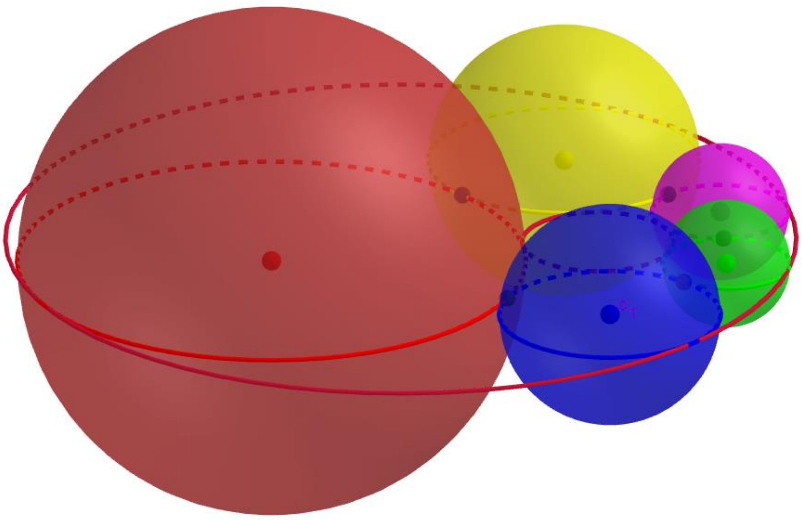
Jeśli 5 okręgów poryzmu Steinera potraktujemy jako przekroje kuli, to możemy te kule skonstruować. Otrzymamy wówczas poryzm trójwymiarowy Steinera. Po raz pierwszy konsrukcję tę wykonał ***Frederic Sodda*** w 1937 r. i od tego czasu trójwymiarowy analogon poryzmu 2D Steinera nazwano ***hexletem Soddy'ego***.

Najpierw musimy jednak znać środki tych kul, oraz przecięcia okręgów by wyznaczyć punkt, przez który kule przechodzą. W tym celu wykorzystamy narzędzia GeoGebry 2D: „okrąg przez 3 punkty" i wykreślimy symetralne dwóch ich par – rys. 16, oraz utworzymy odcinki łączące środki okręgów – rys. 17.

Następnie włączamy GeoGebrę 3D i konstruujemy te kule (sfery Steinera) – rys. 18.



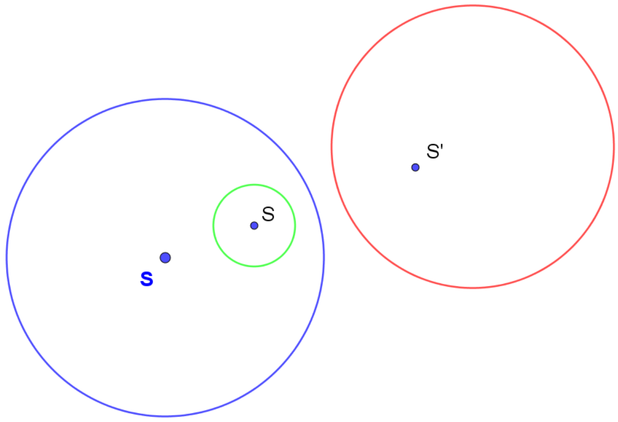
rys. 16 i 17



rys. 18

Dlaczego nie mogliśmy skonstruować środków okręgów poryzmu 2D Steinera, przekształcając środki pięciu okręgów w pięciokącie foremnym?

Warto zauważyć, co ilustruje rysunek 19, że obrazem środka okręgu w inwersji nie jest środek obrazu tego okręgu w inwersji. Czyli punkt ***S*** w inwersji na rys. 19 nie przeszedł w tej inwersji w środek okręgu przekształconego (czerwonego) lecz w zupełnie inny punkt ***S'***.



rys. 19

Wydaje mi się, że nie jest to zbyt popularna własność okręgów i ich obrazów w inwersji.

I na koniec krótka informacja o autorze poryzmu.

Jakob Steiner (1796 –1863) był szwajcarskim matematykiem, który włożył duży wkład w rozwój geometrii XIX wieku.
To on udowodnił po raz pierwszy, że każdą konstrukcję można wykonać bez użycia cyrkla tylko linijki, kreśląc pomocniczo np. od talerza pewien okrąg.
Ciekawostką jest że Steiner całkowicie wykluczał w swych działaniach analizę, której nienawidził, a nawet uważał ją za hańbę geometrii syntetycznej, jeśli metodami geometrii analitycznej uzyskiwano równe lub wyższe wyniki. Uznany jest za „najczystszego geometrę” od czasów Apolloniusza z Pergii.