

Szkoła Podstawowa Zakonu Pijarów  
im. ks. St. Konarskiego  
ul. Dzielskiego 1  
31 – 465 Kraków

# **Szacowanie pierwiastków za pomocą algorytmu i programu komputerowego**

Karol Anioł

klasa 7a

Kraków 2024

## Spis treści

.....	2
Wstęp.....	3
Co to jest pierwiastek?.....	3
Historia.....	3
Zasady działań na pierwiastkach.....	4
Zastosowania pierwiastka matematycznego.....	5
Sposób obliczania pierwiastka.....	6
Interfejs programu użytkownika.....	7
Opis funkcji.....	10

# Wstęp

Pomysł na pracę narodził się kiedy mój kolega zaczął obliczać pierwiastek z liczby 8. Obliczenia te były czasochłonne. Wtedy sam postanowiłem spróbować obliczyć ten pierwiastek. Po czasie liczenia miałem już wiele liczb po przecinku i... pomysł by proces ten usprawnić. Dlatego postanowiłem napisać program komputerowy, który obliczy dla mnie dany pierwiastek.

## Co to jest pierwiastek?

Pierwiastkiem z liczby  $a$  stopnia  $n$  nazywa się taką liczbę  $b$ , która podniesiona do  $n$ -tej potęgi jest równa  $a$ ; innymi słowy jest to dowolna liczba  $b$  spełniająca równość  $b^n = a$

Stopień pierwiastka

Symbol pierwiastka

$${}^n\sqrt{a} = b$$

Liczba podpierwiastkowa

W uproszony sposób można pierwiastek zdefiniować jako operację odwrotną do potęgowania.

Przykład:

Dla liczby 25, **pierwiastek kwadratowy** z tej liczby to 5, ponieważ  $5^2 = 25$ .

**Pierwiastek trzeciego** stopnia z 8 to 2, ponieważ  $2 * 2 * 2 = 8$ .

## Historia

Pierwiastki matematyczne mają długą historię, sięgającą starożytności. Pierwsze zapisy dotyczące pierwiastków matematycznych pochodzą z czasów starożytnych Egipcjan i Babilończyków. Jednak to starożytni Grecy, tacy jak Pitagoras i Euklides, przyczynili się do rozwoju tej dziedziny wiedzy.

Pitagoras, który żył w VI wieku p.n.e., uważany jest za jednego z pierwszych matematyków, którzy zainteresowali się pierwiastkami. On i jego szkoła zajmowali się badaniem relacji między długościami boków trójkątów, co doprowadziło do odkrycia liczby nazywanej pierwiastkiem kwadratowym. Euklides w IV wieku p.n.e., opisał w swoim dziele "Elementy" podstawowe zasady i definicje dotyczące pierwiastków matematycznych.

W okresie średniowiecza matematycy arabscy odegrali ważną rolę w rozpowszechnianiu wiedzy na temat pierwiastków matematycznych. Jednym z najważniejszych matematyków tego czasu był Al-Khwarizmi, który żył w IX wieku. Inny znaczący matematyk średniowieczny to

Włoch Leonardo Fibonacci, który żył na przełomie XII i XIII wieku. Jego książka "Liber Abaci" zawierała wiele przykładów i zadań związanych z pierwiastkami matematycznymi. Fibonacci propagował również użycie liczb hinduskich, w tym systemu dziesiętnego, który umożliwił wygodne obliczanie pierwiastków matematycznych.

W okresie nowożytnym wiele znaczących postaci w dziedzinie matematyki przyczyniło się do dalszego rozwoju wiedzy na temat pierwiastkowania. Jednym z najważniejszych matematyków tego okresu był René Descartes, żyjący w XVII wieku. W swoim dziele "Geometryczne rozważania dotyczące miejsca płaszczyzn" Descartes przedstawił nowatorskie podejście do geometrii analitycznej, które umożliwiło badanie pierwiastków matematycznych na poziomie algebraicznym.

W XIX wieku, Évariste Galois zrewolucjonizował dziedzinę algebry, a tym samym przyczynił się do dalszych odkryć w dziedzinie pierwiastkowania. Jego prace nad teorią grup i równaniami algebraicznymi miały duże znaczenie dla rozwoju pierwiastków.

## Zasady działań na pierwiastkach

Poniżej przedstawię różne zasady działań na pierwiastkach, o których należy pamiętać, lub które po prostu ułatwią życie podczas rozwiązywania różnych zadań:

1. Jeżeli w zadaniu zobaczymy  $\sqrt{9^2}$  co oznacza pierwiastek z 9 do potęgi 2 możemy pominąć potęgę i pierwiastek przepisując liczbę. Dzieje się tak dlatego, że pierwiastek z dziewiątki to 3, a 3 do potęgi 2 to 9. Lecz kiedy zobaczymy działanie  $\sqrt{9^3}$  nie będziemy mogli zaprezentować powyższego schematu, ponieważ aby go zastosować wartość potęgi musi być taka sama jak stopień pierwiastka.
2. **Mnożenie pierwiastków.** Jeśli zobaczymy takie działanie  $\sqrt{9 * 9}$  oznacza to  $\sqrt{9} * \sqrt{9}$  co upraszcza rozwiązanie działania, ponieważ po wykonaniu pierwiastkowania otrzymujemy  $3 * 3$  czyli 9. Należy też pamiętać, że tą zasadę możemy również zastosować dla dzielenia.
3. **Włączanie liczby pod pierwiastek.** Jeśli mamy liczbę  $4 \sqrt{3}$  czyli cztery pierwiastki z 3. Możemy włączyć liczbę 4 pod znak pierwiastka. Pierwszym krokiem jest podniesienie 4 do potęgi 2 (potęga uzależniona jest od stopnia pierwiastka (3 stopień pierwiastka to 4 do sześcianu), a następnie dodajemy znak mnożenia i wstawiamy 4 do sześcianu pod znak pierwiastka otrzymujemy  $\sqrt{3*16}$ . Co można ostatecznie zapisać w postaci  $\sqrt{48}$ .
4. **Wyłączenie liczby przed pierwiastek.** Skoro włączyliśmy liczbę pod pierwiastek, to również można go wyłączyć. Np.: dla  $\sqrt{140}$ . Zaczynamy poprzez rozłożenie 140 na czynniki pierwsze i odnalezienie par tych samych dzielników.

$$140|2$$

$$70|2$$

$$35|5$$

$$7|7$$

$$1$$

Bierzemy po jednej liczbie z pary i umieszczamy przed znak pierwiastka mnożąc te liczby  $2\sqrt{\phantom{x}}$ , a liczby bez pary pod znak pierwiastka (pomijamy 1)  $2\sqrt{5*7}$ . Ostateczny wynik to  $2\sqrt{35}$

5. **Szacowanie pierwiastka.** Działanie to rozpoczynamy od znalezienia liczby mniejszej z której możemy obliczyć pierwiastek będący liczbą całkowitą. Dla liczby 33 mniejszą liczbą z której możemy obliczyć pierwiastek będzie 25, a pierwiastek z 25 to 5; teraz szukamy liczby większej od 33 z której możemy obliczyć pierwiastek, w tym przypadku będzie to 36, a pierwiastek z tej liczby to 6. Czyli teraz wiemy że pierwiastek z 33 to liczba większa od 5 i mniejsza od 6. Dla większych liczb przy szacowaniu wykorzystujemy rozszerzenie.

## Zastosowania pierwiastka matematycznego

Pierwiastki matematyczne znajdują szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i technologii. Oto kilka przykładów:

1. **Inżynieria:** Pierwiastki matematyczne są niezwykle ważne w dziedzinie inżynierii. Wykorzystuje się je do rozwiązywania równań różniczkowych, modelowania układów dynamicznych oraz analizy i projektowania struktur;
  - a. Wyliczenie boku kwadratowego pokoju dla żądanej przez klienta powierzchni,
  - b. Wyliczenie boku sześcianu dla oczekiwanej objętości elementu.
2. **Fizyka:** W fizyce pierwiastki matematyczne są nieodłączną częścią wielu teorii i równań fizycznych. Wykorzystuje się je między innymi do opisu ruchu ciał, dynamiki płynów, propagacji fal;
  - a. Podczas analizowania ruchu ciała, równania kwadratowe mogą być używane do określenia czasu, jaki upłynie, zanim ciało spadnie na ziemię.
  - b. Podczas rzutu ukośnego: w fizyce, równania kwadratowe mogą być stosowane do obliczenia zasięgu i czasu lotu ciała podczas rzutu ukośnego.
3. **Ekonomia i finanse:** W ekonomii i finansach pierwiastki matematyczne są stosowane do obliczania stóp zwrotu, wartości bieżącej netto (NPV) i innych wskaźników finansowych. Są również wykorzystywane do modelowania i prognozowania zachowań rynkowych;
  - a. Przy obliczaniu procentów: w przypadku oszczędzania pieniędzy w banku z oprocentowaniem składanym, równania kwadratowe mogą być wykorzystane do prognozowania wzrostu kapitału w przyszłości.
  - b. Podczas analizy ryzyka inwestycji: w finansach, równania kwadratowe mogą być wykorzystane do analizy ryzyka inwestycji i prognozowania możliwych strat lub zysków.
4. **Informatyka:** W dziedzinie informatyki pierwiastki matematyczne są używane w algorytmach numerycznych, obliczeniach naukowych i grafice komputerowej. Są również stosowane w uczeniu maszynowym i sztucznej inteligencji. Podczas szyfrowania wiadomości za pomocą algorytmu RSA, pierwiastki mogą być używane w procesie szyfrowania i deszyfrowania, aby zapewnić bezpieczeństwo transmisji danych.

5. **Medycyna i nauki przyrodnicze:** W medycynie i naukach przyrodniczych pierwiastki matematyczne są stosowane do analizy danych biomedycznych, modelowania procesów biologicznych i rozwiązywania równań różniczkowych opisujących zjawiska w przyrodzie;
- podczas analizy obrazów medycznych: w diagnostyce medycznej, równania kwadratowe mogą być wykorzystane do analizy obrazów medycznych i identyfikacji obszarów z potencjalnymi anomaliami lub chorobami.
  - przy obliczaniu dawki leku: podczas przepisywania dawki leku dla pacjenta, równania kwadratowe mogą być stosowane do określenia optymalnej dawki, uwzględniającej masę pacjenta i inne czynniki istotne dla chorego czynniki.

## Sposób obliczania pierwiastka

Teraz chciałbym opowiedzieć o moim sposobie obliczania pierwiastków. Sposób ten może istnieć już, wynaleziony wcześniej, ale nie czytając opracowań wpadłem na taki pomysł.

Sposób ten można opisać w kilku krokach:

- Należy wybrać liczbę, dla której chcemy obliczyć pierwiastek
- Teraz trzeba oszacować pierwiastek. Czynność ta pomoże nam wyłonić liczbę przed przecinkiem, którą wskazujemy poprzez całkowitą liczbę mniejszą tzn. jeśli obliczamy pierwiastek z liczby 8 to mniejsza liczba z której możemy obliczyć pierwiastek to 4, a wykonując pierwiastkowanie z tej liczby otrzymamy 2 czyli pierwiastek z liczby 8 będzie zaczynał się 2, a pozostałą wartość będzie miał już po przecinku.
- Następnym krokiem jest dopisanie przecinka i liczb od 0 do 9 po wybranej liczbie.
- Teraz podnosimy te liczby do potęgi 2 i wybieramy liczbę, która jest najbliższa naszej przeliczanej liczby, lecz musi być mniejsza. Wybraną liczbę pierwiastkujemy.
- Powtarzamy krok trzeci i czwarty aż otrzymamy liczbę którą chcemy przeliczyć, lub przybliżenie na którym nam zależy np. do 5 miejsc po przecinku.

Teraz chciałbym zaprezentować powyższy sposób w praktyce

Naszą przeliczaną liczbą będzie 8. Pierwiastek z 8 będzie liczbą większą od 2 i mniejszą od 3 czyli pierwszą liczbą pierwiastka będzie 2.

Dodajemy do 2 cyfry po przecinku od 0 do 9.

2,0  
2,1  
2,2  
2,3  
2,4  
2,5  
2,6  
2,7  
2,8  
2,9

Podnosimy je do kwadratu

$$2,0^2 = 4$$

$$2,1^2 = 4,41$$

$$2,2^2=4,84$$

$$2,3^2=5,29$$

$$2,4^2=5,76$$

$$2,5^2=6,25$$

$$2,6^2=6,76$$

$$2,7^2=7,29$$

$$2,8^2=7,84$$

$$2,9^2=8,41$$

Szukamy liczby najbliższej lecz mniejszej od 8 czyli 7,84, ale 7,84 jest liczbą podniesioną do kwadratu więc po wykonaniu pierwiastkowania otrzymujemy 2,8.

Dzięki temu sposobowi można obliczyć przybliżenia pierwiastka lub pierwiastek z takich liczb jak np. 8.

Teraz chciałbym opisać program obliczający pierwiastki, który zrobiłem w programie Scratch. Oto link <https://scratch.mit.edu/projects/969772582/>

## Interfejs programu użytkownika

Zaraz po wejściu na stronę ukaże nam się poniższy widok.



Po kliknięciu na znak pierwiastka program poprosi nas o wpisanie liczby, którą chcemy przeliczyć



Następnie po zatwierdzeniu liczby będziemy musieli wpisać ile liczb po przecinku ma mieć przybliżenie





Po wpisaniu liczby program poda przybliżenie z nadmiarem i niedomiarem z wpisanej liczby. Teraz zaprezentuję mój program dla liczby 8 z przybliżeniem do 4 miejsc po przecinku.

<p>Podaj liczbę naturalną</p>  <input data-bbox="181 658 778 734" type="text" value="8"/>	<p>Ile miejsc po przecinku podać wynik</p>  <input data-bbox="821 658 1418 734" type="text" value="4"/>
<p>Pierwiastek z niedomiarem z liczby 8 to:</p> 	<p>2.8284</p> 
<p>Pierwiastek z nadmiarem z liczby 8 to:</p> 	<p>2.8285</p> 

# Opis funkcji

W pracy użyłem kilku funkcji, które pozwoliły mi dokonać szacunku wyników.

1. „**wyliczanieIlosciZer**”, oraz „**wyliczanieRzęduWielkości**”

Funkcje te służą do określenia jaka jest maksymalna liczba, która podniesiona do potęgi da minimalną liczbę o długości liczby, którą wpisał użytkownik. Wyliczają one od jakiej liczby program rozpocznie szacowanie pierwiastka. Określają jakie są minimalne liczby od których należy rozpocząć szacowanie dla podanej liczby oraz jakimi skokami posługiwać się zwiększając liczbę do oszacowania pierwiastka.

Program może szacować pierwiastek rozpoczynając od cyfry 1 podnosząc ją do potęgi, a następnie porównując wynik z wpisaną przez użytkownika liczbą. Dopóki te liczby nie będą równe program będzie sprawdzał w ten sposób kolejną, coraz większą liczbę. Jednak ten sposób nie jest wydajny co jest widoczne zwłaszcza dla bardzo dużych liczb. Dlatego więc w proponowanym algorytmie do szacowania postanowiłem rozpocząć to szacowanie od liczby, która podniesiona do potęgi da najmniejszą liczbę o długości wpisanej przez użytkownika



## 2. „szacowanieLiczbyPrzedPrzecinkiem”

Jest to funkcja rekurencyjna ponieważ nie wiemy jak dużą liczbę użytkownik wpisze do programu. Funkcja ta pozwala ustalić wartość cyfr przed przecinkiem. Program na początku wykorzystuje najmniejszą liczbę, która zawiera tyle samo znaków co nasza liczba przeliczana, np. dla liczby 2655 szacować zaczynamy od liczby 10.

Jeśli liczba podniesiona do potęgi jest mniejsza niż liczba wpisana przez użytkownika dodajemy wartość liczby wyjściowej do liczby, podnosimy do potęgi i porównujemy z liczbą wpisaną wcześniej. Liczymy tak do momentu aż liczba podniesiona do potęgi będzie większa niż ta wpisana przez użytkownika.

$$10*10=100, 100<2655$$

$$20*20 = 400, 400<2655$$

$$30*30 = 900, 900<2655$$

$$40*40 = 1600, 1600 <2655$$

$$50*50 = 2500, 2500<2655$$

$$60*60 = 3600, 3600>2655$$

Gdy program wyliczy liczbę większą dla naszych dalszych obliczeń bierzemy ostatnią liczbę, mniejszą niż liczba wpisana przez użytkownika. Następnie funkcja rekurencyjna wykonywana jest dla rzędu wielkości mniejszego 10 razy dla systemu dziesiętnego. Program w kolejnej iteracji będzie liczył zwiększając szacowaną liczbę w niższym zakresie, aż w ostatniej iteracji w zakresie jedności.

$$51*51 = 2601, 2601< 2655$$

$$52*52 = 2704, 2704 >2655$$

W momencie znalezienia liczby większej niż liczba wpisana przez użytkownika następuje koniec wykonywania funkcji.

The image shows a Scratch script for a function named 'szacujPrzedPrzecinkiem' that takes 'rzędWielkosci' as an argument. The script is as follows:

```
definiuj szacujPrzedPrzecinkiem rządWielkosci
jeżeli rządWielkosci * rządWielkosci = liczbaWyliczana to
  zatrzymaj ten skrypt
jeżeli rządWielkosci < 1 to
  zatrzymaj ten skrypt
powtarzaj aż pierwiastekMax + rządWielkosci * pierwiastekMax + rządWielkosci > liczbaWyliczana
  zmień pierwiastekMax o rządWielkosci
  jeżeli pierwiastekMax * pierwiastekMax < liczbaWyliczana to
    zmień wynikPrzedPrzecinkiem o rządWielkosci
szacujPrzedPrzecinkiem rządWielkosci / 10
```

### 3. „szacujPoPrzecinku”

Dzięki tej funkcji szacujemy wartość pierwiastka po przecinku. Program dodaje do potencjalnego pierwiastka jedynki w częściach dziesiętnych, setnych lub tysięcznych, co powoduje że można dotrzeć do liczby najbliższej pierwiastkowi z obliczanej liczby. W tym przypadku nie musimy korzystać z funkcji rekurencyjnej, bo program zna jak duże przybliżenie chce użytkownik, a co za tym idzie, ile razy trzeba powtórzyć algorytm.

Przykład kolejnych przybliżeń:

$$51,0 * 51,0 = 2601 \quad 2601 < 2655$$

$$51,1 * 51,1 = 2611,21, \quad 2611,21 < 2655$$

$$51,2 * 51,2 = 2621,44, \quad 2621,44 < 2655$$

$$51,3 * 51,3 = 2631,69, \quad 2631,69 < 2655$$

$$51,4 * 51,4 = 2641,96, \quad 26 < 2655$$

$$51,5 * 51,5 = 2652,25 < 2655$$

$$51,6 * 51,6 = 2662,56 > 2655$$

Po wyszukaniu liczby większej niż liczba wpisana przez użytkownika program do dalszych wyliczeń wykorzystuje ostatnią liczbę mniejszą niż liczba przeliczana.

W kolejnym kroku program wylicza wartość pierwiastka w częściach setnych:

$$51,51 * 51,51 = 2653,28, \quad 2653,28 < 2655$$

$$51,52 * 51,52 = 2654,31, \quad 2654,31 < 2655$$

$$51,53 * 51,53 = 2655,34, \quad 2655,34 > 2655$$

Czyli 2654,31 to wynik pierwiastka z 2655 z niedomiarem, a 2655,34 to wynik z nadmiarem.

