# Od problemu Monty'ego Halla przez zasadę szufladkową i paradoks hazardzisty do prawdopodobieństwa

**Kopiasz Patrycja kl.VIIIb**
**Łagosz Agata kl. VIIIa**
**Ochmańska Anastazja VIIIb**

**Zespół Szkolno – Przedszkolny w Brzezince**
**Opiekun: mgr Barbara Stańczyk**

## Spis treści

1. Wstęp …………………………………..……………….…… 3

2. Prawdopodobieństwo……………………………………... 4

3. Elementy kombinatoryki ……………………….……… 7

4. Paradoks hazardzisty ………………………..………..….. 13

5.Zasada szufladkowa Dirichleta …………….……..…... 14

6. Problem Monty’ego Halla ………………………....…. 18

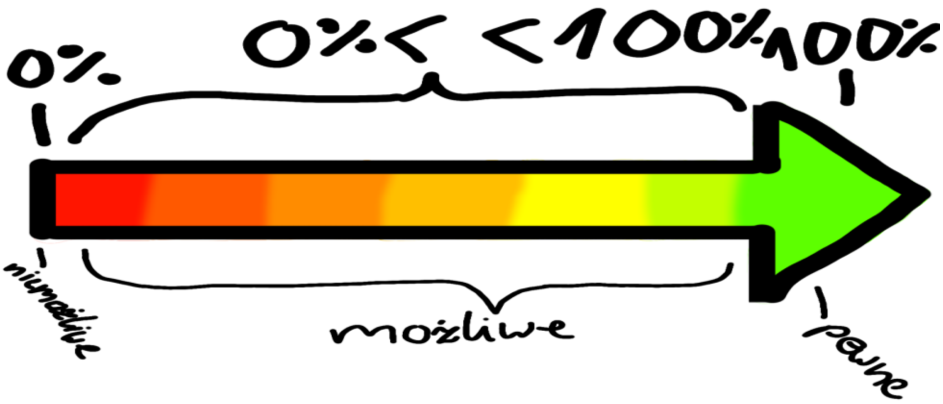
7. Literatura ……………………………………..………  20

# Wstęp

Nasze zainteresowanie prawdopodobieństwem zaczęło się od problemu Mounty'ego Halla, o którym przeczytałyśmy podczas szukania tematu. Chcąc poszerzyć swoją wiedzę natrafiłyśmy na kombinatorykę, zasadę szufladkową Dirichleta oraz paradoks hazardzisty. Starałyśmy się napisać naszą pracę tak, by była zrozumiała dla naszych rówieśników, stąd tyle obrazowych porównań. Wszystkie zadania użyte w tej pracy opracowałyśmy samodzielnie, a także znaczna część przykładów i rysunków została przygotowana przez nas. Zajmowanie się tym tematem sprawiło nam wiele przyjemności.
Życzymy miłej lektury.

# Prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwo to rodzina miar służących do opisu pewności lub częstości danego zdarzenia. Jeżeli prawdopodobieństwo wynosi 1 (100%), oznacza to, że dana sytuacja wystąpi na pewno. Zdarzenie losowe o prawdopodobieństwie 0 (0%), niezależnie od ilości podjętych prób, nie będzie miało miejsca. Prawdopodobieństwo większe od 0, a jednocześnie mniejsze niż 1 oznacza sytuację możliwą. Prawdopodobieństwo zdarzenia zapisuje się za pomocą ułamków lub procentów.




Rachunek prawdopodobieństwa pomaga obliczyć **szansę** zaistnienia pewnego określonego zdarzenia.

Istnieje wiele różnych interpretacji prawdopodobieństwa między innymi subiektywna (jako pewność w oparciu o dotychczasową wiedzę) i obiektywna (jako częstość zdarzenia, w oparciu o dużą liczbę prób).

Prawdopodobieństwo obliczamy ze wzoru

$$P(A)=|A|:|\Omega|$$

$|\Omega|$ liczba wszystkich możliwych zdarzeń,
$|A|$ liczba zdarzeń sprzyjających,
$P(A)$ prawdopodobieństwo wystąpienia danego zdarzenia.

Dowodzi tego przykład pana Jana[1], który po pewnym czasie obudził się ze śpiączki w szpitalu. Chciał się dowiedzieć jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na obecny miesiąc wypadają jego urodziny. Jako że jego urodziny przypadają w marcu, który jest jednym z 12 miesięcy w roku, znaczy to, że prawdopodobieństwo jest równe 1:12 (8,(3)%) .

[1] Imię to zostało użyte na potrzeby zobrazowania opisywanych przez nas problemów, nie miało na celu obrażenia nikogo o takim imieniu

# Wnioski z przekształcenia wzoru

Na prawdopodobieństwo można spojrzeć też z innej strony. Dzięki zdobytej wcześniej wiedzy możemy ustalić nie tylko jakie jest prawdopodobieństwo wystąpienia danego zdarzenia, ale możemy także obliczyć, ile jest możliwych zdarzeń lub ile jest możliwych zdarzeń sprzyjających. Dokonać tego możemy poprzez przekształcanie wzoru na prawdopodobieństwo:

$P(A)=|A|:|\Omega| \quad | *|\Omega|$
$P(A)*|\Omega|=|A| \quad | :P(A)$
$|\Omega|=|A|:P(A)$

Podsumowując:
$|A|= P(A)*|\Omega|$
$|\Omega|=|A|:P(A)$

**Przykład:**

Losujemy cukierki z paczki,
a część z nich jest o smaku malinowym.

Prawdopodobieństwo wylosowania cukierka o smaku malinowym ma być równe 1/10 (10%).

a) Znając prawdopodobieństwo i liczbę wszystkich cukierków możemy obliczyć ilość cukierków malinowych.
Jeżeli cukierków w paczce będzie 10, to będzie jeden cukierek malinowy, jeżeli wszystkich cukierków będzie 20, to wśród nich będą 2 cukierki malinowe, a w przypadku, w którym cukierków w paczce będzie 100, to będzie 10 cukierków malinowych i tak dalej.

b) Znając prawdopodobieństwo i liczbę cukierków malinowych możemy obliczyć liczbę wszystkich cukierków.
Jeżeli malinowych cukierków mamy 3, to wszystkich będzie 30, jeśli mamy 5 cukierków malinowych, to wszystkich musi być 50, a w przypadku, w którym mamy 200 cukierków malinowych, wszystkich musi być 2000.

# Prawdopodobieństwo zdarzeń powtarzających się

Aby obliczyć prawdopodobieństwo wypadnięcia parzystej liczby oczek na kostce sześciennej x razy pod rząd, należy skorzystać z następującego wzoru:

$P(C)=P_1^X$,

gdzie P(C) oznacza prawdopodobieństwo całkowite, $P_1$ prawdopodobieństwo tego zdarzenia jednokrotnie, x ilość razy pod rząd.

Rozwiązanie:
Otrzymujemy zatem następujące wyniki:

| rzut | - | szansa |
|---|---|---|
| 2 | - | 1/4 |
| 3 | - | 1/8 |
| 4 | - | 1/16 |
| 5 | - | 1/32 |
| 6 | - | 1/64 |

# Prawdopodobieństwo w praktyce

**Zadanie**

Korzystając z rachunku prawdopodobieństwa, ustal jakie jest losowe wyciąganie pisaków z piórnika. W piórniku znajduje się 6 czerwonych flamastrów, 5 różowych i 9 niebieskich.

**Rozwiązanie:**

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia flamastra o dowolnym kolorze wynosi 20:20 czyli 100%. Prawdopodobieństwo wyjęcia różowego pisaka jest równe 5:20, a to jest 25%. Prawdopodobieństwo wylosowania białego flamastra wynosi 0%, ponieważ nie ma tam takich.

**Zadanie**

Podróżny ma w sakiewce 12 złotych monet, 20 srebrnych i 8 miedzianych. Jakie jest prawdopodobieństwo że trzy kolejne wyciągnięte monety będą złote?

**Rozwiązanie:**

*Jeżeli dana sytuacja ma się powtórzyć n razy, to prawdopodobieństwo wydarzenia się tej sytuacji podnosimy do potęgi n.*

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia jednorazowo złotej monety wynosi 12:30 (40%). Jeżeli chcemy obliczyć prawdopodobieństwo powtórzenia się tej sytuacji 3 krotnie, musimy podnieść to prawdopodobieństwo do potęgi 3. $0{,}4^3=0{,}4*0{,}4*0{,}4=0{,}064$ (6,4%)

**Zadanie**

W pierwszym pojemniku jest 3 kul białych i 17 czarnych. W drugim pojemniku jest 29 kul białych i 6 kul czarnych. Ile jeszcze kul białych trzeba dołożyć do drugiego pojemnika, aby prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli z każdego z pojemników było takie samo?

**Rozwiązanie:**

Prawdopodobieństwo wylosowania w pojemniku 1 kuli białej jest równe 3:20. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w pojemniku 2 jest równe 29:35. więc jeżeli dodamy do drugiego pojemnika 1 kule białą i 165 kul czarnych.

# Elementy kombinatoryki

**Silnia** liczby naturalnej n - to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n.

Silnię liczby naturalnej n oznaczamy symbolem n! (czytamy *en silnia*).
Mamy zatem:

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$$

Przykłady:

$5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$
$6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720$
$10! = 1\cdot2\cdot3\ldots\cdot9\cdot10 = 3628800$

# Kombinacje

Kombinacja pozwala policzyć na ile sposobów można wybrać $k$ elementów z $n$-elementowego zbioru.

Wzór na kombinację jest następujący:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Kombinację zapisujemy krótko za pomocą Symbolu Newtona:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Przykład

Na ile sposobów można wybrać trzyosobową reprezentację z grupy 12 - osobowej?

Rozwiązanie:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{6 \cdot 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} = 10 \cdot 11 \cdot 2 = 220$$

Odpowiedź: Trzyosobową reprezentację z grupy 12 - osobowej można wybrać na 220 sposobów.

# Permutacje

**Permutacja zbioru** n-**elementowego** - to dowolny n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.
Liczbę permutacji zbioru n-elementowego możemy obliczyć ze wzoru:

$$P_n = n!$$

Przykład
Na ile sposobów można ustawić 6 osób w kolejce?

Rozwiązanie:
Obliczmy liczbę permutacji zbioru 6-elementowego:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Czyli sześć osób można ustawić w kolejce na 720 sposobów.

# Wariacje z powtórzeniami

Przyjmijmy, że mamy dany zbiór elementów (np. zbiór liter).
**Wariacja z powtórzeniami** pozwala na utworzenie ciągu z elementów tego zbioru, z tym, że dopuszcza powtarzanie elementów.
Wzór na wariację z powtórzeniami jest następujący:

$$W_n^k = n^k$$

**Przykład**
Ile słów pięcioliterowych (nawet tych bezsensownych) można utworzyć z liter {A,B}?

Rozwiązanie:
Przykładami taki słów są: AAAAA, AABBA, ABABB. Na każde z 5 miejsc możemy wybrać jedną z 2 liter, zatem wszystkich możliwości mamy:

$$2^5 = 32$$

Odpowiedź: Można utworzyć 32 wyrazy.

# Wariacje bez powtórzeń

Przyjmijmy, że mamy dany zbiór elementów (np. zbiór liter).
**Wariacja bez powtórzeń** pozwala na utworzenie ciągu z elementów tego zbioru, z tym, że nie dopuszcza powtarzania elementów.
Wzór na wariację bez powtórzeń jest następujący:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

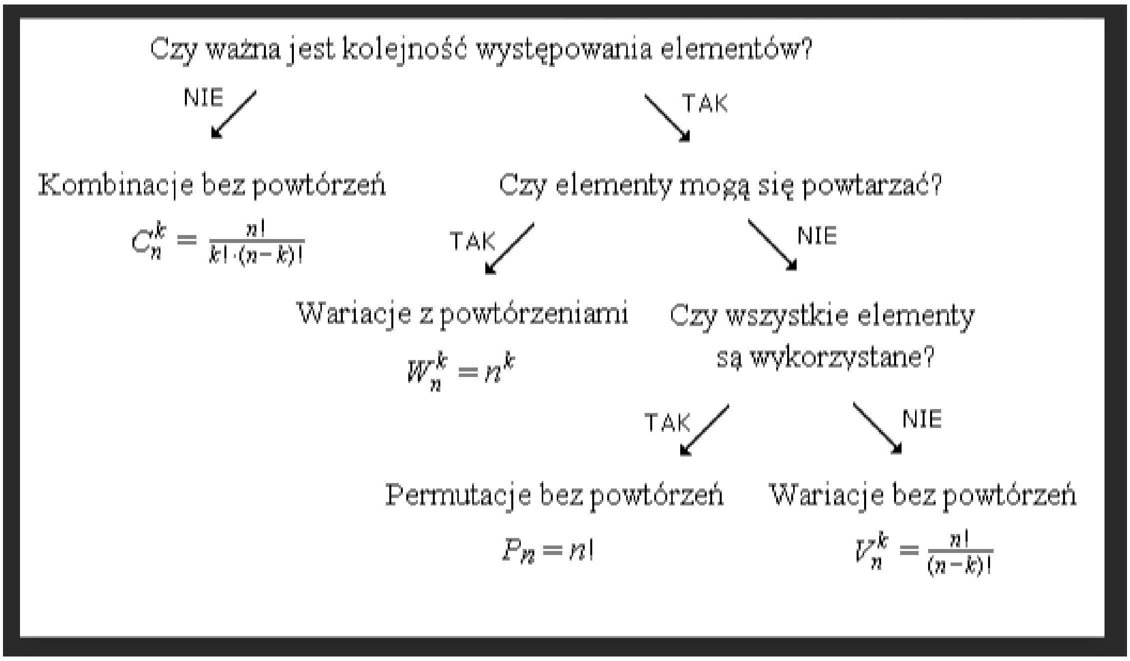
Przykład
Ile maksymalnie prób musiałby podjąć hacker na złamanie czterocyfrowego kodu. Przyjmujemy, że nie podał dwa razy tej samej odpowiedzi oraz że cyfry w kodzie się nie powtarzają.

Rozwiązanie:
Mamy do czynienia z wariacją bez powtórzeń, ponieważ cyfry w kodzie nie mogą się powtarzać oraz mamy do dyspozycji 10 cyfr: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.
Przykładowymi kodami o różnych cyfrach są: 1234, 0189, 9734.
Wszystkich takich wariacji bez powtórzeń jest:

$$\frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$$

Odpowiedź: Maksymalnie haker musiałby podjąć 5040 prób.

**Podsumowanie:**




To oznacza, że w kombinatoryce są dwa sposoby przedstawiania wyników:
- losowanie, w którym **kolejność** ma znaczenie (na przykład jako pierwszą wylosowałyśmy kulę białą, jako drugą też białą, a jako trzecią różową). W tym przypadku mamy wariację (rozmieszczenie), czyli spośród „n" przedmiotów mamy wybrać pewną ich liczbę (na przykład „k") i poukładać je w kolejności wyciągnięć.
- losowanie, w którym kolejność nie ma znaczenia, za to znaczenie ma **liczebność** (na przykład wylosowałyśmy dwie kule białe i jedną różową, kolejność nie ma znaczenia).

W zadaniach mamy do czynienia z dwoma sposobami wybierania (losowania) przedmiotów:
- ze zwracaniem (możemy jeszcze raz wylosować tą samą możliwość, na przykład na kostce sześciennej po wylosowaniu szóstki ona nie zniknie i możemy wylosować ją jeszcze raz)
- bez zwracania (tej samej możliwości nie można wylosować dwukrotnie, na przykład podczas losowania mikołajkowego[2] dwie osoby nie mogą wylosować tej samej osoby).

Losowanie ze zwracaniem można wykonać na tyle możliwość, ile jest wariacji z powtórzeniami.

Losowanie bez zwracania można wykonać na tyle sposobów, ile jest wariacji bez powtórzeń.

Szczególnie, kiedy losowanie jest bez zwracania, gdzie k = n, występuje permutacja (przestawienie). Jest to po prostu liczba wszystkich możliwości.

[2] Losowanie to polega na losowym wyciągnięciu karteczki z imieniem, po wylosowaniu karteczki nie wrzuca się z powrotem do puli

**Zadanie**
Mamy pięć osób, z których wybieramy 3, które siądą w pewnej kolejności na krzesłach 1, 2 i 3. Ile jest sposobów na posadzenie osób w ten sposób.

Rozwiązanie:
Podłóżmy więc odpowiednie liczby do wzoru:
k=3, n=5, P=?
$V_n^k$=n![3]/(n-k)!=|n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*…*(n-k+1) |
k czynników
P=n*(n-1)*(n-2)
P=5*4*3=60

Odpowiedź: Jest 60 sposobów na posadzenie tych osób.

**Zadanie**
Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej za drugim razem, jeżeli wybierzemy jedną z cyfr od 1 do 5, a następnie z pozostałych drugą.

Rozwiązanie
Zauważmy, że jest to losowanie bez zwracania, a na dodatek ilość wylosowanych liczb (dwa) jest mniejsza od ilości wszystkich cyfr (pięć) do wylosowania. Dodatkowo mamy do czynienia z losowaniem, w którym ważna jest kolejność. Wylosowanie każdej z cyfr (jest równe 20%), zatem zapiszmy to w postaci tabeli:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) |
| (2,1) | (2,3) | (2,4) | (2,5) |
| (3,1) | (3,2) | (3,4) | (3,5) |
| (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,5) |
| (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) |

Jest ich więc tyle ile wariacji bez powtórzeń:

$$V_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{1*2*3*4*5}{1*2*3} = \frac{120}{6} = 20$$

W tabeli zaznaczono w ten sposób zdarzenia elementarne sprzyjające, jest ich osiem, więc prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej za drugim razem jest równe:

$P_{(\text{wylosowania liczby parzystej za drugim razem})}$ = 8:20 = 0,4 (40%)

[3] Przypomnijmy, że przez ! oznaczmy silnię czyli iloczyn kolejnych liczb naturalnych .n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*…*1

**Zadanie**
Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania nieparzystej liczby po losowym wybieraniu liczb od 1 do 4, na kolejno tysiące, setki, dziesiątki i jedności. Cyfry mogą się powtarzać.

Rozwiązanie
W tym zadaniu mamy do czynienia z losowaniem bez zwracania oraz kolejność ma znaczenie. Niezależnie od tego, jakie trzy pierwsze liczby wylosujemy, to nieparzystość wystąpi wtedy, kiedy ostatnią cyfrą będzie 1, 3, 5, 7 lub 9. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi więc:
$P_{(\text{ostatnia cyfra będzie nieparzysta })}$ = 5 : 9 = 0,(5) = 55,5555… % = 55,(5)%

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wynosi 55,(5)%.

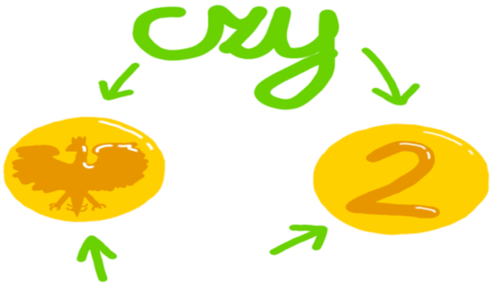
Podsumowując, kombinatoryka to dział nauki obliczający ilość „kombinacji. Pomaga ona w odpowiadaniu na pytania typu: „ile jest możliwości rozstawienia książek na półce lub wybrania dwóch bombek z choinki”. Pomoże ona nam też w obliczaniu prawdopodobieństwa wystąpienia danej sytuacji, przy zmieniających się parametrach (na przykład zmieniającej się ilości zdarzeń sprzyjających w puli tak jak było to w powyższych zadaniach). Warto zauważyć też, że uporządkowanie elementów zbioru zmienia kombinację na wariację, ponieważ wprowadzamy kolejność.

# Paradoks hazardzisty

Często, gdy dwie strony nie mogą dojść do porozumienia, spór rozstrzyga się rzutem monetą. Powszechnie to rozwiązanie uważane jest za bezstronne.

Jednak my przeprowadziłyśmy doświadczenie przeczące tej tezie.

Wykonałyśmy 500 rzutów monetą dwuzłotową.




Wyniki były następujące:

| orzełek | - | reszka |
|---|---|---|
| 57 | - | 43 |
| 51 | - | 49 |
| 64 | - | 36 |
| 47 | - | 53 |
| 51 | - | 49 |

W średnio 54 przypadkach na 100 wypadł orzełek, a w 46 reszka. Inne źródła podają podobne wyniki.

Tak jak błędne jest wierzenie w bezstronność monety, tak samo błędne jest myślenie, że zwiększa się prawdopodobieństwo wypadnięcia orła po 10 rzutach, w których wypadła reszka. Taki błędny tok rozumowania nazywamy **paradoksem hazardzisty.**

Prawdą jest, że prawdopodobieństwo wyrzucenia 11 reszek pod rząd jest nikłe, ale tylko przed rozpoczęciem rzutów. Jednak jeżeli wykonaliśmy już 10 rzutów, w których wypadła reszka, prawdopodobieństwo wypadnięcia orła nadal jest równe 54%.

# Zasada szufladkowa Dirichleta

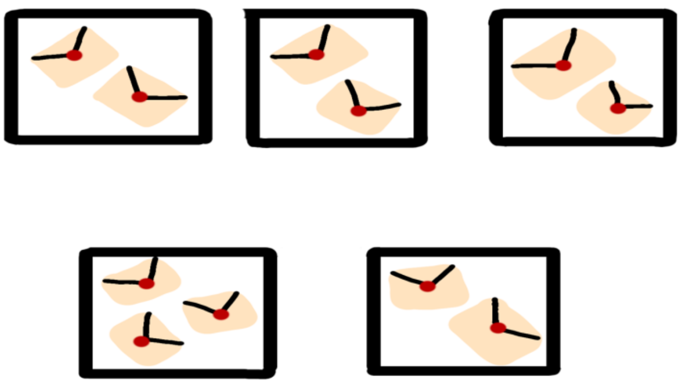
Do rozwiązywania zadań z kombinatoryki i nie tylko, można wykorzystać „zasadę szufladkową" Dirichleta[4].

Metoda ta polega na tym, że jeżeli *rozmieścimy „n" przedmiotów w „k" szufladach i n>r*k, gdzie n ,k ,r są liczbami naturalnymi, to istnieje szufladka, w której znajduje się co najmniej r+1 przedmiotów.*

Regułka choć może się wydawać dość skomplikowana, tak naprawdę jest prosta. Można wskazać, że w grupie 13 osób muszą być co najmniej 2 osoby, które urodziły się w tym samym miesiącu. W tym celu wystarczy wziąć 12 szufladek z nazwami miesięcy. A ponieważ mamy 12 szufladek, a 13 osób, to w jednej ze szufladek muszą być co najmniej dwie osoby.

Przykładem jest sytuacja pana Jana, który po wyjściu ze szpitala stał się listonoszem, aczkolwiek tylko na chwilę. Pewnego razu dostał za zadanie roznieść 11 listów do 5 skrzynek. Zorientował się on, że niezależnie od tego, jak byłyby te listy zaadresowane, to na pewno, w przynajmniej jednej ze skrzynek znajdą się co najmniej 3 listy.

Możemy również skorzystać z tak zwanego nieskończonego rozwinięcia metody szufladkowej. Mówi ona o tym, że jeżeli mamy nieskończoną ilość przedmiotów, to albo liczba szufladek musi być nieskończona, albo liczba przedmiotów w przynajmniej jednej z szufladek musi być nie skończona.



Zasadę szufladkową można też uogólnić do nieskończonych zbiorów. Wtedy na pewno jeden ze zbiorów jest nieskończenie wielki.

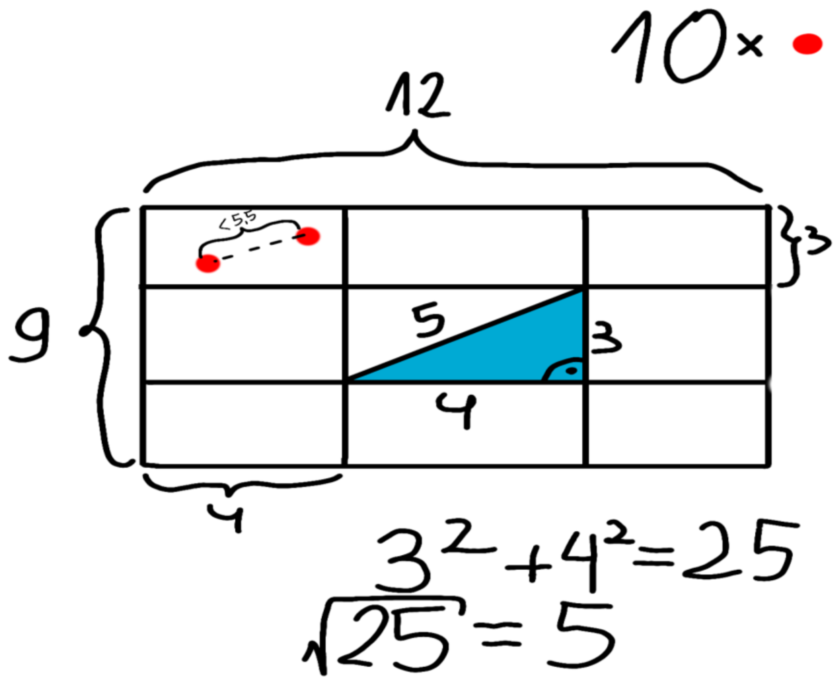
[4]Peter Gustav Lejeune Dirichlet-niemiecki matematyk francuskiego pochodzenia

Zasady szufladkowej możemy użyć do rozwiązania następujących zadań:

**Zadanie**
W oparciu o zasadę szufladkową nietrudno wykazać, że wśród mieszkańców Warszawy co najmniej dwie osoby mają tę samą liczbę włosów na głowie.

Rozwiązanie:
Rzeczywiście, liczba włosów na głowie człowieka nie przekracza 500 000, natomiast liczba mieszkańców Warszawy przekracza 1 000 000. Weźmy 500 000 szufladek ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 500 000 i wkładajmy do szufladki o danym numerze osoby, które mają taką liczbę włosów na głowie, jak numer szufladki. Ponieważ osób jest ponad 1 000 000, a szufladek 500 000, z naszej zasady wynika, że w jednej lub więcej szufladkach musi się znaleźć więcej niż jedna osoba.

**Zadanie**
W prostokącie 9 x 12 umieszczono losowo 10 punktów. Udowodnij, że istnieją wśród nich dwa takie punkty, których odległość jest mniejsza od 5,5.




Rozwiązanie:
Podzielmy prostokąt na 9 równych części.
Szufladkami w tej metodzie są małe prostokąciki, a przedmiotami są punkty. Ponieważ punktów jest 10, to istnieje część, w której znajdują się co najmniej dwa punkty. Przekątna małych prostokątów ma długość 5. Tak wiec odległość dwóch punktów z jednego prostokąta jest mniejsza niż 5,5.

**Zadanie**

Udowodnij, że wśród 10 liczb całkowitych znajdzie się kilka takich, że ich suma dzieli się przez 10.

Rozwiązanie:

Załóżmy, że te liczby to $b_1,b_2,\ldots,b_{10}$. Utwórzmy więc nowy ciąg liczb: $b_1$, $b_1+b_2$, $b_1+b_2+b_3$, $b_1+b_2+b_3+b_4$, … ,$b_1+b_2+b_3+...+b_9+b_{10}$. Gdyby liczby z nowego ciągu dawały różne reszty przez dzieleniu przez 10, to jedna z tych liczb musiałaby być podzielna przez 10. W tym rozwiązaniu numery szufladek są wartościami reszt, jakie otrzymujemy przy dzieleniu przez 10. Mamy więc 10 szufladek.

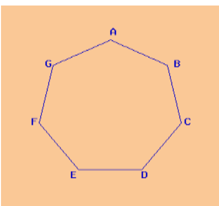
**Zadanie**

Udowodnij, że istnieje taka potęga liczby 3, która w zapisie dziesiątkowym ma ostatnie trzy cyfry tworzące układ 001.

Rozwiązanie:

W tym przypadku reszta jaką otrzymamy przy dzieleniu przez 100, to numer szufladki. Mamy więc 100 szufladek oznaczonych numerami 0,1,2,3,…,999. liczba $3^n$ umieszczamy w takiej szufladce jaką resztę otrzymujemy przy dzieleniu jej przez 1000. Liczby postaci $3^n$ jest nieskończenie wiele. Zatem istnieją liczby naturalne n i m, że $3^n$ i $3^m$ mają identyczne reszty z dzielenia przez 1000, tzn. są w tej samej szufladce, czyli wtedy liczby $3^n$-$3^m$ jest podzielne przez 1000, (n>m). Jednak $3^n$-$3^m$=$3^n$ ($3^{n-m}$-1) jest podzielna przez 1000 ma trzy ostatnie cyfry 000, czyli liczba $3^{n-m}$ kończy się cyframi 001.

**Zadanie**




Na wierzchołkach siedmiokąta foremnego ustawiono białe albo czarne żetony - po jednym na każdym wierzchołku. Udowodnij, że przynajmniej 4 z nich są tego samego koloru oraz uzasadnij, że trzy żetony tego samego koloru będą wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Rozwiązanie:

W tym przypadku naszymi szufladkami są dwa kolory (biały i czarny). Przedmiotami które w nich zamieścimy to w tym przypadku siedem żetonów. Możemy więc stwierdzić, że w jednym z kolorów będzie co najmniej cztery żetony.

Istnieją dwa sąsiednie wierzchołki w których wierzchołki są tego samego koloru (ze względu na nieparzystą liczbę wierzchołków). Przypuśćmy, że te wierzchołki znajdują się w punktach A i B. Jeżeli w wierzchołku C lub G są żetony innego koloru niż w A i B, to w wierzchołku E jest żeton tego samego koloru co w A i B lub tego samego koloru co w C i G. W każdym z tych przykładów warunki zadania są spełnione.

Analizując dogłębnie problem metody szufladkowej Dirichleta, zauważyłyśmy pewną własność, tak zwaną ***odwrotność metody szufladkowej***[5]**.**

Polega ona na tym że*, jeżeli „n" przedmiotów rozłożymy w „k" szufladkach, a „r" będzie równe [n :k]*[6]*,* gdzie n, k, r są liczbami naturalnymi*, to w przynajmniej jednej z szufladek będzie znajdować się mniej niż „r" przedmiotów.*

Dobrze pokazuje to przykład pana Jana, który po nieudanej karierze listonosza stał się nauczycielem, ba mało tego został wychowawcą klasy 4c. Było tam 13 uczniów, których miał rozsadzić do 7 rzędów ławek. Przyjmijmy, że w jednym rzędzie ławek może siedzieć dowolna ilość osób.
Wiadomo, że w przynajmniej jednym rzędzie ławek będzie siedzieć 1 lub 0 osób. Wynika to z tego, że r = [n :k] = [13 :7] = [1 6/7] = 2.

**Zadanie**
Udowodnij że, jeżeli w losowy sposób zaznaczymy 5 punktów, na odcinku o długości 6 centymetrów, to na pewno co najmniej 2 punkty będą w odległości nie mniejszej niż 1,6 centymetra. <u>Ustal, czy w zadaniu wykorzystasz metodę szufladkową, czy jej odwrotność?</u>

Rozwiązanie
Oczywiście zadanie to da się rozwiązać też po prostu mnożąc minimalną długość odległości pomiędzy punktami razy ilość tych odległości (1,6*4=6,4).
Jednak w poleceniu jest napisane, że mamy wykorzystać metodę szufladkową bądź jej odwrotność. Przełóżmy to więc na język matematyczny. Jeżeli jako szufladki potraktujemy odległości między punktami, a naszymi przedmiotami do rozdzielenia będzie 6 centymetrów, to w przynajmniej jednej z szufladek ma znaleźć się **mniej niż** 1,6 centymetra. Wiemy już, że jeżeli mamy do czynienia z „niedopełnieniem" pewnej szufladki, to będziemy korzystać z odwrotności metody szufladkowej.

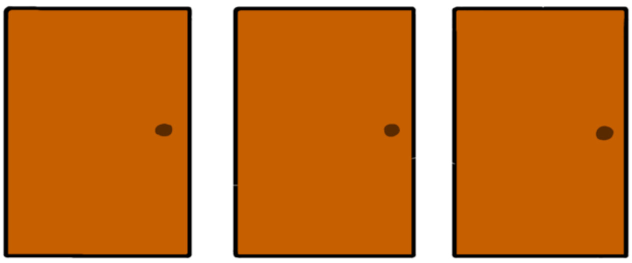
Choć sama zasada metody szufladkowej jest dość prosta, to większy problem może sprawić odnalezienie jej w zadaniu. Naszymi szufladkami mogą być nawet reszty z dzielenia, jak było to w jednym z powyższych zadań. Czasami mimo, że korzystamy w rozumowaniu z zasady szufladkowej w sposób jasny tego nie zaznaczamy. Pozostawia się czytelnikowi dostrzeżenie tego momentu.

Podsumowując, to z metody szufladkowej korzystamy, gdy mówimy o „nadmiarze", a z odwrotności, gdy mówimy o „niedopełnieniu" jednej z szuflad. Na przykład jeżeli mamy udowodnić, że w przynajmniej jednej z szuflad jest co **najmniej** „r" przedmiotów, a odwrotnej zasady szufladkowej, gdy w przynajmniej jednej z szufladek jest **mniej niż** „r" przedmiotów.

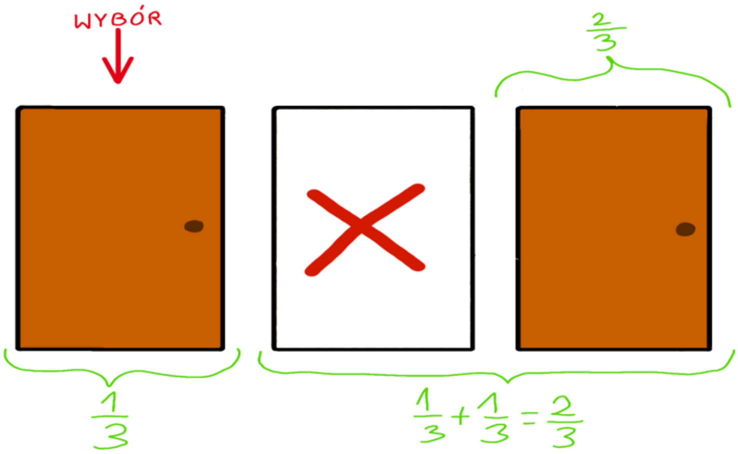
[5] Nazwa własna wymyślona przez nas
[6] Nawiasem […] będziemy oznaczać zaokrąglenie do całości zawsze w górę

# Problem Monty'ego Halla

Na koniec przyjrzymy się problemowi Mounty’ego Halla[7], który po raz pierwszy pojawił się w finale teleturnieju *Let’s make a deal* (w polskiej wersji *Idź na całość*). Jest to łamigłówka w formie łamigłówki prawdopodobieństwa. Polega ona na tym, że jeżeli mamy trzy możliwości (troje drzwi) na trafienie nagrody głównej (samochodu) mamy 1/3 szansy.



Problem zaczyna się jednak, gdy po dokonaniu wyboru, prowadzący otwiera inne drzwi, za którymi, jak się okazuje, jest zonk (koza). Następnie proponuje nam zmianę zdania. Czy teraz mamy 50% szansy na wygraną? Otóż nie! Jeżeli podejmiemy właściwą decyzję, okazuje się, że w 2 na 3 przypadki trafimy.




Najbardziej strategicznym wyborem, z matematycznego punktu widzenia, jest zmiana zdania.

[7] Kanadyjski gospodarz programu telewizyjnego i radiowego

## Zakończenie

Można zauważyć, że matematyka przydaje się w codziennym życiu. Mamy nadzieję, że udało nam się to udowodnić i przedstawić wiedzę ponadpodstawową w sposób zrozumiały dla naszych rówieśników.

Literatura:

Rachunek prawdopodobieństwa dla leniwych
Autorzy: Włodzimierz Łenski i Andrzej Patkowski
Rok wydania: 2005

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach
Autorzy: W. Krysicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska i M. Wasilewski
Rok wydania: 1999

Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego
Autorzy: Jacek Jakubowski i Rafał Sztencel
Rok wydania: 2006

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka dla licealistów
Autor: Marek Kałuszka
Rok wydania: 2011

Matematyka w szkole średniej powtórzenie i zbiór zadań
Autorzy: Karol Szymański i Norbert Dróbka
Rok wydania: 1999

Małe tablice matematyczne
Autorzy: Witold Mizerski
Rok wydania 2005

Kompendium Gimnazjalisty
Wydawnictwo IBIS
Rok wydania: 2015

https://www.matemaks.pl

https://pl.m.wikipedia.org/wiki/Paradoks_hazardzisty

https://pl.m.wikipedia.org/wiki/Zasada_szufladkowa_Dirichleta

https://en.m.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem

https://pl.m.wikipedia.org/wiki/Prawdopodobie%C5%84stwo

https://pl.m.wikipedia.org/wiki/Permutacja

https://www.naukowiec.org/wiedza/matematyka/wariacje-z-powtorzeniami_807.html