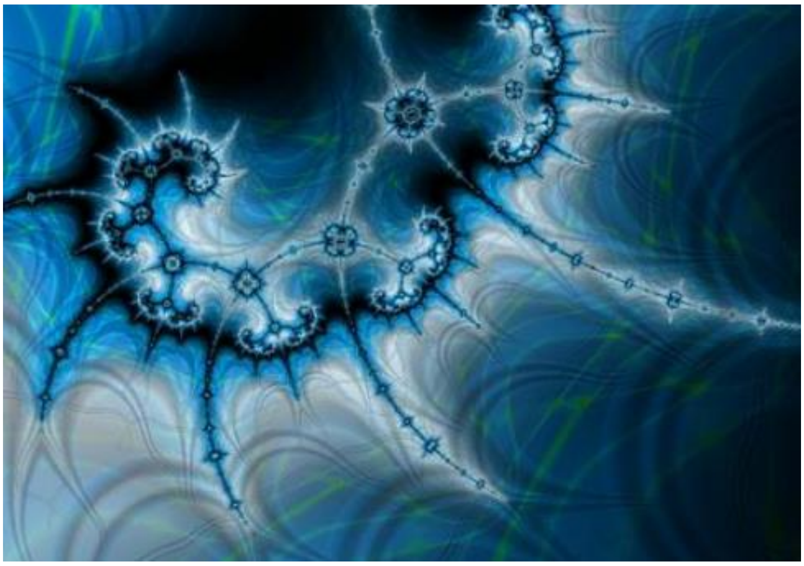
Fraktale – piękno matematyki



Fot. 1, Przykład fraktala

Autor: **Monika Wójtowicz**
Klasa 8b
Opiekun: mgr Paulina Krupnik – Molęda
Prywatna Szkoła Podstawowa z Oddziałami Dwujęzycznymi nr 2
im. Noblistów Polskich w Krakowie
sekretariat@edukacja.krakow.pl, tel. 12 633 60 52

Małopolski Konkurs Prac Matematycznych – Kraków 2023

Opinia opiekuna

Monika Wójtowicz jest uczennicą klasy 8b Prywatnej Szkoły Podstawowej z Oddziałami Dwujęzycznymi nr 2 im. Noblistów Polskich w Krakowie.

Monika w pełni samodzielnie opracowała wybrany przez siebie temat od strony merytorycznej. Można zauważyć, że dobrze czuje się w tym temacie i zagadnienie fraktali naprawdę ją fascynuje. Potrafi dokładnie wytłumaczyć, jak stworzyła własne fraktale i jak wyglądałyby kolejne etapy konstrukcji.

Codzienna praca z Moniką to czysta przyjemność. Na lekcjach matematyki jest skupiona, aktywna i dociekliwa. Regularnie uczęszcza na zajęcia dodatkowe. Na każdym kroku da się odczuć, że *umieć* to dla Moniki za mało. Musi *rozumieć*.

Takich uczniów życzy sobie każdy nauczyciel.

mgr Paulina Molęda-Krupnik

Spis treści

Wstęp

„Chmury to nie kule, szczyty górskie to nie stożki,
linie wybrzeża to nie koła, kora drzew nie jest gładka,
a błyskawice nie rozchodzą się po liniach prostych”

Benoit Mandelbrot

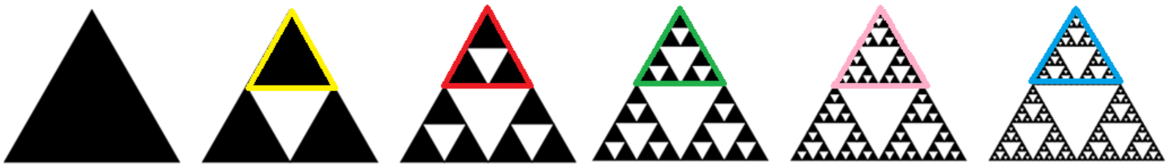
Miłość do fraktali przekazał mi tata, który jako nastolatek interesował się nimi. Zachwycił się ich pięknem, różnorodnością, budową i odzwierciedleniem w przyrodzie. Od kiedy pamiętam wspominał o nich podczas wypraw do lasu.

Jeszcze rok temu nie przypuszczałabym, że napiszę o nich pracę, a jednak. Życie pisze nieprzewidywalne scenariusze i tak właśnie stało się w moim przypadku.

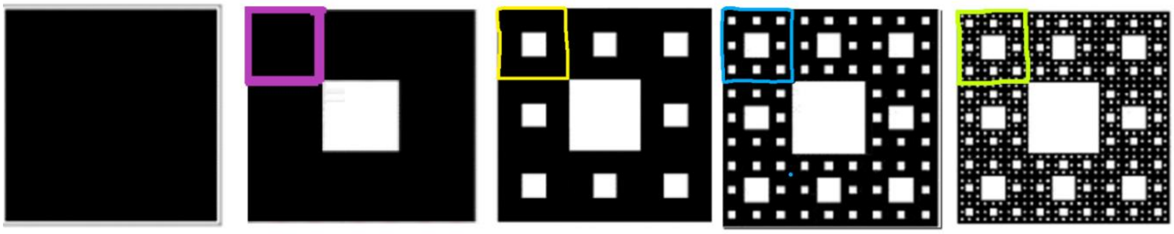
W mojej pracy postaram się przybliżyć pojęcie fraktala, zaprezentować kilka najpopularniejszych przykładów oraz przedstawić ich wykorzystanie w życiu codziennym.

Co to jest fraktal?

Fraktale nie posiadają swojej prostej definicji (łac. fractus – złamany, cząstkowy), to obiekty, których fragmenty w powiększeniu wyglądają podobnie do całości. Fraktale możemy dowolnie powiększać i ciągle będziemy widzieć tę samą powtarzającą się strukturę. Są obiektami geometrycznymi, które mogą być samopodobne i są nieskończenie złożone. W przypadku fraktali samopodobnych, oznacza to, że ich mniejsze fragmenty przypominają całość obiektu.



Rys. 1, Trójkąt Sierpińskiego (1)



Rys. 2, Dywan Sierpińskiego (1)

Fraktale geometryczne powstają w wyniku dowolnej liczby powtórzeń określonej operacji matematycznej.

Obiekty „fraktopodobne" można spotkać w otaczającym nas świecie od wielu lat. Mimo tego, fraktale są na tyle skomplikowanymi strukturami, że nie posiadają prostej definicji.

Matematycy proponują określić fraktale jako zbiory charakteryzujące się nietrywialną strukturą w każdej skali, budową nie dającą prosto opisać się językiem geometrii euklidesowej.

Definicja fraktalna (Mandelbrot)

Fraktalem nazywamy zbiór, którego tzw. wymiar fraktalny (wymiar Haussdrfa – Besicovitcha) jest większy od wymiaru topologicznego.

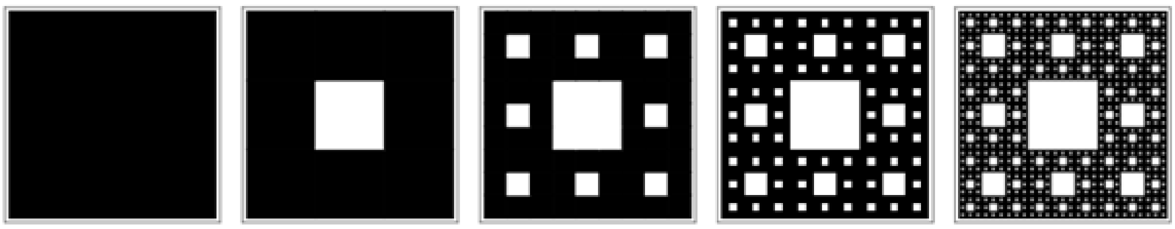
Przykłady wybranych fraktali

W tej części pracy przybliżę najbardziej znane fraktale.

Dywan Sierpińskiego

Jednym z dwóch obiektów geometrii fraktalnej, które wymyślił polski matematyk Wacław Sierpiński jest Dywan Sierpińskiego. Otrzymuje się go z kwadratu – dzieląc go na dziewięć identycznych, mniejszych kwadratów, a następnie usuwa się środkowy kwadrat. Następnie każdy z pozostałych ośmiu mniejszych kwadratów dzielimy znowu na dziewięć równych części i usuwamy środkowy kwadrat.

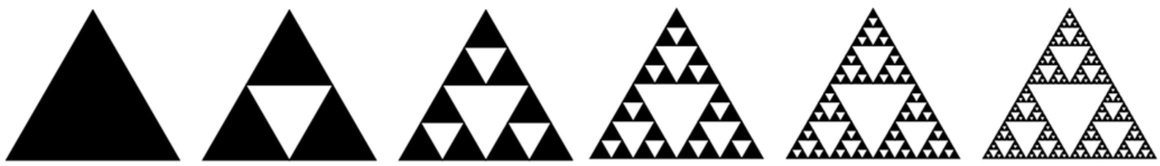
Zbiór, który otrzymamy po nieskończenie wielu krokach nazywamy dywanem Sierpińskiego.



Rys. 3, Dywan Sierpińskiego (2)

Trójkąt Sierpińskiego

Jednym z najbardziej znanych fraktali jest Trójkąt Sierpińskiego. Znany był na długo przed powstaniem pojęcia fraktala. Jego struktura opiera się na trójkącie równobocznym. W trójkącie takim wyznacza się środki boków i łączy je odcinkami. Dzięki temu powstają 4 mniejsze trójkąty przystające do siebie i podobne do pierwowzoru. W kolejnym kroku należy usunąć środkowy trójkąt i odtworzyć poprzednie czynności z pozostałymi trójkątami.

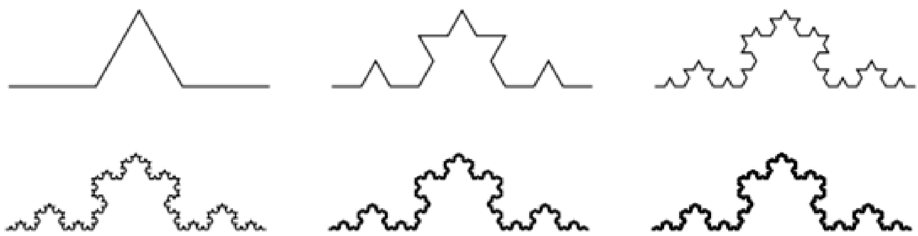


Rys. 4. Trójkąt Sierpińskiego (2)

Krzywa Kocha

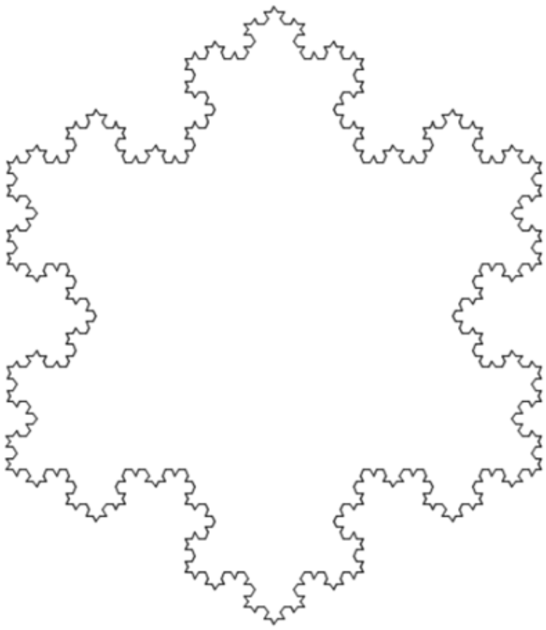
Krzywa fraktalna, która jest nieskończenie długa to krzywa Kocha. Krzywa Kocha powstaje z odcinka, w wyniku jego podziału na trzy części oraz zastąpienia środkowej części dwoma identycznymi odcinkami nachylonymi do siebie pod kątem 60 stopni. Te dwa odcinki z usuniętą częścią tworzą trójkąt równoboczny.

Na poniższym rysunku zaprezentowano sześć pierwszych kroków konstrukcji krzywej Kocha.



Rys. 5, Etapy 1-6 konstrukcji Krzywej Kocha

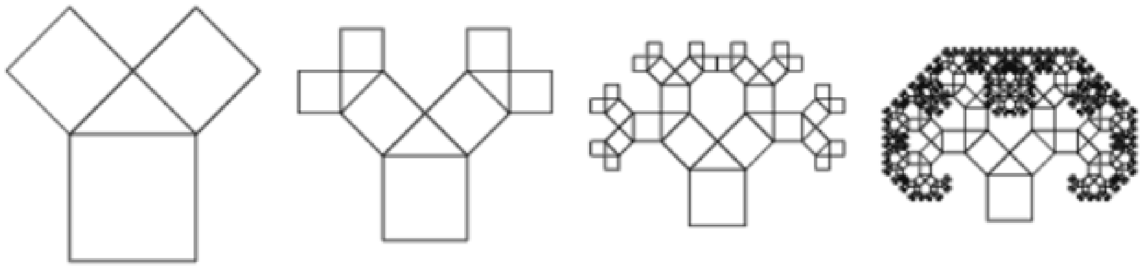
Gdy połączymy ze sobą trzy identyczne wycinki krzywej Kocha pod kątem 60 stopni, stworzymy obiekt przypominający płatek śniegu. Taki obiekt geometryczny nazywamy płatkiem Kocha.



Rys. 6, Płatek Kocha

Drzewo pitagorejskie

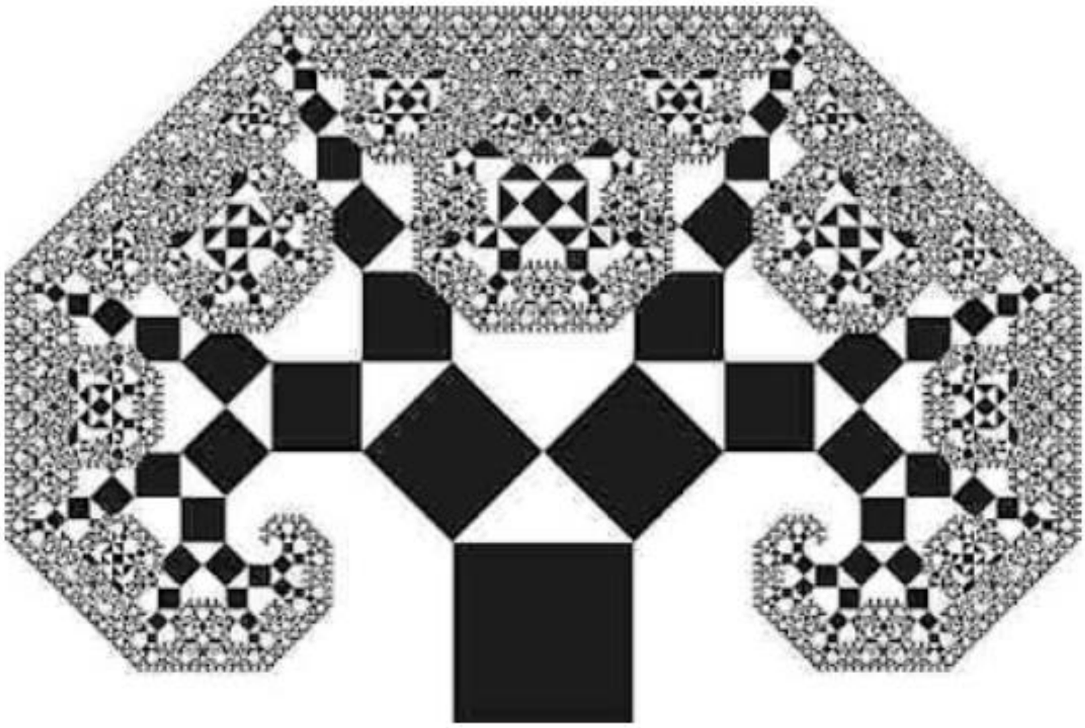
Kolejnym przykładem fraktala jest Drzewo pitagorejskie. Zbudowane jest ono z kwadratów oraz trójkątów prostokątnych równoramiennych. Swoją konstrukcję opiera na jednym z dowodów twierdzenia Pitagorasa. Wyglądem przypomina drzewo. Aby otrzymać taki fraktal należy zacząć od narysowania kwadratu, a następnie należy dorysować dowolny trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna będzie bokiem uprzednio narysowanego kwadratu. W kolejnym kroku należy dorysować kwadraty oparte na przyprostokątnych. Kroki te powtarzamy z kolejnymi kwadratami.



Rys. 7, Etapy 1-4 konstrukcji Drzewa pitagorejskiego

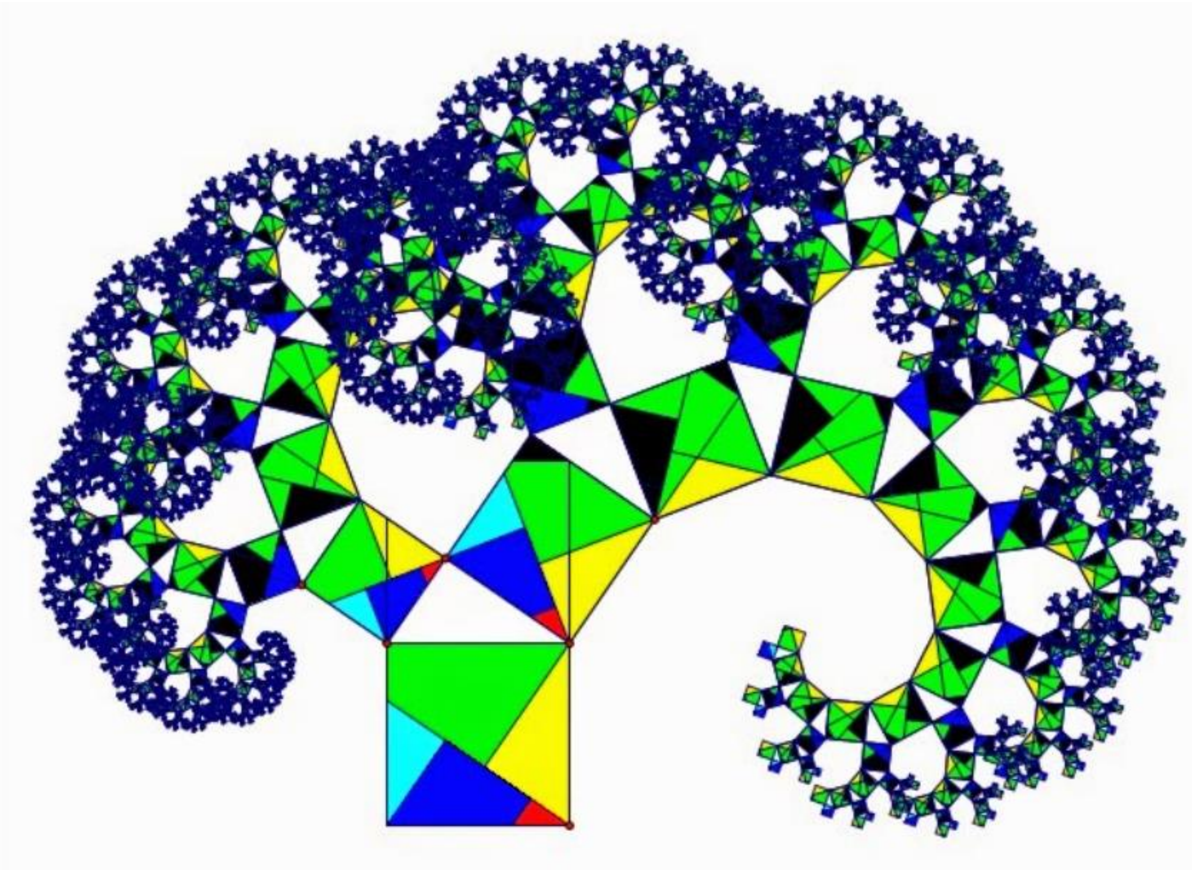
Rozbudowane drzewa Pitagorasa

Rys. 8, Drzewo Pitagorasa (przykład 1)



Rys. 9, Drzewo Pitagorasa (przykład 2)

Rys. 10, Drzewo Pitagorasa (przykład 3)



Rys. 11, Drzewo Pitagorasa (przykład 4)

Drzewo Pitagorasa to konstrukcja geometryczna, która powstaje w wyniku ciągłego budowania kwadratów na bokach trójkątów prostokątnych.

Zbiór Cantora

Zbiór Cantora jest najprostszym fraktalem. Tworzymy go poprzez podzielenie odcinka na równe 3 części, usunięcie środkowej części i powtórzenie poprzednich kroków dla nowo powstałych odcinków.

Rys. 12, Zbiór Cantora

Zbiór Mandelbrota

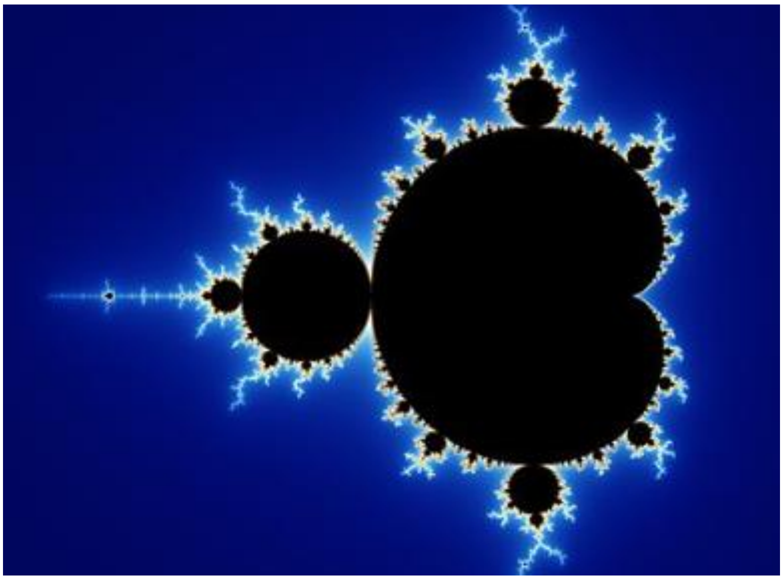
Mimo nazwy jaką mu nadano to nie Mandelbrot wymyślił sposób konstrukcji tego zbioru. Tożsamość prawdziwego twórcy nie jest znana.

Zbiór Mandelbrota (zwany też żukiem Mandelbrota) – podzbiór płaszczyzny zespolonej, którego brzeg jest jednym z najbardziej znanych fraktali, „najsłynniejszym obiektem współczesnej matematyki”.

Jest to zbiór liczb zespolonych p, dla których zdefiniowany poniżej ciąg rekurencyjny:

$$\begin{cases} z_0 = 0, \\ z_{n+1} = z_n^2 + p, \end{cases}$$

nie jest rozbieżny, tzn. $\lim_{n \to \infty} z_n \neq \infty$. Zbiór Mandelbrota jest podzbiorem liczb zespolonych, zatem zbiór ten będzie rysowany na płaszczyźnie Gaussa.



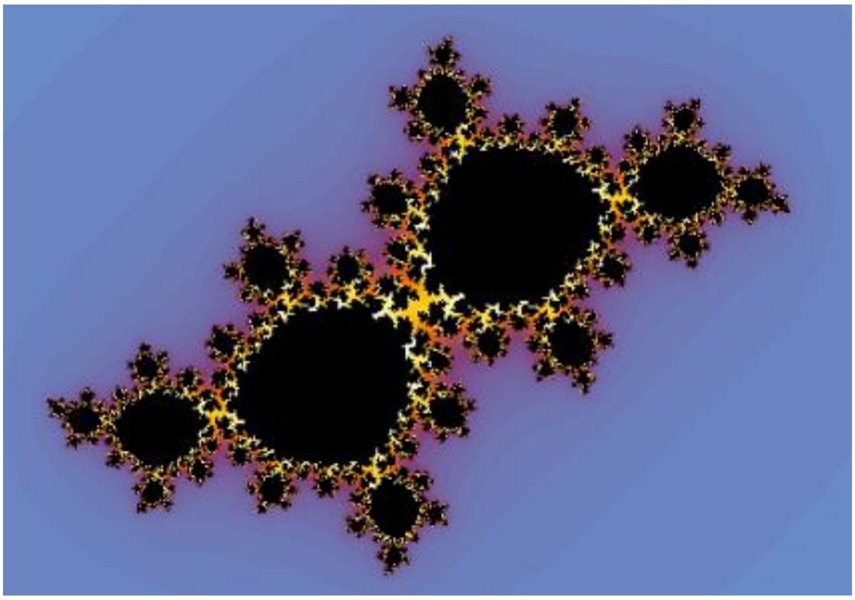
Fot. 2, Zbiór Mandelbrota

Zbiór Julii

Zbiór Julii podobnie jak zbiór Mandelbrota jest podzbiorem płaszczyzny zespolonej. Jego nazwa pochodzi od francuskiego matematyka Gastona Julii. Wypełniony zbiór Julii tworzą punkty p, dla których ciąg opisany wzorem:

$$\begin{cases} z_0 = p, \\ z_{n+1} = z_n^2 + c, \end{cases}$$

nie dąży do nieskończoności, gdzie c to liczba zespolona, która jest nazywana parametrem zbioru. Brzeg wypełnionego zbioru Julii nazywamy po prostu zbiorem Julii.

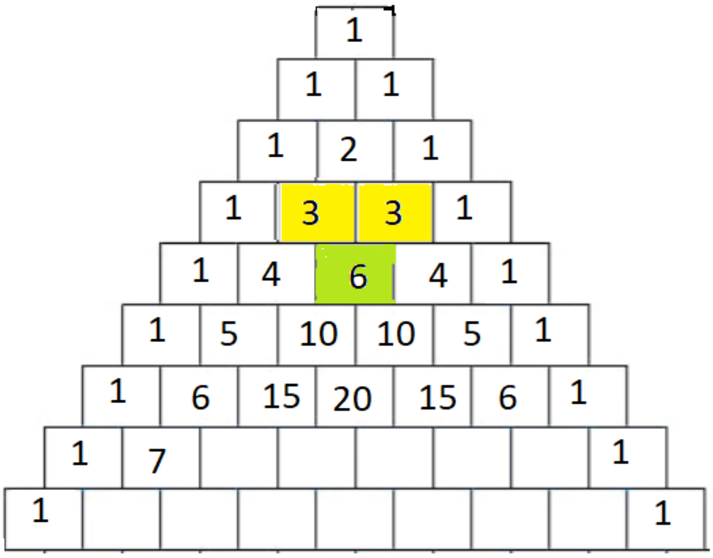


Fot. 3, Zbiór Julii

Trójkąt Pascala i fraktale

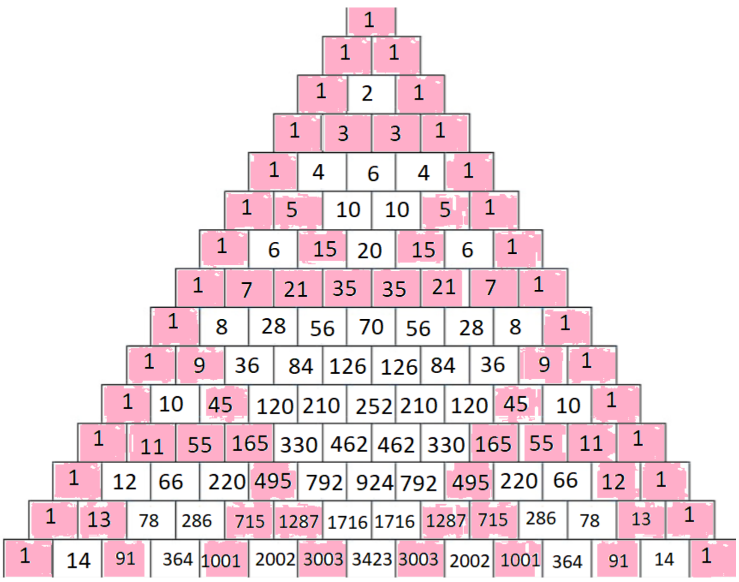
Szukając informacji na temat fraktali natrafiłam na Trójkąt Pascala, niezwykle interesujący twór.

Na bokach trójkąta znajdują się liczby 1, a pozostałe liczby powstają jako suma dwóch bezpośrednio znajdujących się nad nią.



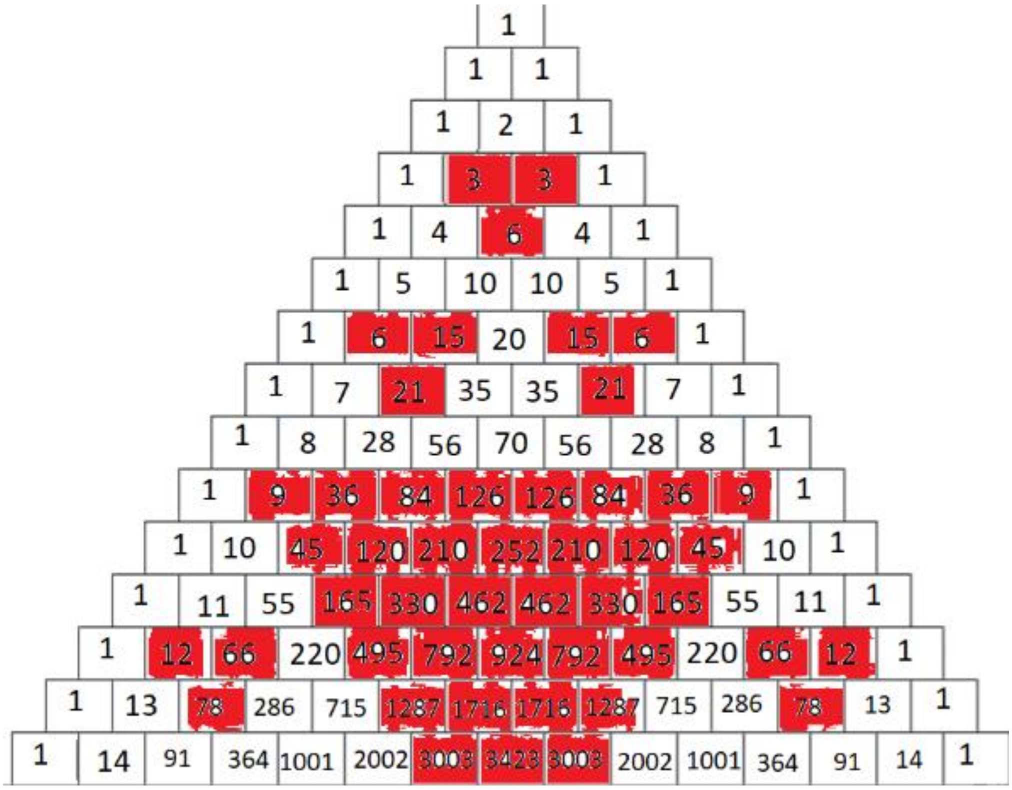
Rys. 13, Schemat budowy Trójkąta Pascala

Z trójkąta Pascala można utworzyć Trójkąt Sierpińskiego kolorując liczby nieparzyste. Podobieństwo stacje się coraz wyraźniejsze, gdy bierze się pod uwagę więcej rzędów.

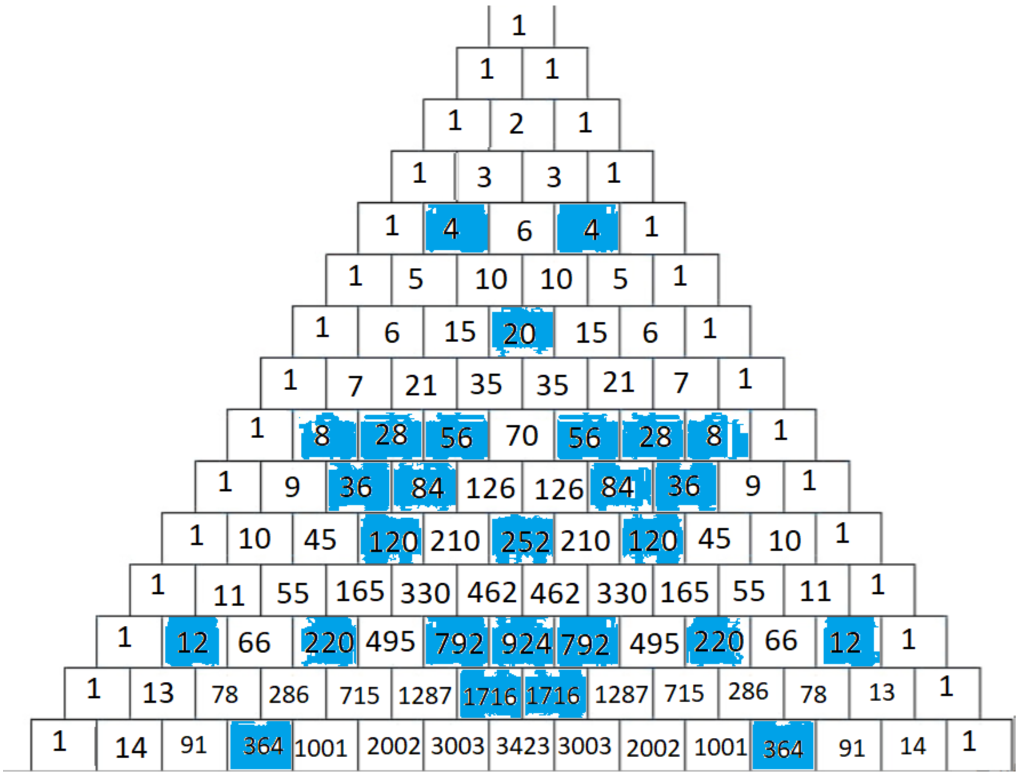


Rys. 14, Trójkąt Sierpińskiego w Trójkącie Pascala

Kolorując wielokrotności liczby 3 lub wielokrotności liczby 4 otrzymujemy inne formy fraktali:



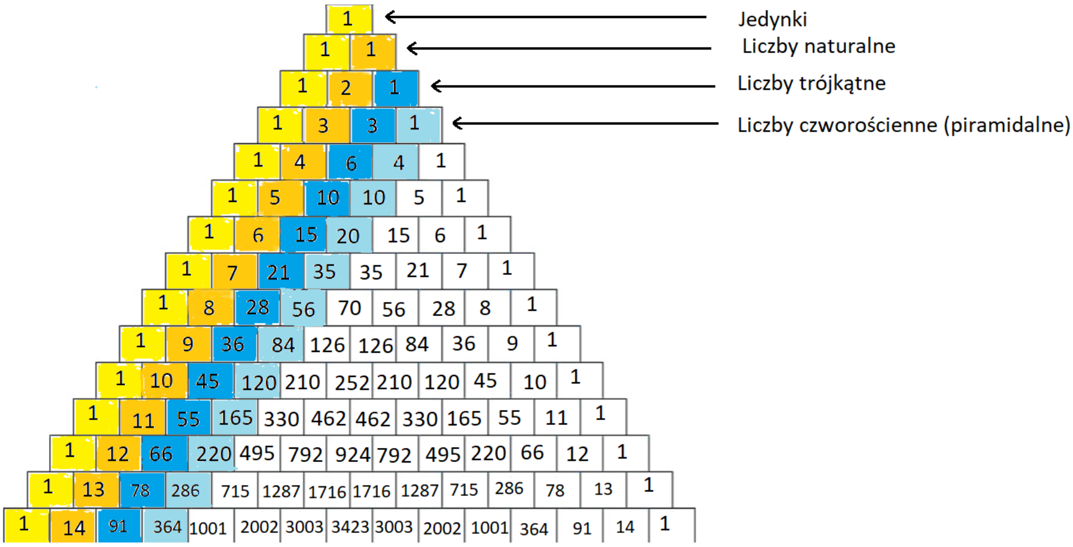
Rys. 15, Trójkąt Pascala - fraktal z wielokrotności liczby 3



Rys. 16, Trójkąt Pascala - fraktal z wielokrotności liczby 4

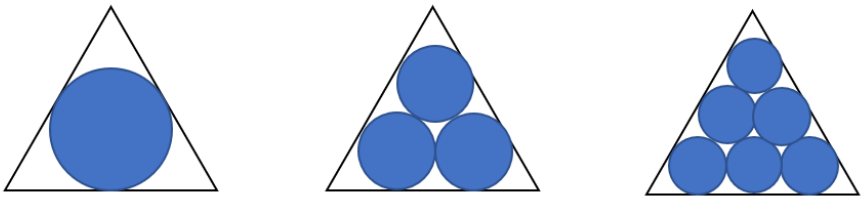
Ciekawostki dotyczące Trójkąta Pascala

W trójkącie Pascala pierwsza przekątna składa się z samych jedynek, następna zawiera liczby naturalne.



Rys. 17, Trójkąt Pascala - ciekawostka 1

Trzecia przekątna to tzw. *liczby trójkątne*, czyli liczba kół tej samej wielkości, które możemy „ułożyć” w trójkąt równoboczny (patrz Rys. 15).

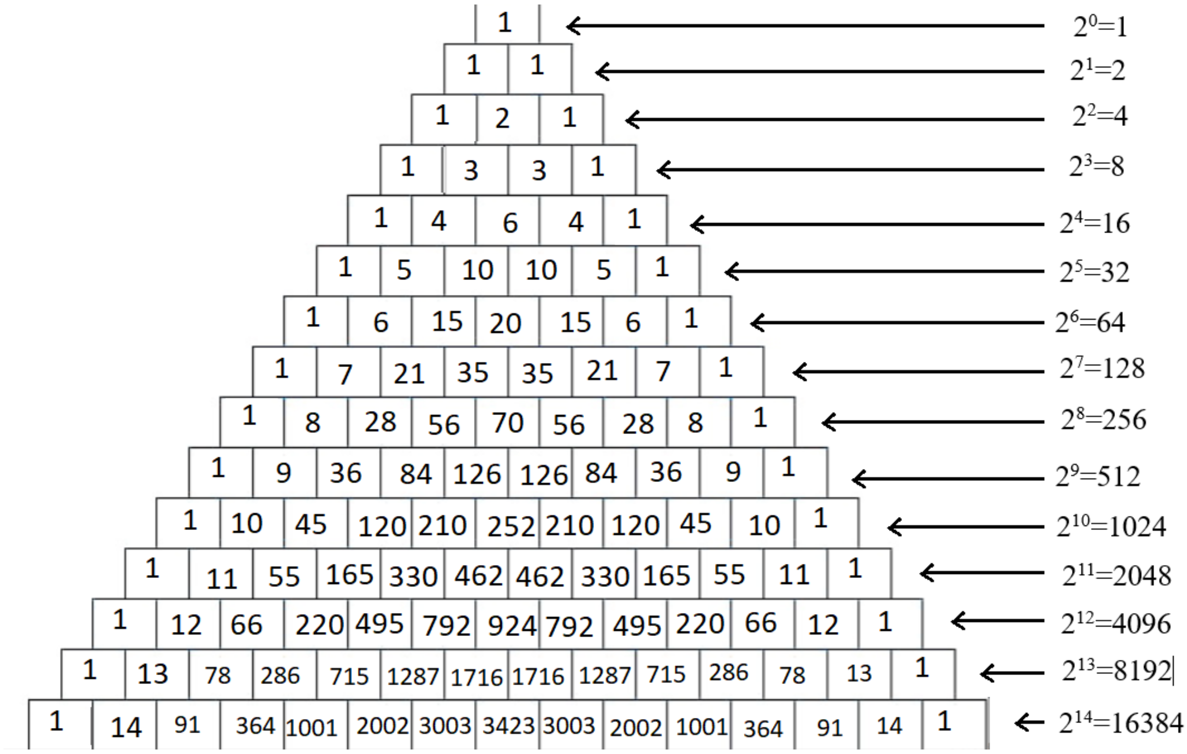


Rys. 18, Liczby trójkątne - zilustrowanie definicji

Następna przekątna to *liczby czworościenne*. Są to liczby odpowiadające liczbie kul, które można „ułożyć” w czworościan, którego ścianami są trójkąty równoboczne.

Fot. 4, Liczby czworościenne - zilustrowanie definicji

Kolejną ciekawostką na temat trójkąta Pascala są *sumy pozorne*. Sumując liczby w poszczególnych poziomych rzędach otrzymujemy kolejne potęgi liczby 2.



Rys. 19, Trójkąt Pascala - ciekawostka 2

Fraktale wokół nas

Brokuł włoski

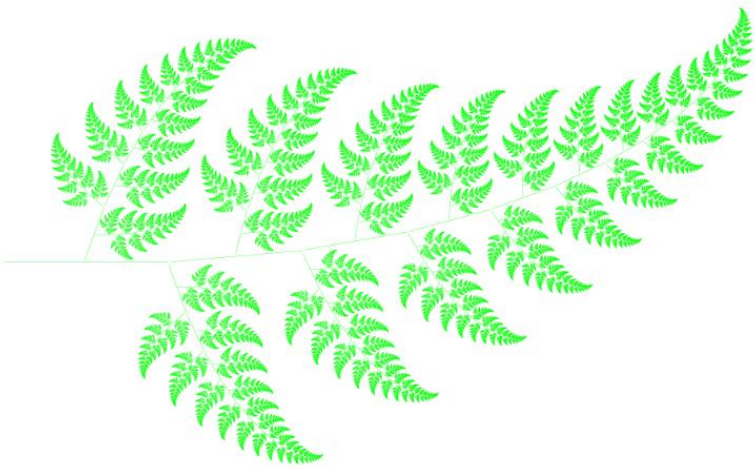
Bardzo dobrą wizualizacją fraktala są kalafiory i brokuły, w szczególności brokuły włoskie. Tworzą go wiązki jego kwiatów, które przypominają całość brokułu. Składają się one z coraz mniejszych wiązek kwiatów przypominających pomniejszony brokuł.

Fot. 5, Brokuł włoski

Liść paproci

Kolejnym przykładem fraktala w przyrodzie jest liść paproci – uderzające podobieństwo do fraktala Paproć Barnsleya.

Fot. 6, Liść paproci



Fot. 7, Paproć Barnsleya

Chmury

„nie dość, że chmury są fraktalami, to jeszcze w siódmym „zanurzeniu” ich wymiar fraktalny jest taki sam”

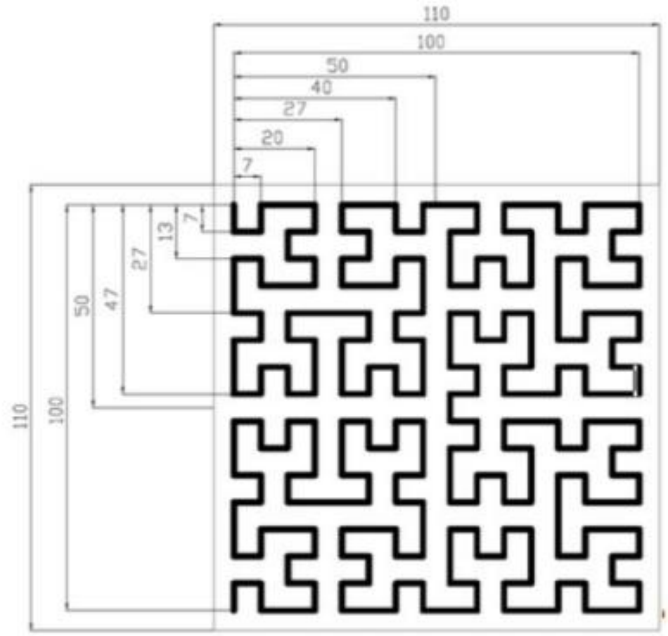
Shaun Lovejoy

Chmura przybiera różne kształty i niewątpliwie jest jedną całością. Zbudowana z pewnej ilości mikroskopijnych kropelek wody i pary wodnej. Gdybyśmy więc "wycieli" kawałek z całości moglibyśmy się przekonać iż jest zbudowana z wielu mniejszych powtarzających się struktur (bardzo podobnych do całości).

Fot. 8, Chmury

Zastosowania fraktali

Wyjątkowe cechy fraktali sprawiły iż znalazły one swoje zastosowanie w wielu różnych dziedzinach życia. Pierwszym przykładem jest antena fraktalna w którą wyposażony jest każdy telefon komórkowy. Antena zamiast standardowej konstrukcji wykorzystuje kształty pojawiające się w znanych nam fraktalach. Dzięki temu skuteczniej wypełnia przestrzeń zajmowaną przez nią a tym samym zapewnia lepszą transmisję energii do fali radiowej. Dzięki tej własności antena fraktalna nadaje sygnał na dużo większą odległość niż zwykła antena tej samej wielkości.



Rys. 20, Schemat ideowy anteny fraktalnej Hilberta czwartego rzędu

Dzięki fraktalom możliwe jest tworzenie spektakularnych efektów z wykorzystaniem grafiki komputerowej. Tworzone są realistyczne i piękne krajobrazy, wybuchy wulkanów, sceny, które niemożliwe były wcześniej do nakręcenia podczas produkcji filmu.

Kompresja obrazów jest kolejnym przykładem, gdzie fraktale znajdują swoje zastosowanie. Kompresja fraktalna to system kompresji stratnej, która bazuje na podobieństwie różnych fragmentów danego obrazu. Pozwala to na zapisanie tylko kilku elementów obrazu i przekształceń, które trzeba będzie wykonać po dekompresji obrazu. Niestety metoda ta jest bardzo czasochłonna i z tego powodu jest rzadko stosowana. Niemniej jednak ten sposób zapisu wielokrotnie przewyższa kompresję JPG.

W medycynie fraktale znalazły zastosowanie między innymi w analizie obrazów tomograficznych oraz w rozpoznawaniu komórek. Na przykład kilka lat temu w ośrodku badawczym w Mount Sinai w Nowym Jorku zostały wskazane zależności pomiędzy wymiarem fraktalnym chromosomu, a rakiem.

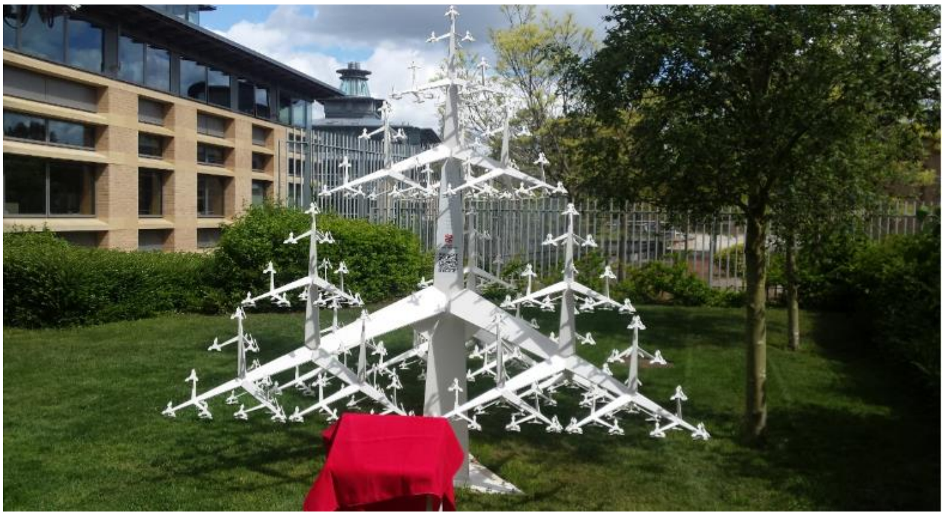
Fraktale znalazły też zastosowanie w projektowaniu wnętrz. Przykładem jest poniższe zdjęcie Drzewo Pitagorasa w pokoju.

Fot. 9, Zastosowanie fraktali w projektowaniu wnętrz

Fraktale jako inspiracja

Drzewo fraktalne

W bardzo nietypowy sposób został uhonorowany nasz polski matematyk. Przed wydziałem matematyki Cambridge University, jednego z najlepszych uniwersytetów na świecie, stanęło drzewo fraktalne oparte na odkryciu polskiego matematyka Wacława Sierpińskiego.



Fot. 10, Drzewo fraktalne stojące na Cambridge Uniwersity

Żywy fraktal

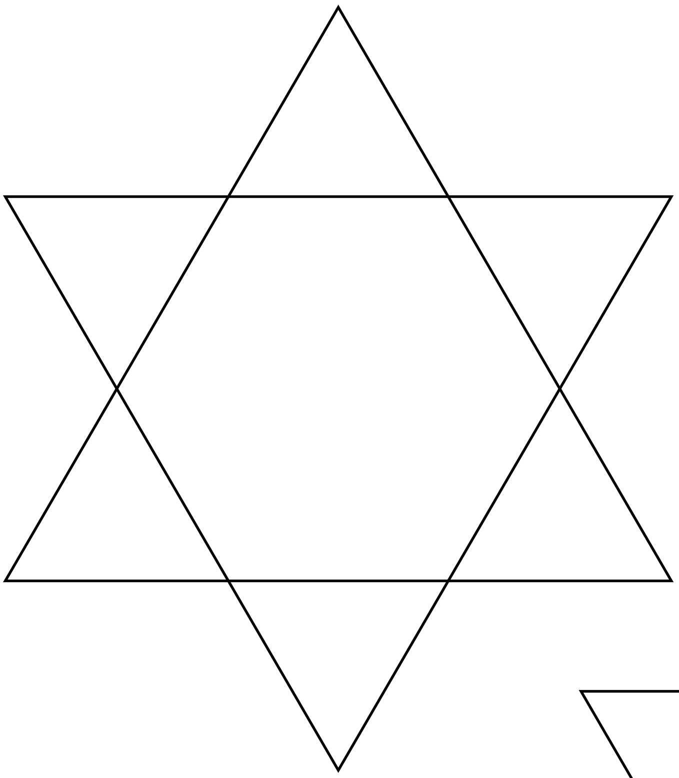
W 2019 roku ponad 6,5 tys. uczniów z 81 małopolskich szkół utworzyło w na Błoniach "żywy" Trójkąt Sierpińskiego, czyli najsłynniejszy w matematyce fraktal. Młodzież uczciła w ten sposób 100-lecie Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Krakowie.

Fot. 11, "Żywy" fraktal na krakowskich błoniach

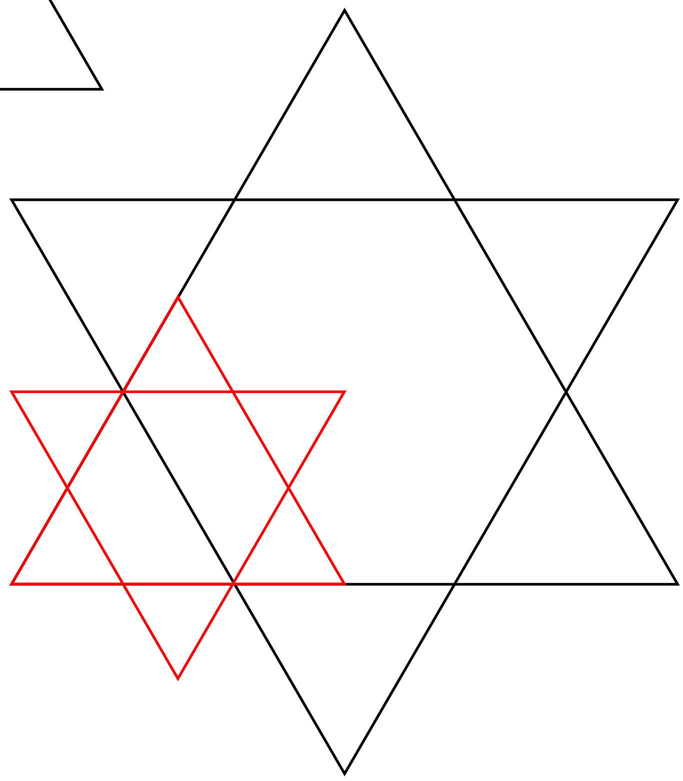
Twórczość własna

Fraktal nr 1 (na bazie gwiazdy sześcioramiennej)

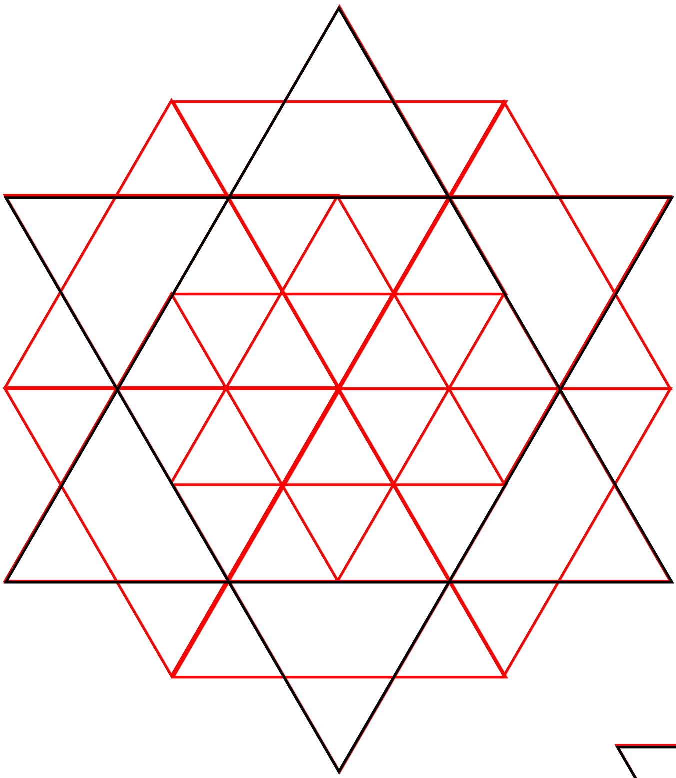
Zaczynamy od zbudowania gwiazdy sześcioramiennej z dwóch trójkątów równobocznych (patrz Rys.21). Następnie na jej ramionach budujemy kolejne gwiazdy w skali 1 : 2 (patrz Rys.22 i Rys.23). Kolejno na ramionach każdej czerwonej gwiazdy budujemy kolejne gwiazdy (patrz Rys.24 i Rys.25).



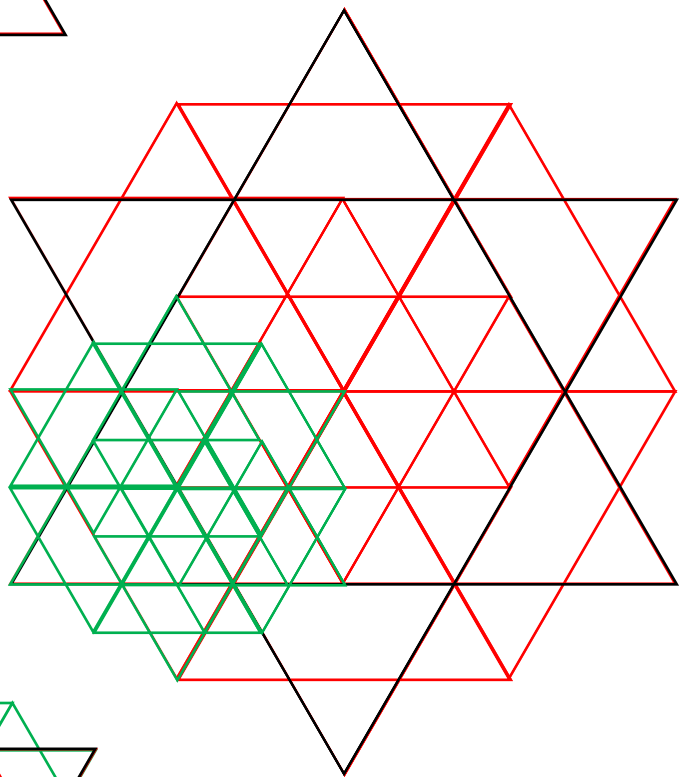
Rys. 21, Etap 1 konstrukcji fraktala nr 1



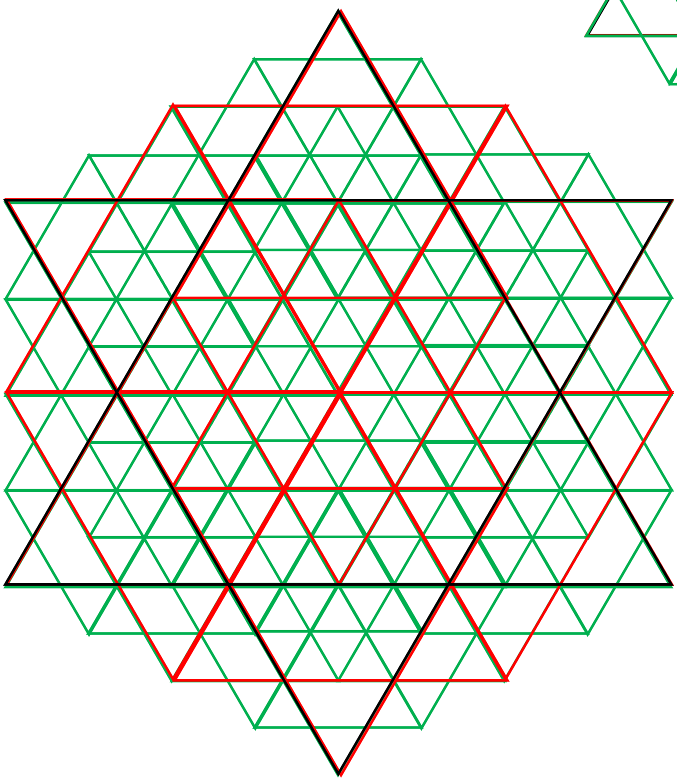
Rys. 22, Etap 2 konstrukcji fraktala nr 1



Rys. 24, Etap 3 konstrukcji fraktala nr 1



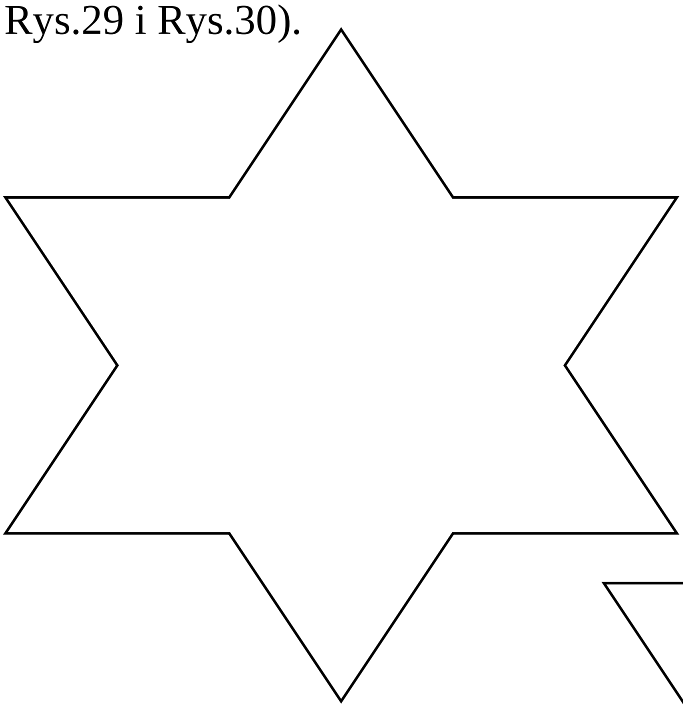
Rys. 25,Etap 4 konstrukcji fraktala nr 1



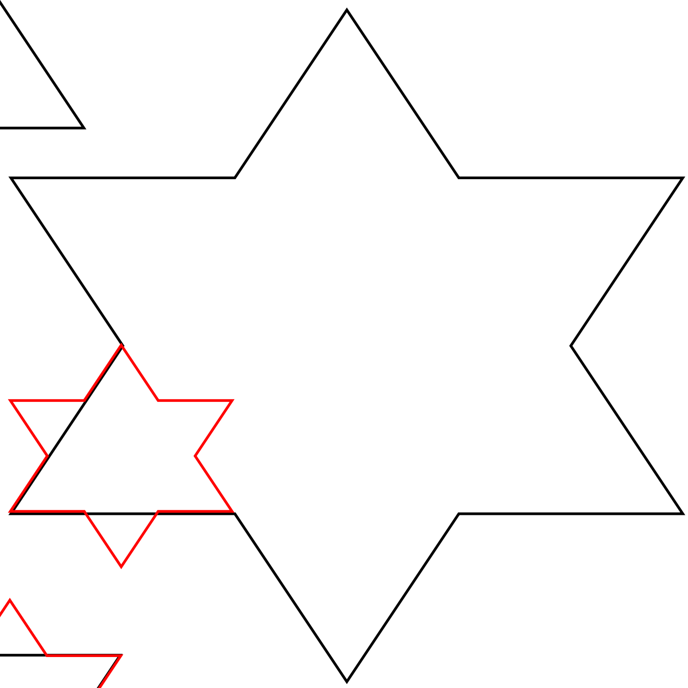
Rys. 23, Etap 5 konstrukcji fraktala nr 1

Fraktal nr 2 (na bazie gwiazdy sześcioramiennej)

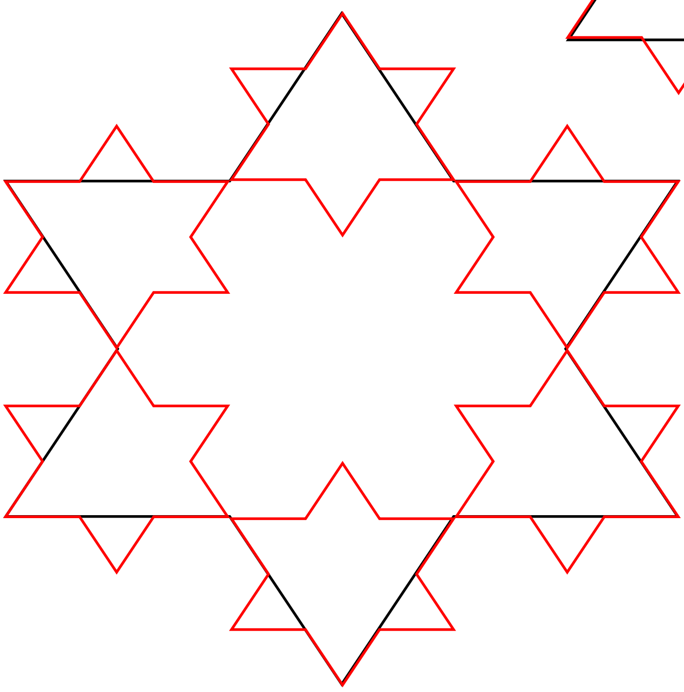
Zaczynamy od zbudowania gwiazdy sześcioramiennej o wszystkich bokach tej samej długości (patrz Rys.26). Następnie na jej ramionach budujemy kolejne gwiazdy w skali 1 : 3 (patrz Rys.27 i Rys.28). Kolejno na ramionach każdej czerwonej gwiazdy budujemy kolejne gwiazdy (patrz Rys.29 i Rys.30).



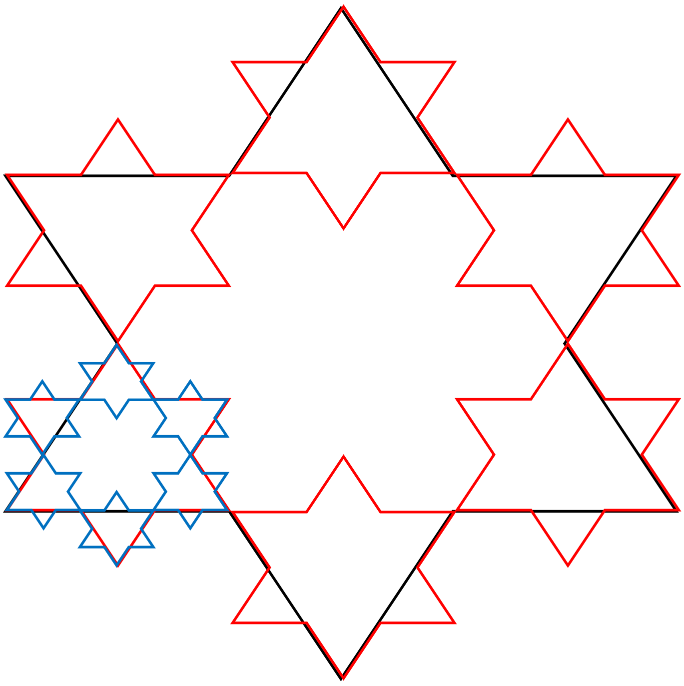
Rys. 26, Etap 1 konstrukcji fraktala nr 2



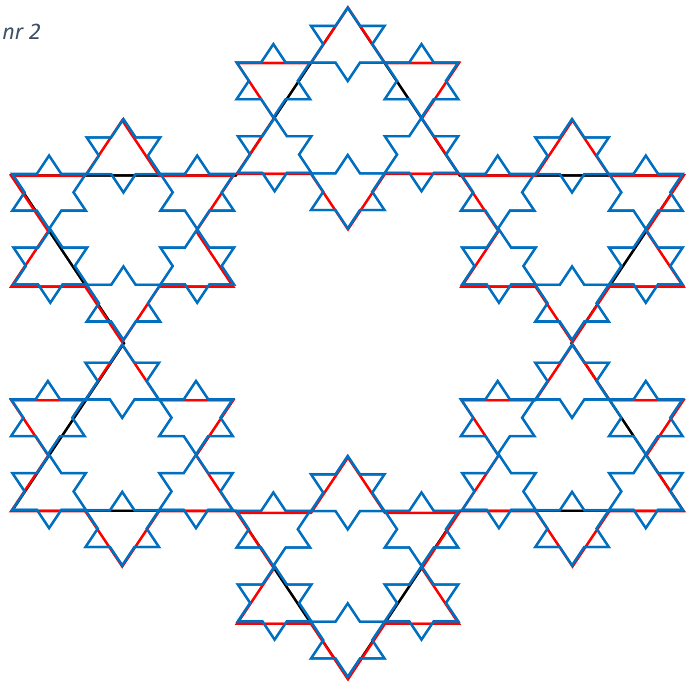
Rys. 27, Etap 2 konstrukcji fraktala nr 2



Rys. 28, Etap 3 konstrukcji fraktala nr 2

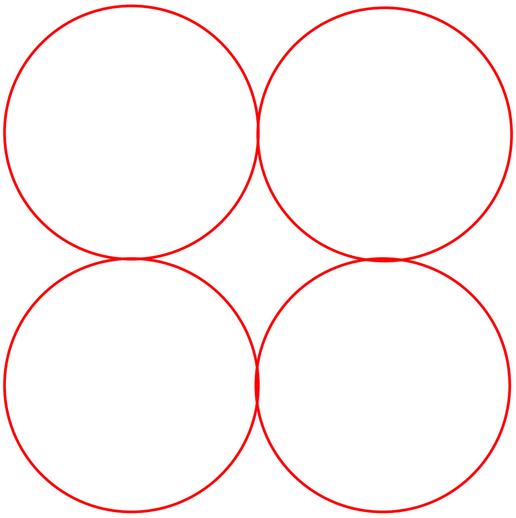


Rys. 29, Etap 4 konstrukcji fraktala nr 2

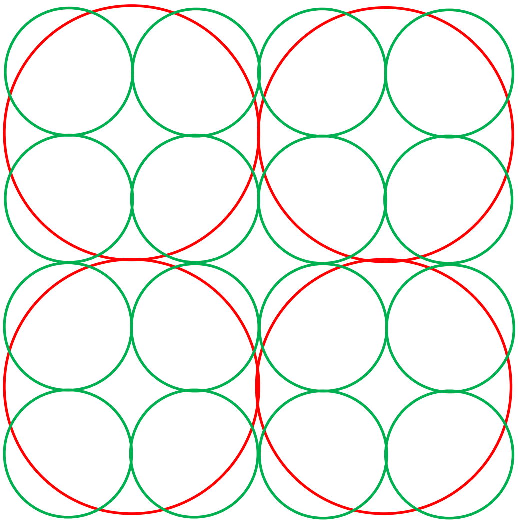


Rys. 30, Etap 5 konstrukcji fraktala nr 2

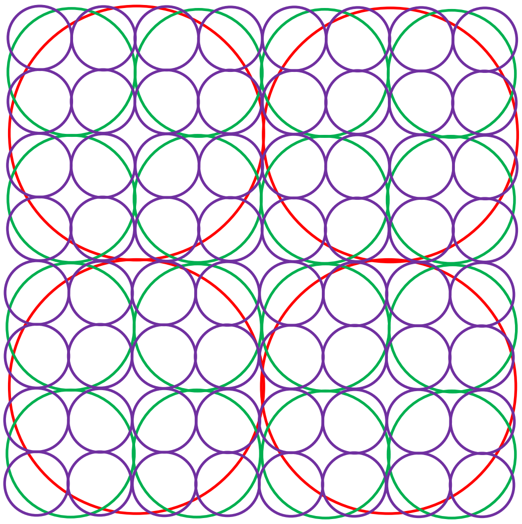
Fraktal nr 3 (na bazie okręgu)



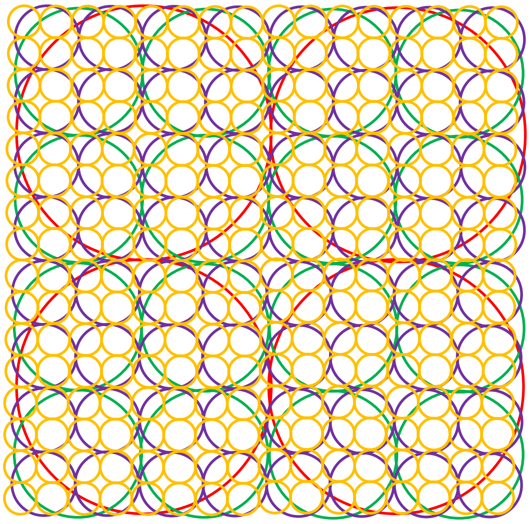
Rys. 31, Etap 1 konstrukcji fraktala nr 3



Rys. 32, Etap 2 konstrukcji fraktala nr 3

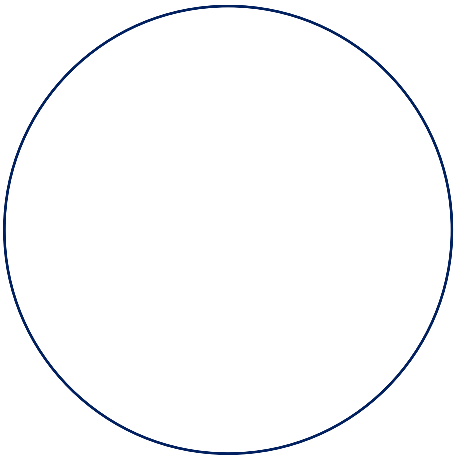


Rys. 33, Etap 3 konstrukcji fraktala nr 3

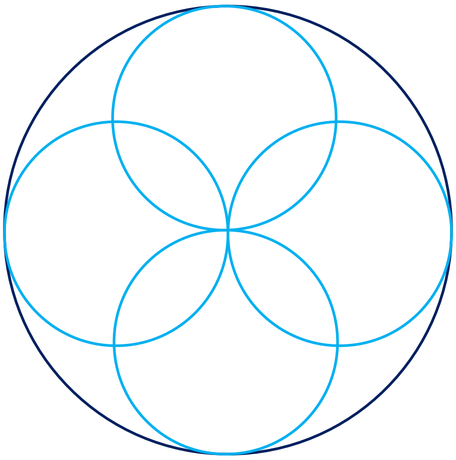


Rys. 34, Etap 4 konstrukcji fraktala nr 3

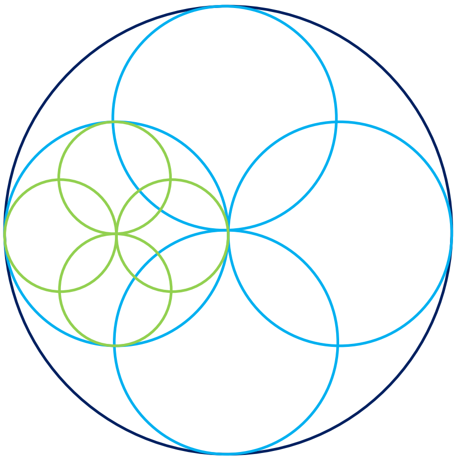
Fraktal nr 4 (na bazie okręgu)



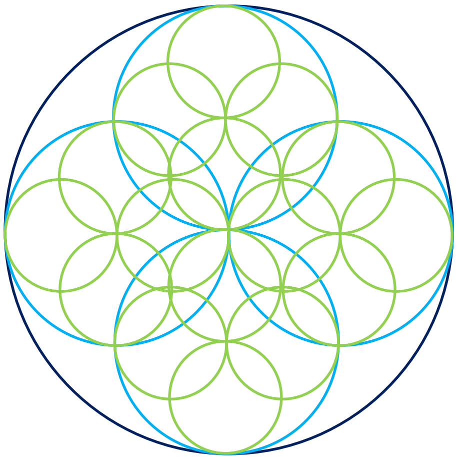
Rys. 35, Etap 1 konstrukcji fraktala nr 4



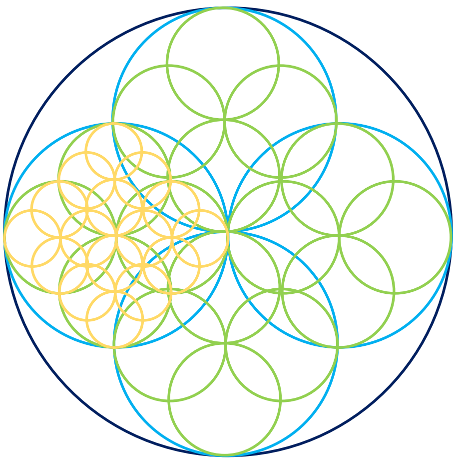
Rys. 36, Etap 2 konstrukcji fraktala nr 4



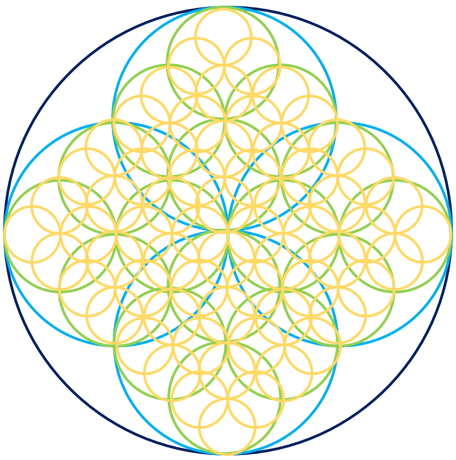
Rys. 40, Etap 3 konstrukcji fraktala nr 4



Rys. 38, Etap 4 konstrukcji fraktala nr 4

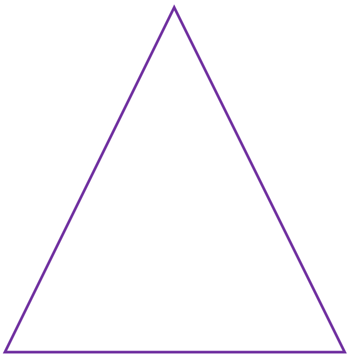


Rys. 39, Etap 5 konstrukcji fraktala nr 4

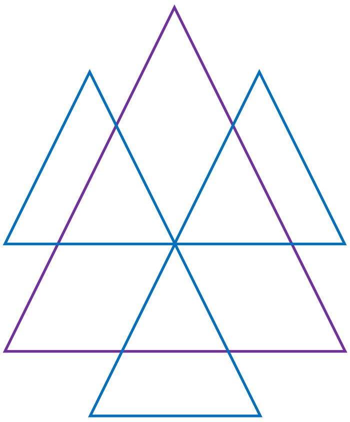


Rys. 37, Etap 6 konstrukcji fraktala nr 4

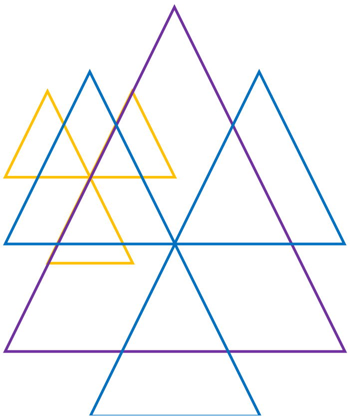
Fraktal nr 5 (na bazie trójkąta równoramiennego)



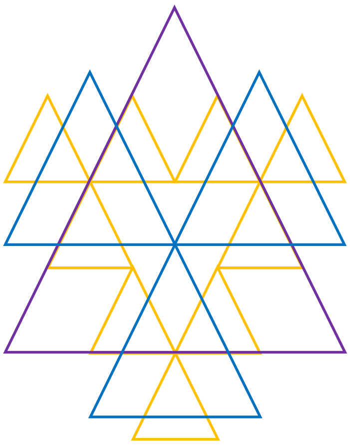
Rys. 46, Etap 1 konstrukcji fraktala nr 5



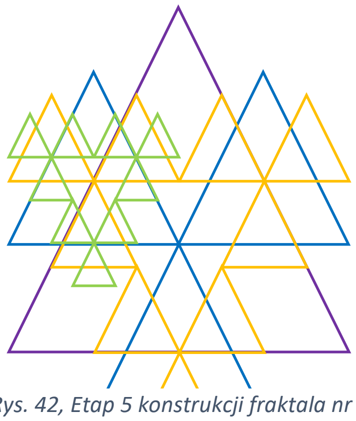
Rys. 45, Etap 2 konstrukcji fraktala nr 5



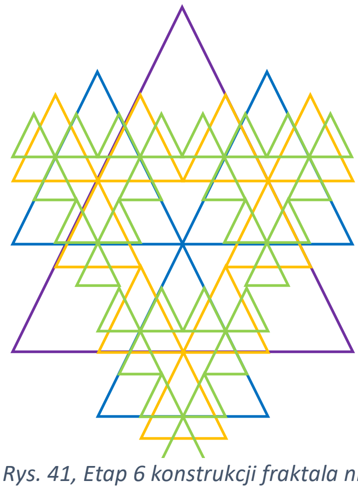
Rys. 44, Etap 3 konstrukcji fraktala nr 5



Rys. 43, Etap 4 konstrukcji fraktala nr 5

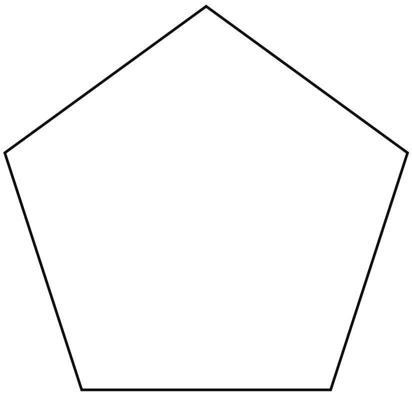


Rys. 42, Etap 5 konstrukcji fraktala nr 5

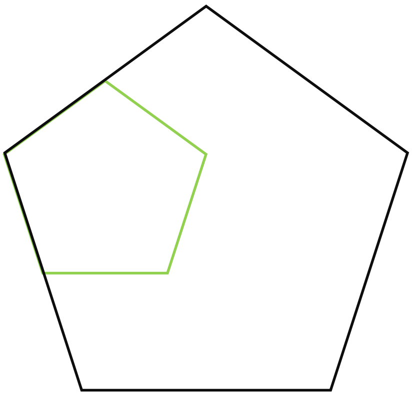


Rys. 41, Etap 6 konstrukcji fraktala nr 5

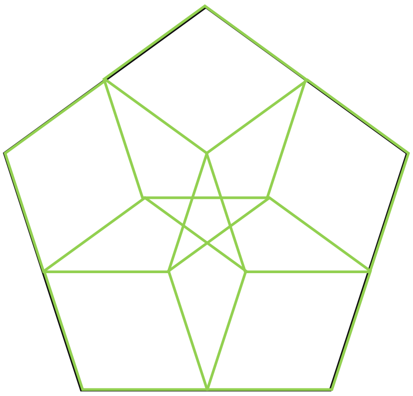
Fraktal nr 6 (na bazie pięciokąta foremnego)



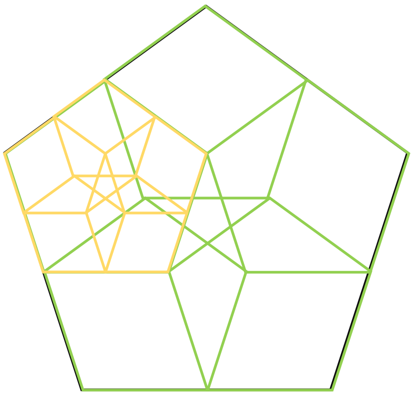
Rys. 47, Etap 1 konstrukcji fraktala nr 6



Rys. 48, Etap 2 konstrukcji fraktala nr 6



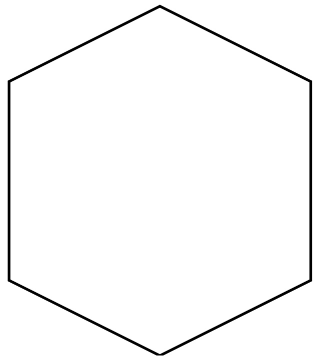
Rys. 49, Etap 3 konstrukcji fraktala nr 6



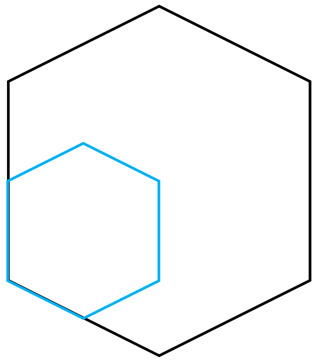
Rys. 50, Etap 4 konstrukcji fraktala nr 6

Rys. 51, Etap 5 konstrukcji fraktala nr 6

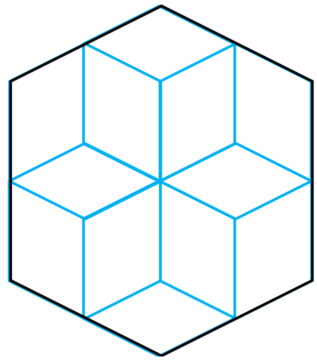
Fraktal nr 7 (na bazie sześciokąta foremnego)



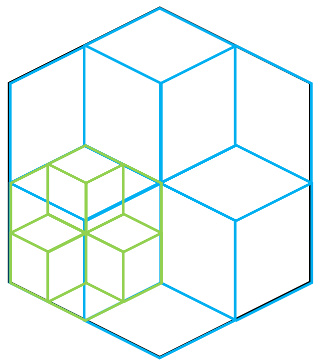
Rys. 52, Etap 1 konstrukcji fraktala nr 7



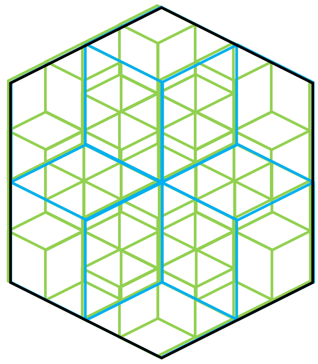
Rys. 53, Etap 2 konstrukcji fraktala nr 7



Rys. 54, Etap 3 konstrukcji fraktala nr 7

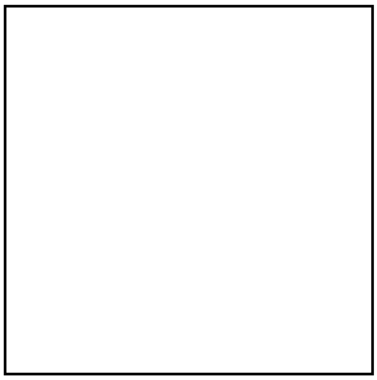


Rys. 55, Etap 4 konstrukcji fraktala nr 7

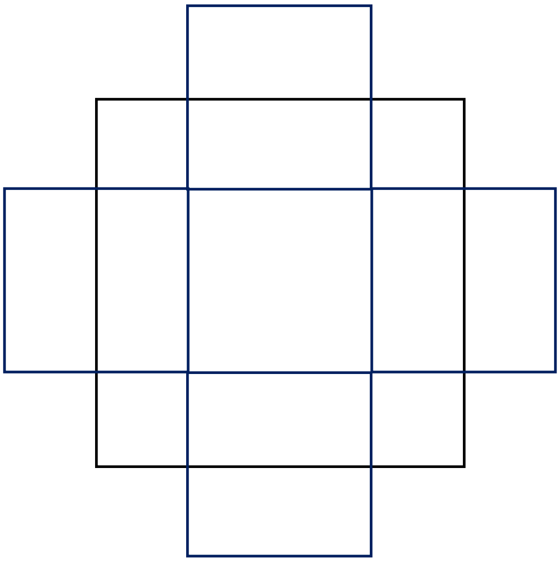


Rys. 56, Etap 5 konstrukcji fraktala nr 7

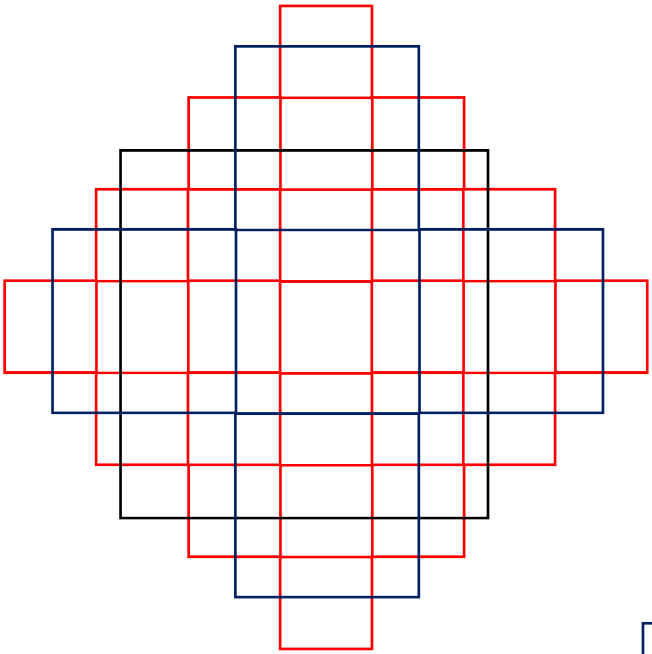
Fraktal nr 8 (na bazie kwadratu)



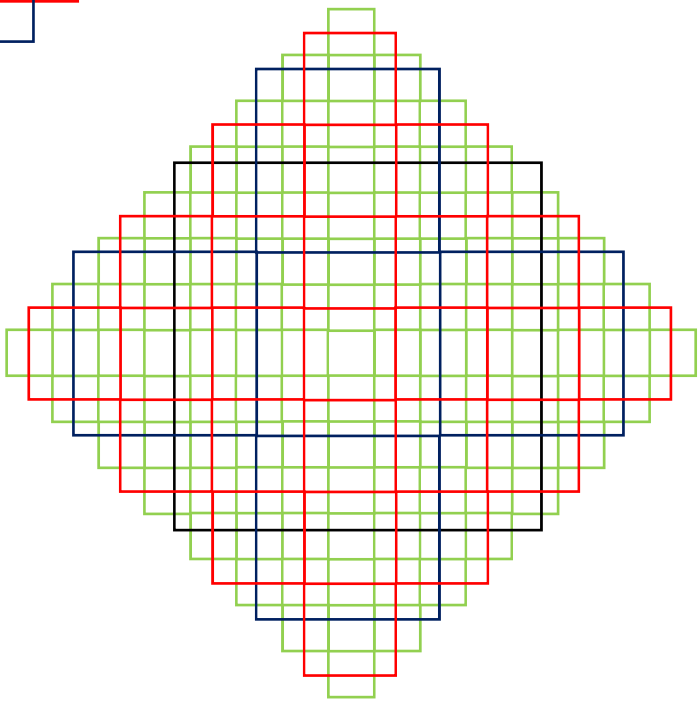
Rys. 57, Etap 1 konstrukcji fraktala nr 8



Rys. 58, Etap 2 konstrukcji fraktala nr 8



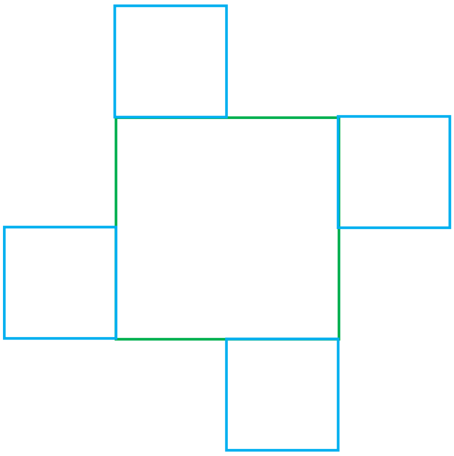
Rys. 59, Etap 3 konstrukcji fraktala nr 8



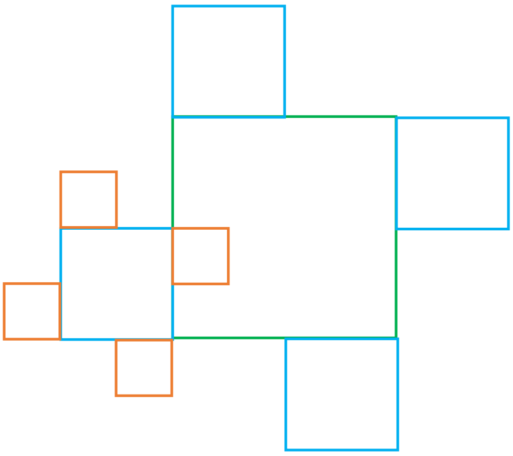
Rys. 60, Etap 4 konstrukcji fraktala nr 8

Fraktal nr 9 (na bazie kwadratu)

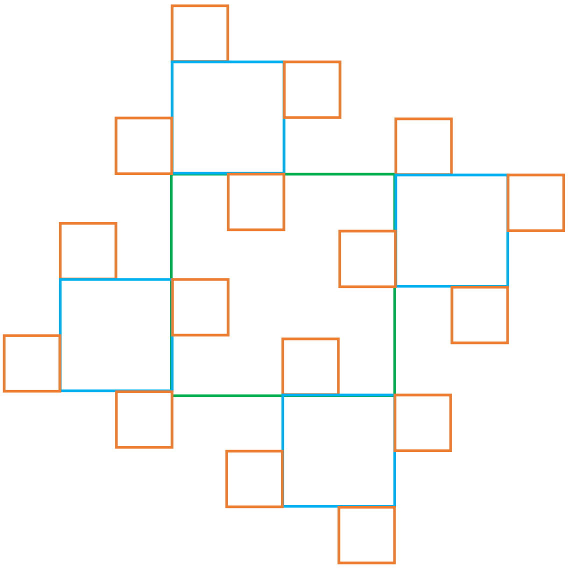
Rys. 62, Etap 1 konstrukcji fraktala nr 9



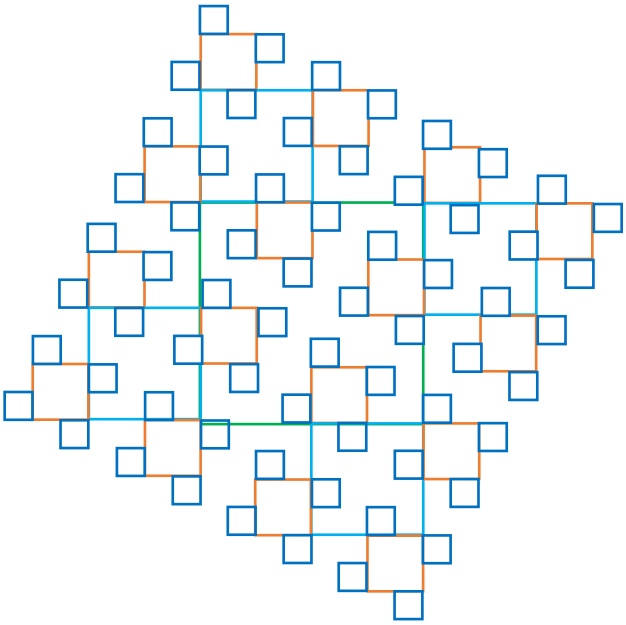
Rys. 61, Etap 2 konstrukcji fraktala nr 9



Rys. 63, Etap 3 konstrukcji fraktala nr 9



Rys. 64, Etap 4 konstrukcji fraktala nr 9



Rys. 65, Etap 5 konstrukcji fraktala nr 9

Podsumowanie

Fraktale to coś więcej niż tylko powtarzające się struktury. To piękno matematyki i natury.

W swojej pracy starałam się pokazać, że fraktale mogą stać się inspiracją do odkrywania piękna matematyki i świata. Niezwykła regularność i piękno czasami bywają ukryte w małych strukturach, które z pozoru codzienne okazują się być fascynujące.

Mam nadzieję, że moja praca stanie się inspiracją dla kolejnych odkrywców fraktali.

Wykaz ilustracji

Bibliografia

[1] https://www.matematyczny-swiat.pl

[2] https://zeszyty - naukowe.wwsi.edu.pl/zeszyty/zeszyt4/Fraktalne_Wokol_Nas_I_Kilka_Slow_O_Chaosie.pdf

[3] https://polskieradio24.pl/5/3/artykul/1441658,w-niezwykly-sposob-uhonorowano-polskiego-matematyka

[4] http://www.math.uni.wroc.pl/~elakalin/Prezentacja%20fraktale.pdf

[5] https://krakow.wyborcza.pl/krakow/7,44425,24846373,uczniowie-ulozyli-na-bloniach-najslynniejszy-fraktal-zywy.html

[6] https://minut.polsl.pl/articles/A-21- 007.pdf

[7] https://pl.wikipedia.org

[8] https://www.sienkiewicz.czest.pl/dokumenty/ss_kotlarczyk/fraktale%20prezentacja.pdf

[9] https://papertherapy.pl/plakat-lisc-paproci-ii

[10] https://e-agrotechnika.pl/storage/2022/06/AdobeStock_211310889Cirrocumulus-scaled.jpeg