

„Górskie Wędrówki Matematyczne”



Maja Wastag

Klasa 6A

Mateusz Wastag

Klasa 4A

Szkoła Podstawowa Zakonu Księży Pijarów im. ks. Stanisława Konarskiego
w Krakowie

Kraków, 2023 r.

Spis treści

Wstęp

1. Matematyczna wędrówka po mapie

1.1 Skala liczbowa

1.2 Skala mianowana

1.3 Skala liczbowa

1.4 Skala polowa, hektar, morga i inne jednostki miar

1.5 Obliczanie spadku terenu

1.6 Prędkość, czas, odległość.

2. Współrzędne geograficzne

3. Wycieczki po maksimach i minimach

4. Zagadnienie czterech barw

5. Podsumowanie: Średnia arytmetyczna

Wstęp

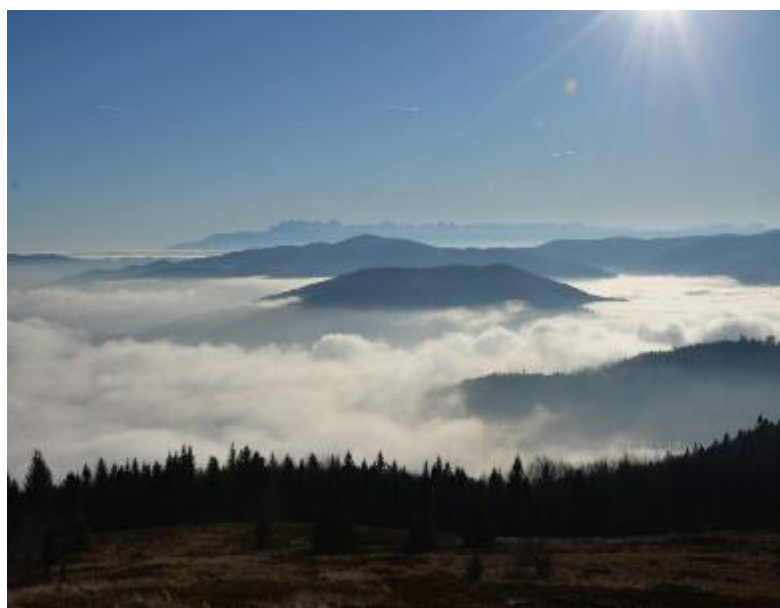
Pomysł na pracę matematyczną zrodził się w naszych głowach podczas pieszych wędrówek, które zajmują nam bardzo dużo czasu. W każdej wolnej chwili całą rodziną przemierzamy nasze piękne góry wzdłuż i wszerz. Jak na nasz wiek myślimy, że mamy duże osiągnięcia. Jednym z nich jest zdobycie korony Beskidu Wyspowego, na którą składa się 40 szczytów.

W naszej pracy zatytułowanej „**Górskie wędrówki Matematyczne**” chcemy znaleźć i pokazać powiązania pomiędzy pieszymi wędrówkami górskimi a matematyką, czyli krótko mówiąc między geografią a matematyką.

Matematyka to nauka dostarczająca narzędzi do otrzymywania ścisłych wniosków z przyjętych założeń. Ponieważ ścisłe założenia mogą dotyczyć najróżniejszych dziedzin myśli ludzkiej, a muszą być czynione w naukach ścisłych, technice, a nawet w naukach humanistycznych, zakres matematyki jest szeroki i stale się powiększa.

Geografia to natomiast nauka zajmująca się badaniem powłoki ziemskiej, jej zróżnicowaniem przestrzennym pod względem przyrodniczym i społeczno-gospodarczym, a także powiązaniami pomiędzy środowiskiem przyrodniczym, a działalnością społeczeństw ludzkich.

Na pierwszy rzut oka te dwie nauki to dwie odmienne dziedziny. Jest to tylko złudne wrażenie. W rzeczywistości są one ze sobą ściśle powiązane. W tej pracy chcielibyśmy to pokazać.



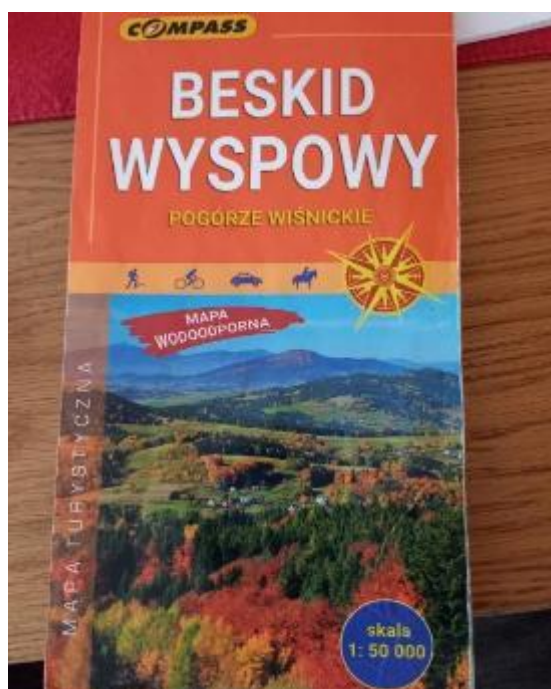
1 . Matematyczna wędrówka po mapie

W plecaku każdego turysty wędrującego po szlakach górskich powinna znaleźć się mapa. Zawiera ona bardzo wiele informacji potrzebnych do wędrówki. Dzięki niej trafimy do celu, możemy zlokalizować swoje miejsce w terenie, ocenić jak długi jest szlak, ile czasu potrzebujemy na przejście danego odcinka. Jednak żeby dobrze odczytać mapę należy wiedzieć jak ona powstaje i z czego wynikają liczby, odcinki i informacje, które są w niej zawarte.

Mapa¹ (z łac. Mappa – obrus) – graficzny obraz powierzchni Ziemi lub jej części, wykonywany na płaszczyźnie, w skali, według zasad odwzorowania kartograficznego , przy użyciu umownych znaków graficznych.

Do matematycznej interpretacji danych na mapie będziemy korzystać z mapy, która była naszym nierozłącznym towarzyszem podróży. Była to mapa Beskidu Wyspowego wydawnictwa Compass.

1.1 Skala Liczbowa



Już na pierwszej stronie widzimy pierwszą informację na mapie w niebieskim kółeczku jest napisane skala 1: 50000.

Jest to tzw. skala liczbowa.

Skala liczbowa² informuje o stosunku zmniejszenia teoretycznego modelu ziemi do rzeczywistej jej wielkości, będącej modelem dla którego opracowano odwzorowanie, w którym wykonano daną mapę.

Skala liczbowa przedstawiana zawsze jest w cm, lecz nie podaje się miana tak jak w przypadku naszej mapy 1:50000.

¹ <https://pl.wikipedia.org/wiki/Mapa>

² https://pl.wikipedia.org/wiki/Skala_liczbowa

Należy to rozumieć w następujący sposób :

1 cm na mapie odpowiada 50 000 cm w rzeczywistości. Dopuszczalne zapisy skali to :

1: 50 000

1 – 50 000

Można też ją zapisać w postaci ułamka :

$$\frac{1}{500000}$$

Przy zapisie skali nie wolno stosować znaku „=” jest to błąd rzeczowy.

1.2 Skala mianowana

Skala mianowana³ - skala mapy zapisywana jako porównanie dwóch odległości, przy czym pierwsza to odcinek na mapie, a druga – odpowiadający odcinek w terenie (wyrażony zazwyczaj w metrach lub kilometrach). Zapisuje się ją jako przyporządkowanie dwóch liczb, oznaczających jednostki długości .

Skala mianowana polega na tym, że obie części skali muszą mieć miana. Należy pamiętać o tym , że :

$$1\text{m} = 100\text{ cm}$$

$$1\text{ km} = 1000\text{m} = 10\,000\text{ cm}$$

Wiedząc o tym przeliczamy (a więc wykorzystujemy matematykę) skalę liczbową naszej mapy czyli 1 : 50 000 na skalę mianowaną .

Skala mianowana naszej mapy to:

$$1\text{ cm} : 500\text{ m} \text{ (bo jeżeli } 1\text{m} = 100\text{ cm to } 50000\text{ cm} = 500\text{ m) }$$

$$1\text{cm} : 0,5\text{ km} \text{ (bo jeżeli } 1\text{ km} = 1000\text{ m to } 500\text{ m} = 0,5\text{ km) }$$

³ https://pl.wikipedia.org/wiki/Skala_mianowana

Poniżej na podstawie naszej mapy obliczymy w skali długość odcinka szlaku czerwonego z **Kasiny Wielkiej** na szczyt **Lubogoszcz**.



Na mapie mamy informację, że odcinek ten ma 2,4 km (wskazany strzałką).

Spróbujmy teraz na podstawie powyższych informacji na temat skali obliczyć jaką długość będzie miał ten odcinek na naszej mapie:

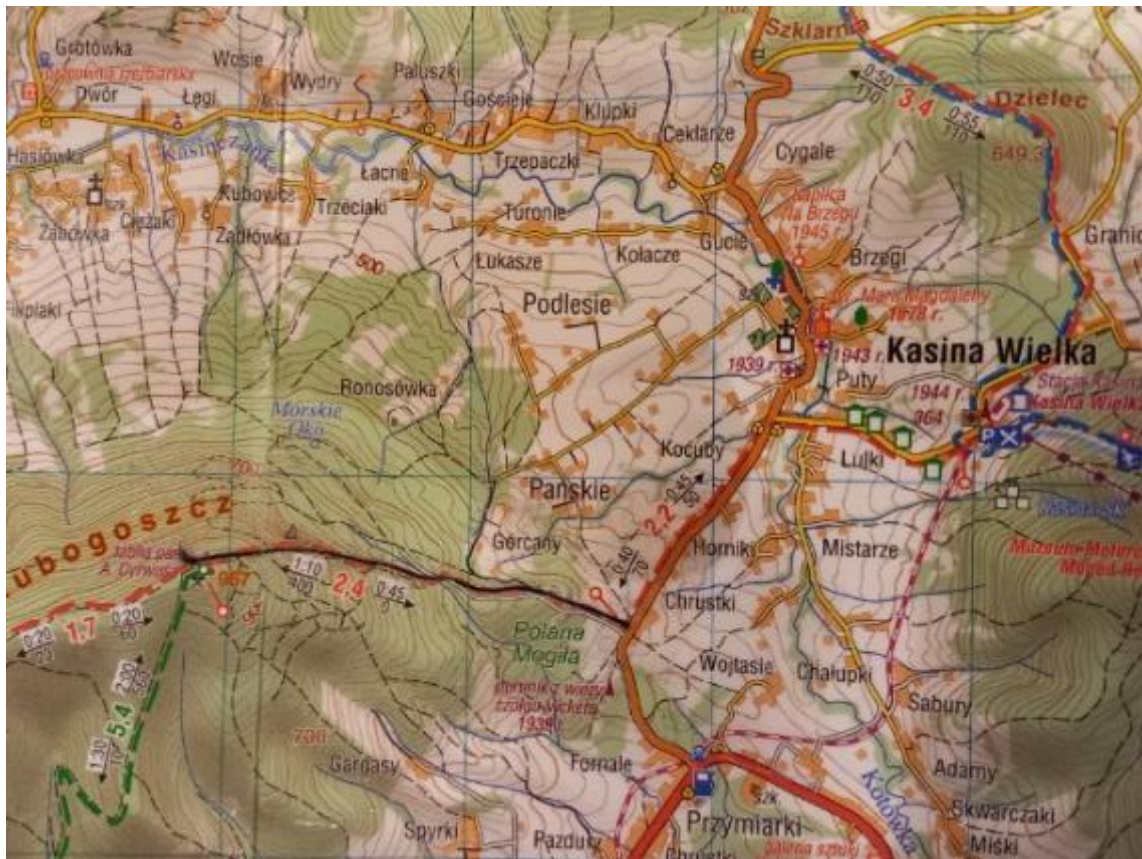
$$1 \text{ cm} - 0,5 \text{ km}$$

$$X - 2,4 \text{ km}$$

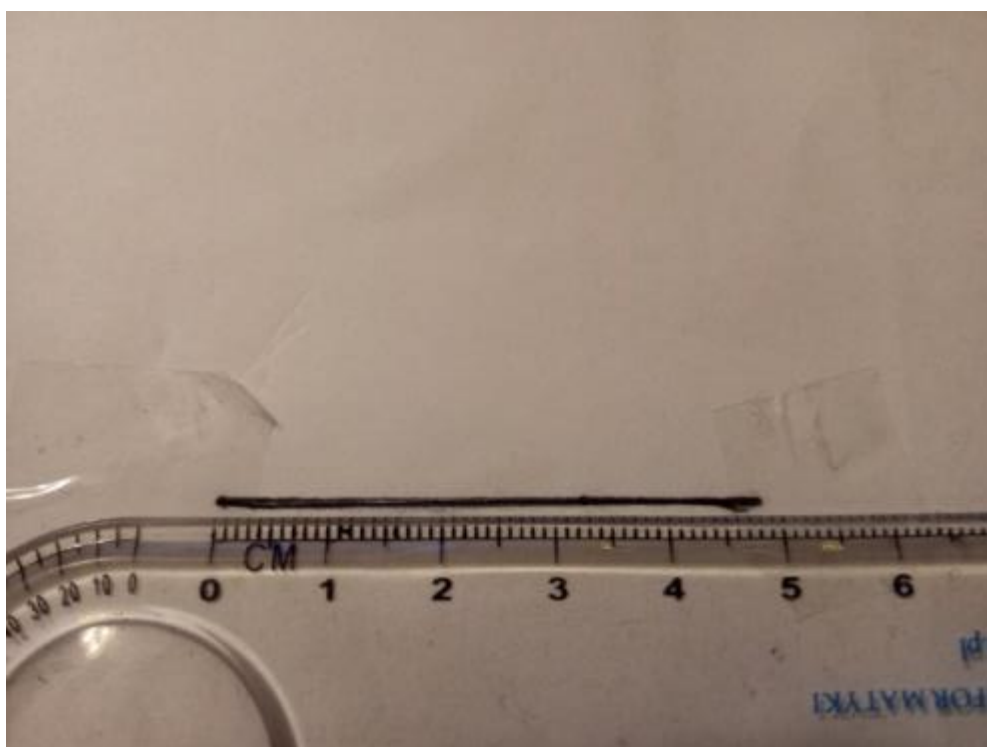
$$x = \frac{1 [\text{cm}] * 2,4 [\text{km}]}{0,5 [\text{km}]} = 2,4 * 2 = 4,8 \text{ cm}$$

Z otrzymanej proporcji wynika, że odcinek na mapie powinien mieć długość **4,8 cm**.

Próbujemy na początku zmierzyć to linijką na mapie. Ciężko to dokładnie zmierzyć, gdyż nie jest to „prosty odcinek”. Aby sprawdzić użyjemy czarnej nitki - rozłożymy ją od początkowego oraz końcowego punktu tej trasy oraz poprowadzimy po krzywej, którą tworzy trasa szlaku.



Następnie rozkładamy nitkę i mierzymy ją linijką. Z naszych obserwacji wynika, że długość rozłożonej nitki jest równa naszym obliczeniom, czyli wynosi **4,8 cm**, a więc wszystko się zgadza.



Odcinek tej trasy gwarantuje wspaniałe widoki poniżej zdjęcie z jego części.



1.3 Skala liniowa

Skala liniowa to rysunkowy obraz skali. Najlepiej tworzyć ją ze skali mianowanej. Rysujemy oś i zaznaczamy odcinki co 1 cm .

Zasady skali liniowej:

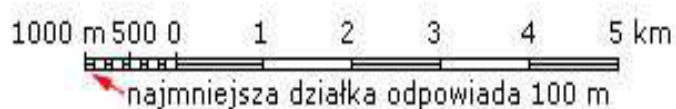
- kreski muszą się znajdować tylko nad osią
- opisujemy ją tylko u góry
- miano (m lub km) piszemy tylko na końcu skali liniowej

Skala liniowa naszej mapy będzie wyglądała jak poniżej:

Skala liczbowa

1 : 50000

Podziałka liniowa



1.4 Skala Polowa. Stare jednostki miary.

Skala polowa służy do przeliczania pól powierzchni. Zawsze, jeżeli w treści zadania pojawia się jakieś pojęcie związane z powierzchnią (np. obszar lasu, polany itp.) należy użyć tej skali . Skalę polową tworzy się poprzez podniesienie skali mianowanej do kwadratu (każdy element tej skali).

I tak przeliczenie skali mianowanej na skalę polową naszej mapy wygląda w następujący sposób:

1cm - 500 m to skala polowa wynosi 1 cm² – 250000 m²

1 cm - 0,5 km to skala polowa wynosi 1 cm² – 0,25 km²

Spróbujmy teraz określić ile w rzeczywistości ma obszar, który zaznaczamy na naszej mapie. Prostymi odcinkami łączymy 4 szczyty: Ćwilin, Łopień, Mogielica oraz Jasień. Pod każdym szczytem występują piękne polany:

Ćwilin – Polana Mohurowa :



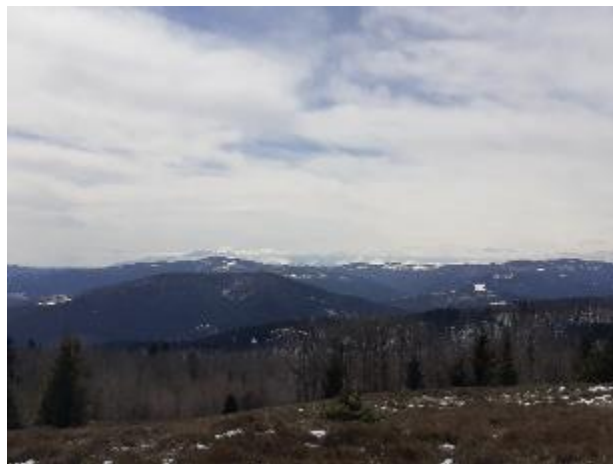
Łopień – Polana Jaworze,



Jasień - Kutrzyca - Polana Skalne,



Mogielica – Polana Stumorgowa,

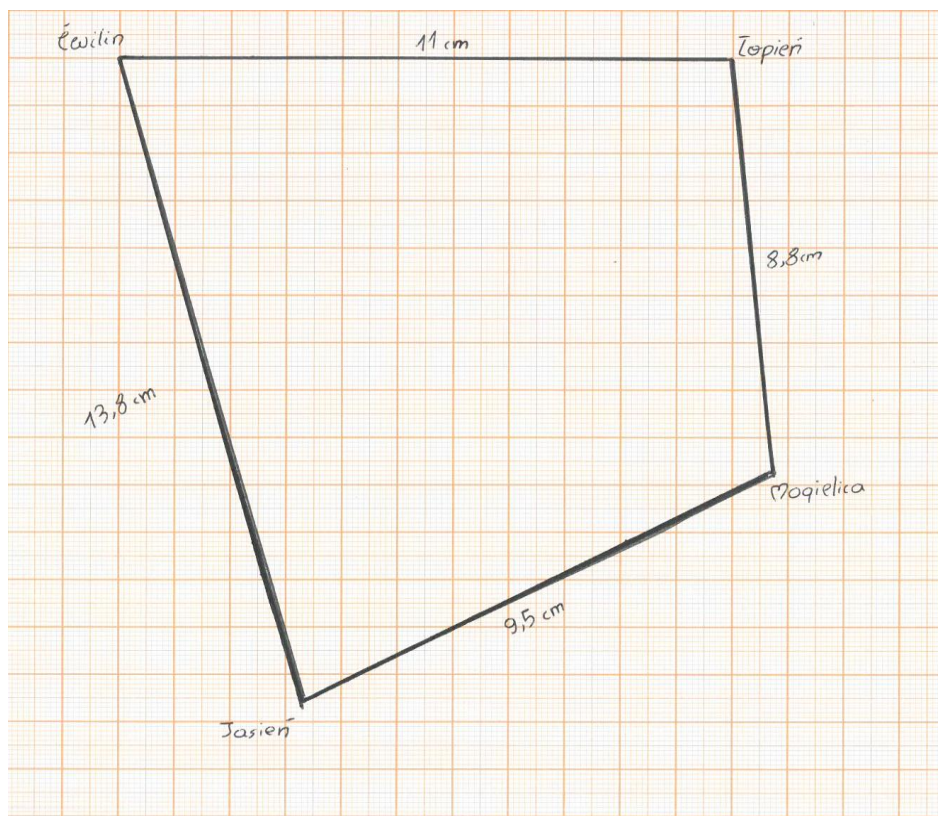


Można z nich podziwiać piękne widoki. Zaznaczony obszar jest według nas najbardziej atrakcyjnym terenem Beskidu Wyspowego. Warto się tam wybrać o każdej porze roku.

Poniżej narysowany przez nas obszar:



Nasza powierzchnia to czworokąt wypukły nieregularny. Aby lepiej to zobrazować rysujemy poniżej naszą powierzchnię z zachowaniem długości odcinków (mierzone linijką) oraz kątów (mierzone kątomierzem) na papierze milimetrowym.



Wierzchołki naszego czworokąta oznaczamy od nazw szczytów : $\acute{C}$, $\acute{L}$, M , J .

Ponieważ poprowadziliśmy odcinki to długości ich mierzymy linijką. I tak :

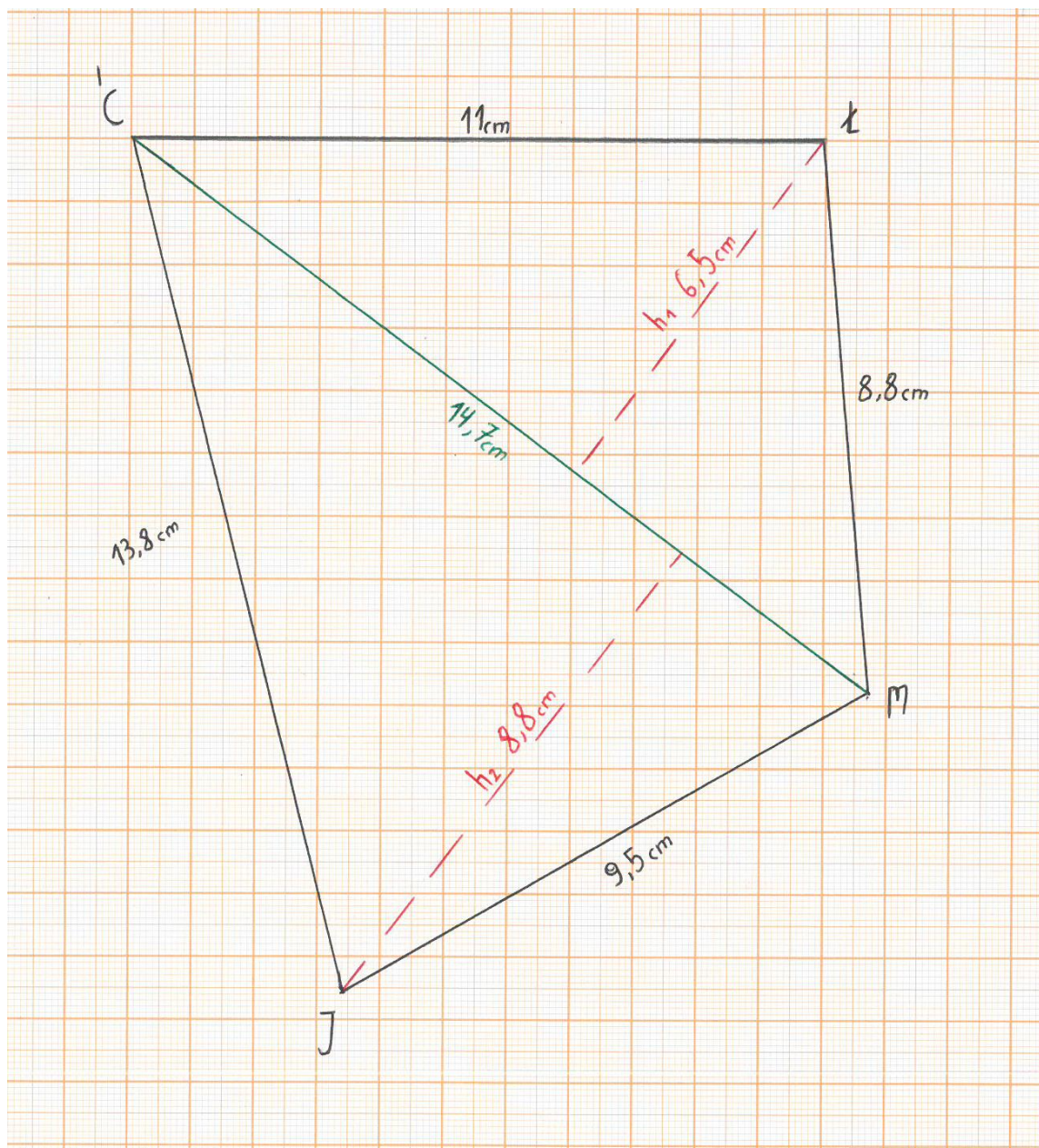
Odcinek $|\acute{C}\acute{L}| = 11 \text{ cm}$

Odcinek $|\acute{L}M| = 8,8 \text{ cm}$

Odcinek $|JM| = 9,5 \text{ cm}$

Odcinek $|J\acute{C}| = 13,8 \text{ cm}$

Następnie dzielimy nasz prostokąt na dwie części i powstaje figura złożona z dwóch trójkątów.



Podstawa tych trójkątów to odcinek $|\acute{C}M| = 14,7$ cm.

Pole naszego czworokąta obliczamy jako sumę pól trójkątów, na jakie został on przez nas podzielony. Aby obliczyć pole naszych trójkątów potrzebujemy jeszcze wysokości naszych trójkątów. Nie jest to trudna operacja - rysujemy je pod kątem prostym od wspólnej podstawy naszych trójkątów z wierzchołka Ł oraz wierzchołka J .

Powstałe odcinki to wysokości naszych trójkątów:

h_1 to wysokość trójkąta $\acute{C}\acute{L}M$ i równa jest 6,5 cm

h_2 to wysokość trójkąta $\acute{C}MJ$ i równa jest 8,8 cm.

Mamy już wszystkie dane aby obliczyć powierzchnię naszej figury. Obliczamy pole trójkąta $\acute{C}\acute{L}M$:

$$P_{\acute{C}\acute{L}M} = \frac{1}{2} * |\acute{C}M| * h_1$$

$$P_{\acute{C}\acute{L}M} = \frac{1}{2} * |14,7| * 6,5$$

$$P_{\acute{C}\acute{L}M} = 47,77 \text{ cm}^2$$

Obliczamy pole trójkąta $\acute{C}\acute{L}J$:

$$P_{\acute{C}\acute{L}J} = \frac{1}{2} * |\acute{C}M| * h_2$$

$$P_{\acute{C}\acute{L}J} = \frac{1}{2} * 14,7 \text{ cm} * 8,8 \text{ cm}$$

$$P_{\acute{C}\acute{L}J} = 112,45 \text{ cm}^2$$

Pole naszego czworokąta jest równe sumie dwóch uzyskanych pól tak więc : $47,77 \text{ cm}^2 + 112,45 \text{ cm}^2$

Pole naszego czworokąta = $112,45 \text{ cm}^2$

Możemy teraz obliczyć ile powierzchnia naszego czworokąta wynosi w rzeczywistości .

1cm - 500 m to skala polowa wynosi $1 \text{ cm}^2 - 250000 \text{ m}^2$

1 cm - 0,5 km to skala polowa wynosi $1 \text{ cm}^2 - 0,25 \text{ km}^2$

Układamy proporcję

$$\begin{aligned} X &- 112,45 \text{ cm}^2 \\ 0,25 \text{ km}^2 &- 1 \text{ cm}^2 \\ X &= \frac{0,25 [\text{km}^2] * 112,45 [\text{cm}^2]}{1 [\text{cm}^2]} \\ X &= 28,11 \text{ km}^2 \end{aligned}$$

Pole naszego obszaru wynosi 28,11 km²

Możemy nasz obszar wyrazić w hektarach. Jest to jednostka powszechnie stosowana przy określaniu miar powierzchni. Nazwa składa się z dwóch członów: greckiego przedrostka „hekto” oznaczającego 100 oraz „ar”, oznaczającego pole kwadratu o boku równym 10 metrom. Jak zatem łatwo się domyśleć , hektar oznacza 100 arów , czyli pole powierzchni kwadratu którego bok jest równy 100 metrom⁴

Wiemy że :

$$1 \text{ ha} = 10000 \text{ m}^2$$

Nasz obszar wykazaliśmy w km² więc musimy wyrazić miarę 1 ha w km²

$$1 \text{ ha} = 0,01 \text{ km}^2$$

Mając te dane korzystając z proporcji :

$$\begin{aligned} 1 \text{ ha} &- 0,01 \text{ km}^2 \\ X \text{ ha} &- 28,11 \text{ km}^2 \\ X &= \frac{28,11 [\text{km}^2] * 1 \text{ ha}}{0,01 [\text{km}^2]} \end{aligned}$$

Pole naszego obszaru wyrażone w hektarach wynosi 2811 ha.

⁴ <https://pl.wikipedia.org/wiki/Hektar>

Pozostaniemy jeszcze przy jednostkach odnosząc się do wymienionej wyżej Polany Stumorgowej. Mianowicie nazwa tej polany pochodzi od dawnej jednostki miary jakim był morg.

Morga to obszar rolny jaki dało się skosić lub zaorać jedno-lemieszowym pługiem ciągniętym



przez konia lub woła w ciągu jednego ranka (przedpołudnia). Na ziemiach Polski morga była dzienną jednostką pracy chłopu u swego dziedzica i wynosiła ona 0,56ha⁵.

Jeżeli nasze pole wyrazimy w morgach to wynosiło by ono 5019

morgów. Polana Stumorgowa kiedyś pewnie miała powierzchnię stu morgów czyli 560 ha.

Skoro już jesteśmy przy starych jednostkach ciekawe jak poradziłibyśmy sobie gdyby ktoś dla zabawy zaczął posługiwać się starymi jednostkami ☺

Na podstawie poniższego zadania określmy ile miały niektóre miary polskie w XIX wieku.

Właściciel schroniska zatrudnił czterech zbieraczy jagód którzy przez 30 dni mieli zebrać dla niego 1 Łaszt jagód . Aby osiągnąć cel każdego dnia razem musieli zebrać 1 korzec jagód a każdy z nich musiał zebrać ćwierć korca owoców co stanowiło 8 garnców które każdy z nich posiadał ze sobą.

Z powyższych informacji wynika że:

1 Łaszt = 30 Korcy

1Korzec = 4 Ćwierci

1 Ćwierć = 8 Garnców

Z otrzymanych owoców gospodarz robił pierogi oraz sok z borówek.

⁵ <https://pl.wikipedia.org/wiki/Morga>

Pierogi były serwowane na dwa sposoby : można było kupić kopę pierogów lub tuzin pierogów. Ilość pierogów w kopie była pięć razy większa niż tuzin pierogów. W jeden dzień sprzedawało się 5 porcji kop pierogów i 10 porcji tuzinowych łącznie było to 420 sztuk pierogów.

Z powyższych informacji wynika, że:

$$1\text{Kopa} = 5 \text{ Tuzinów}$$

$$5\text{Kop} + 10 \text{ Tuzinów} = 420 \text{ sztuk}$$

Powstało nam równanie z dwoma niewiadomymi które łatwo rozwiązać:

$$5 \text{ Kop} + 2 \text{ Kopa} = 420 \text{ sztuk}$$

$$7 \text{ Kop} = 420 \text{ sztuk}$$

$$\mathbf{1 \text{ Kopa} = 60 \text{ sztuk}}$$

$$60 \text{ sztuk} = 5 \text{ Tuzinów}$$

$$\mathbf{\text{Tuzin} = 12 \text{ sztuk}}$$

Sok z borówek wytłaczany był w beczce. Soki rozlewane były do garncy aby opróżnić całą beczkę potrzeba było 25 garncy . Soki były sprzedawane tylko w kwartach lub kwaterkach. 8 osobowa wycieczka zamówiła 1 garniec soku aby każdy mógł się napić dostali 3 kwarty i 4 kwaterki które stanowiły 1 kwartę. Po napełnieniu wszystkich naczyń w garniec był pusty.

Z powyższych informacji wynika:

$$1 \text{ beczka} = 25 \text{ garncy}$$

$$1 \text{ Garniec} = 3\text{kwarty} + 4 \text{ kwaterki}$$

$$4 \text{ kwaterki} = 1 \text{ Kwarta}$$

Miara jednej kwaterki przyjmowała wartość 0,236 l tak więc kwarta 0,942 l , Garniec był równy 3,769 a beczka miała objętość 271,36 l.

1.5 Obliczanie spadku terenu

Spadek terenu to nachylenie jakiejś płaszczyzny w stosunku do poziomu. Obliczenie spadku terenu jest bardzo proste. Sprowadza się do wykorzystania jednego wzoru:

Wzór na spadek to:

$$S = \frac{h_{max} - h_{min}}{d [m]}$$

Gdzie $h_{max} - h_{min}$ to różnica w metrach a d to odległość między punktami w metrach

Jeżeli chcemy wynik podać w procentach to korzystamy ze wzoru

$$S = \frac{h_{max} - h_{min}}{d [m]} * 100\%$$

Na ogół zadania tego typu dotyczą mapy topograficznej. Należy np. obliczyć spadek terenu jaki pokonuje kolejka linowa lub spadek rzeki od jakiegoś punktu (źródło, most) po ujście. Najpierw musimy odczytać wysokości bezwzględne tych dwóch punktów z mapy i wtedy otrzymamy h_{max} (punkt położony wyżej) i h_{min} (punkt położony niżej). Następnie należy zmierzyć odległość między punktami na mapie (np. linijką) a wynik (d) tego mierzenia przeliczyć w skali mapy i zapisać w metrach⁶.

⁶ <http://www.pkulczycki.wodip.opole.pl/>

Mając te informacje spróbujemy obliczyć spadek terenu jaki pokonuje kolejka wyciągu krzesełkowego w **Kasinie Wielkiej** na stok **Śnieżnicy**.



Fragment mapy w skali 1: 50 000

a) Różnica wysokości jaką pokonuje kolejka dane te odczytujemy z mapy .

$$h_{\max} = 902 \text{ m}$$

$$h_{\min} = 610 \text{ m}$$

$$h_{\max} - h_{\min} = 902 \text{ m n.p.m.} - 610 \text{ m n.p.m.} = 292 \text{ m}$$

b) Długość kolejki wyliczymy na podstawie mapy posiadamy mapę w skali 1 do 50000, a więc z tego wynika że 1cm na mapie odpowiada 500 metrom w rzeczywistości czyli 0,5 km.

Długość kolejki na mapie zmierzona linijką to 2,2 cm z podanych danych układamy proporcję

$$1 \text{ cm} \text{ --- } 500 \text{ m} = 0,5 \text{ km}$$

$$2,2 \text{ cm} \text{ --- } d$$

$$d = \frac{2,2 \text{ cm} \cdot 500 \text{ m}}{1 \text{ [cm]}} = 1100 \text{ m}$$

Mamy już wszystkie dane aby obliczyć spadek terenu jaki pokonuje nasza kolejka pod szczytem Śnieżnica

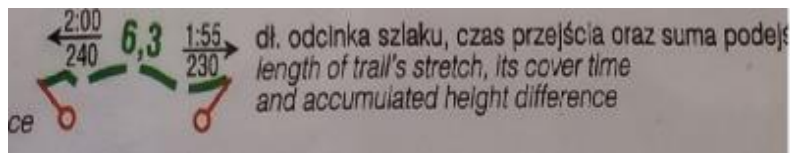
$$S = \frac{292 \text{ [m]}}{1100 \text{ [m]}} * 100\% = 26,54 \%$$

Poniżej widok ze Śnieżnicy:



1.6 Prędkość, czas, odległość

Na naszej mapie znajdziemy jeszcze informację, w których występują liczby jak poniżej



Zielona wartość 6,3 to jak wiemy długość odcinka z punktu A do punktu B wyrażona w kilometrach, po prawej i po lewej stronie tej wartości występują strzałki z wartościami nad strzałką i pod strzałką.

Górna wartość to przewidywany czas przejścia danego odcinka, a dolna wartość to suma podejść na danym odcinku (ulubione kryterium Naszego taty w doborze tras im większa suma podejść tym lepiej 😊) .

Przeanalizujemy trasę ze szczytu **Lubomir** na wierzchołek **Ciecien** .

Na mapie podzielona jest ona na dwa odcinki:



- pierwszy odcinek : **Lubomir – Wiśniowa** – długość odcinka 7,2 km, czas przejścia wg wskazań mapy to 1h 30 minut .

- drugi odcinek : **Wiśniowa – Ciecień – długość odcinka 3,3 km , czas przejścia wg wskazań mapy to 1h 50 minut .**

Na pierwszy rzut możemy się zdziwić dlaczego czasy przejść pomiędzy tymi odcinkami nie różnią się od siebie zbyt wiele mimo, że odległość jest większa o ponad dwa razy.

Wynika to z przewyższeń w terenie jakie musimy pokonać i tak na pierwszym odcinku droga prowadzi cały czas w dół natomiast na drugim odcinku suma przewyższeń wynosi 460 m i stąd wynika ta różnica.

Mając dane z mapy o długości odcinka i przewidywany czas przejścia możemy obliczyć z jaką prędkością należy iść według naszej mapy.

$$V_{\text{odcinek 1}} = \frac{d [km]}{t [h]} = \frac{7,2 [km]}{1h30min} = \frac{7,2km}{1,5h} = 4,8 \frac{km}{h}$$

$$V_{\text{odcinek 2}} = \frac{d [km]}{t [h]} = \frac{3,3[km]}{1h50min} = \frac{3,3km}{\frac{11}{6}h} = 1,8 \frac{km}{h}$$

$$V_{\text{śr}} = \frac{d [km]}{t [h]} = \frac{10,5 [km]}{3h20min} = \frac{10,5km}{\frac{10}{3}h} = 3,15 \frac{km}{h}$$

Tak więc z otrzymanych wyników wiemy, że pierwszy odcinek pokonujemy z prędkością $4,8 \frac{km}{h}$, drugi o trzy kilometry mniej niż pierwszy, a średnia prędkość całego odcinka to $3,15 \frac{km}{h}$.

Czasy przejścia danego odcinka między mapą a np. informacjami umieszczonymi na szlakach mogą się różnić i tak wyżej opisany szlak z naszej mapy różni się od oznaczeń na szlaku zdjęcie poniżej



Czas przejścia wg PTTK Myślenice to 4 h a więc dłuższy niż na naszej mapie o 40 minut. A prędkość średnia to $2,6 \frac{km}{h}$.

Nie wiemy czy są przyjęte jakieś stałe wartości odnośnie prędkości i czasu przypuszczamy, że są one zawsze troszkę zawyżone być może to wynika z troski o bezpieczeństwo turystów.

Obliczanie czasu wędrówki.

Obliczmy ile czasu zajmie nam przejścia szlaku Naprawa - Luboń - Wielki – Naprawa zakładając, że będziemy szli ze średnią prędkością 3 km na godzinę i na każde 100 metrów wzniesienia potrzebujemy dodatkowych 10 minut. A na szczycie spędzimy 45 minut.

Wiemy, że trasa ma długość 15 km. Suma przewyższeń to 460 metrów.

Do obliczenia czasu wykorzystamy wzór na prędkość :

$V = \frac{d [km]}{t [h]}$ będziemy liczyć czas a więc przekształcamy nasze równanie i wartość czasu

będzie wyrażać się wzorem $t = \frac{d [km]}{V [\frac{km}{h}]}$

Podstawiamy nasze dane do wzoru :

$$t = \frac{15 [km]}{3 [\frac{km}{h}]} = 5h$$

Otrzymany czas przejścia tego szlaku to 5 h jednak bez postojów .

Do czasu przejścia należy dodać odpoczynki po wzniesieniu o 100 metrów i tak:

0-100 m – pierwszy odpoczynek

100 m -200 m- drugi odpoczynek

200 m - 300 m- trzeci odpoczynek

300 m - 400 m- 4 odpoczynek

400 m - 460 m- tutaj nie potrzebuje dodatkowych 10 minut bo jesteśmy już na szczycie i mamy zaplanowany 45 minutowy odpoczynek

A więc całkowity czas naszej wycieczki będzie sumą przejścia z sumami odpoczynku;

5h + 40 minut + 45 minut = 6h 25 minut.

Nie są to skomplikowane wyliczenia, ale warto przed planowaniem wycieczki przeanalizować takie dane i dobrze zaplanować wycieczki , tak aby zdążyć bezpiecznie przed zmrokiem zejść ze szlaku.

Podsumowując naszą wędrówkę po mapie możemy stwierdzić z pełnym przekonaniem że , bez matematyki nie da się poprawnie stworzyć a także wykorzystywać zawartych w mapie informacji. Bez matematyki nie jesteśmy w stanie czytać map. Dzięki matematyce na mapie możemy obliczyć długości szlaków, prędkości pokonania dystansu , oszacować czas przejścia danego odcinka , spadki, wysokości, powierzchnie można zaplanować podróż itp.

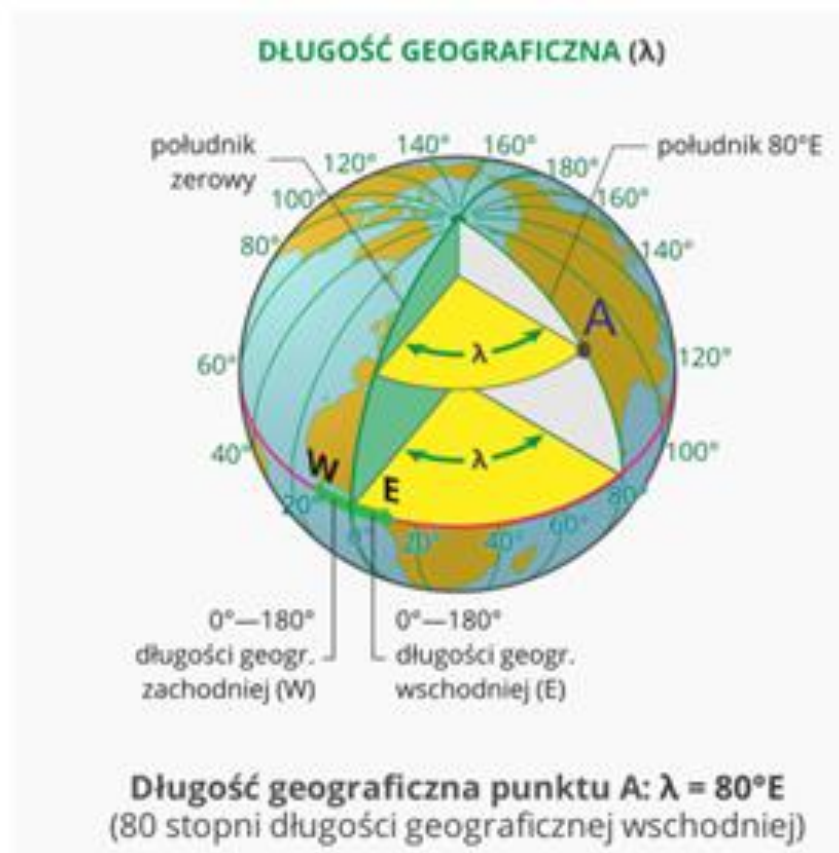
Można więc stwierdzić , że bez znajomości matematyki mapa dla nas była dla nas zupełnie nieprzydatna.

2. Współrzędne geograficzne

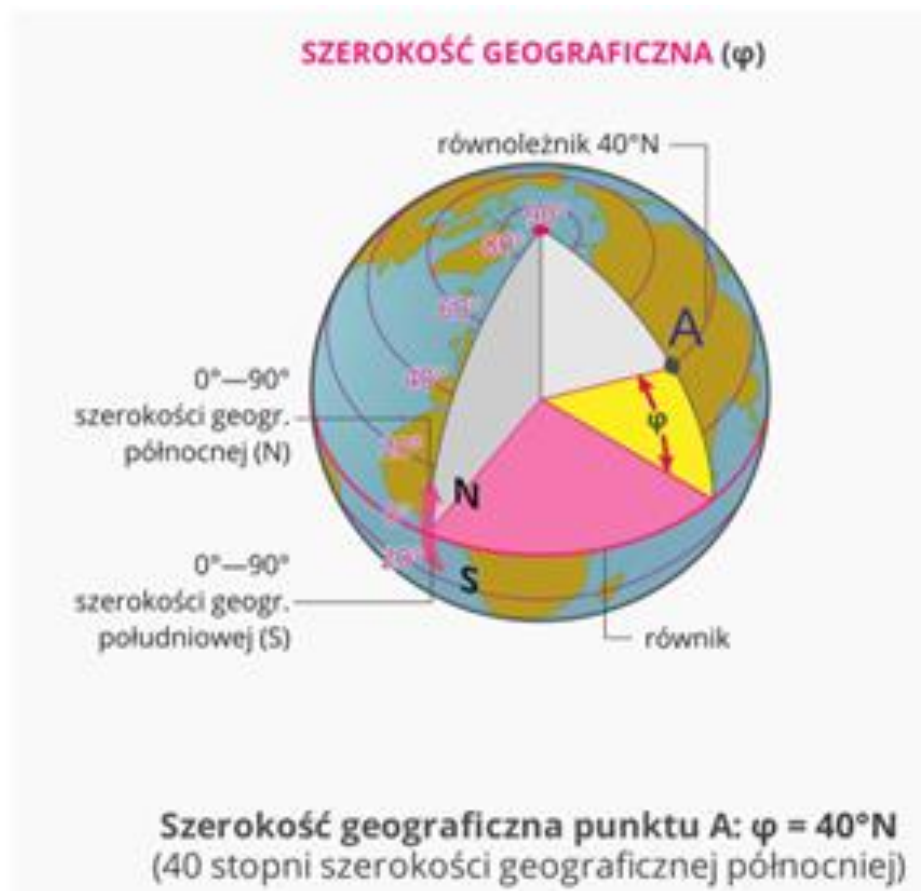
Określenie każdego punktu na Ziemi można przedstawić za pomocą **współrzędnych geograficznych**: są one niepowtarzalne i nie mogą się one powtórzyć. Czasami planując wyjście w góry szukając informacji podawane są właśnie współrzędne geograficzne szczególnie do początku miejsca od którego zaczynamy wędrówkę .

Do wyznaczenia współrzędnych geograficznych potrzebne są dwie informacje długość i szerokość geograficzna.

Długość geograficzną wyznacza kąt dwuścienny pomiędzy płaszczyzną południka zerowego (0°), a półpłaszczyzną południka przechodzącego przez dany punkt na powierzchni ziemi i wskazuje nam położenie punktu w kierunku wschód zachód.



Szerokość geograficzna to kąt między linią łączącą ten punkt ze środkiem Ziemi (czyli promieniem ziemskim), a płaszczyzną równika i wskazuje nam położenie punktu w kierunku północ południe.



Miarą, w jakiej podaje się długość i szerokość geograficzną, są **stopnie**. Jeden stopień (1°) dzieli się na **sześćdziesiąt minut** (60'), a jedna minuta (1') na **sześćdziesiąt sekund** (60").

Jeden stopień (1°) to ok 111,km wynika to z tego że długość południka jest równa 20000 tys. km a ponieważ południk zawiera się pomiędzy 0 stopniem a 180 stopniem to:

$$\begin{aligned} 20\,000\text{ km} : 180\text{ stopni} &= 111,1\text{ km} \\ 1\text{ stopień} &= 111,1\text{ km} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1\text{ stopień} &= 60\text{ minut.} \\ 111,1\text{ km} : 60 &= 1,85\text{ km} \\ 1\text{ minuta} &= 1,85\text{ km} \end{aligned}$$

Jak obliczyć odległość za pomocą współrzędnych geograficznych ?

Wykorzystując informacje, że 1° szerokości geograficznej wynosi 111km a $1' = 1,85\text{km}$) obliczmy ile kilometrów dzieli nas od najwyższego szczytu **Beskidu Wyspowego Mogielicy** od najwyższego wzniesienia polskiego wybrzeża **Wzniesienia Gosań**, na którym również byliśmy.

Najwyższy szczyt Beskidu Wyspowego (1170 m.n.p.m) Mogielica $49^\circ 37'N$



Najwyższe wzniesienie (94 m.n.p.m.) olskiego wybrzeża - Wzgórze Gosań $53^\circ 57'N$



Aby obliczyć odległość tych miejsc musimy najpierw policzyć **rozciągłość południkową**, czyli różnicę szerokości geograficznej między punktem wysuniętym najdalej na północ a punktem wysuniętym najdalej na południe.

Obliczenia:

$$53^{\circ}57' - 49^{\circ}37' = 4^{\circ}20'$$

$$4^{\circ} \times 111\text{km} = 444\text{ km}$$

$$20' \times 1,85\text{ km} = 37\text{ km}$$

$$\text{a zatem } 444\text{km} + 37\text{ km} = 481\text{ km}$$

Odległość między tymi punktami wynosi 481 km.

Za tą odległością kryje się jak pokazują poniższe zdjęcia sama radość 😊



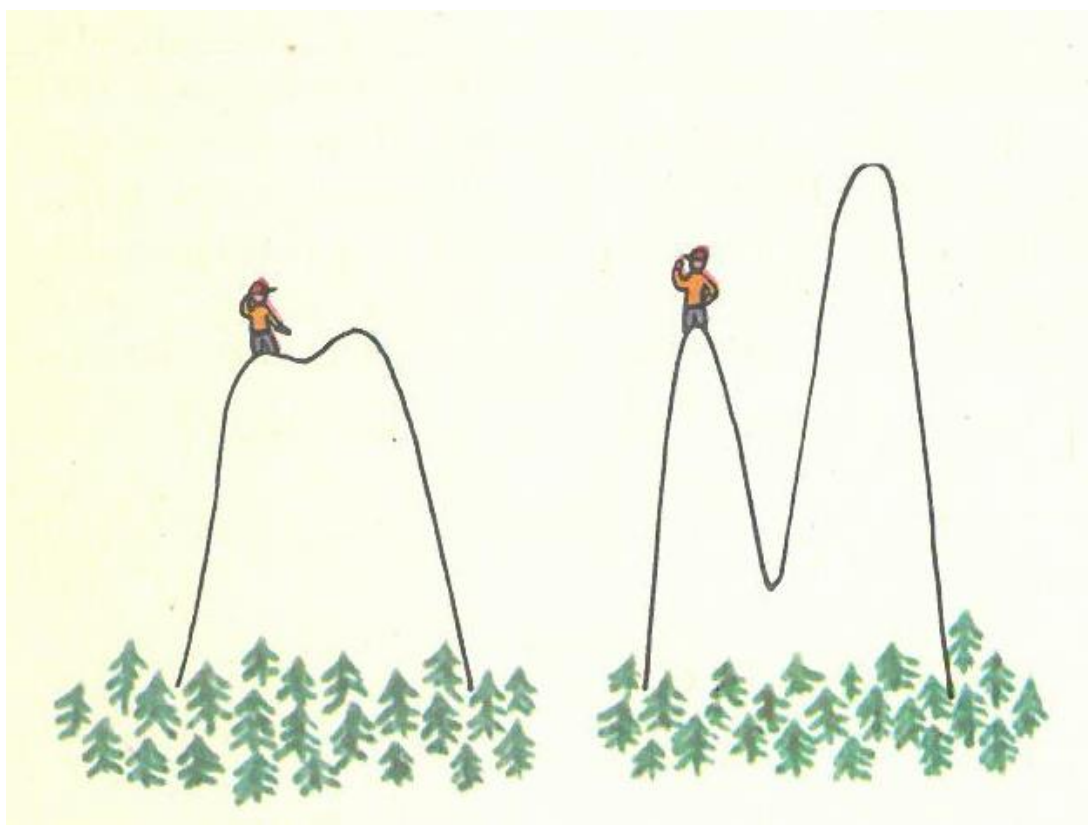
3. Wędrówki po maksimach, minimach i punktach przegięcia

Czasami zdarza się podczas wędrówek górskich, że myślimy, iż zdobyliśmy szczyt a po jakimś czasie jednak dochodzimy do wniosku, że do szczytu nie doszliśmy.

Zdarzyło nam się to kilkakrotnie.

Krótko mówiąc czasami myślimy, że skoro wszystkie drogi prowadzą w dół to jesteśmy na szczycie. Niekoniecznie tak musi być : zależy to od tego co nazywamy szczytem.

Patrząc na poniższy rysunek zastanówmy się który z wędrowców osiągnął szczyt.

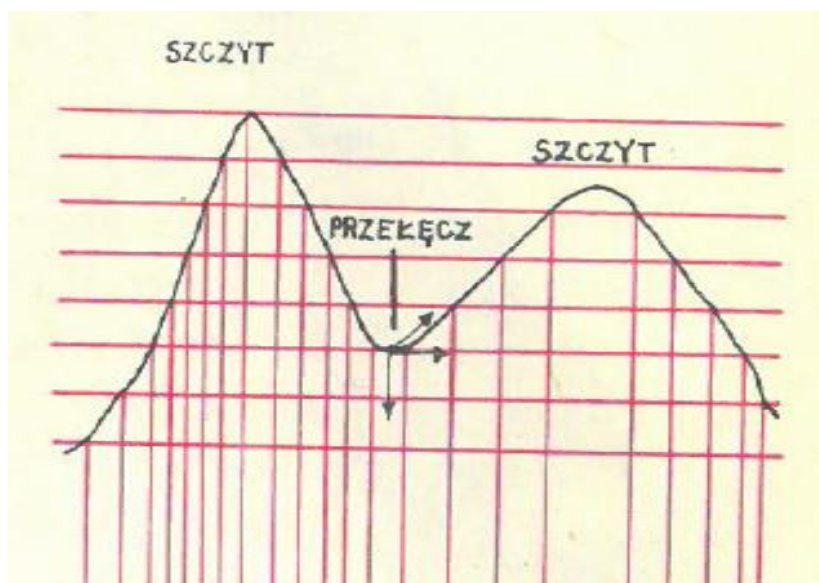


W matematyce odróżniamy pojęcie **maksimum funkcji** od jej „wartości największej”.

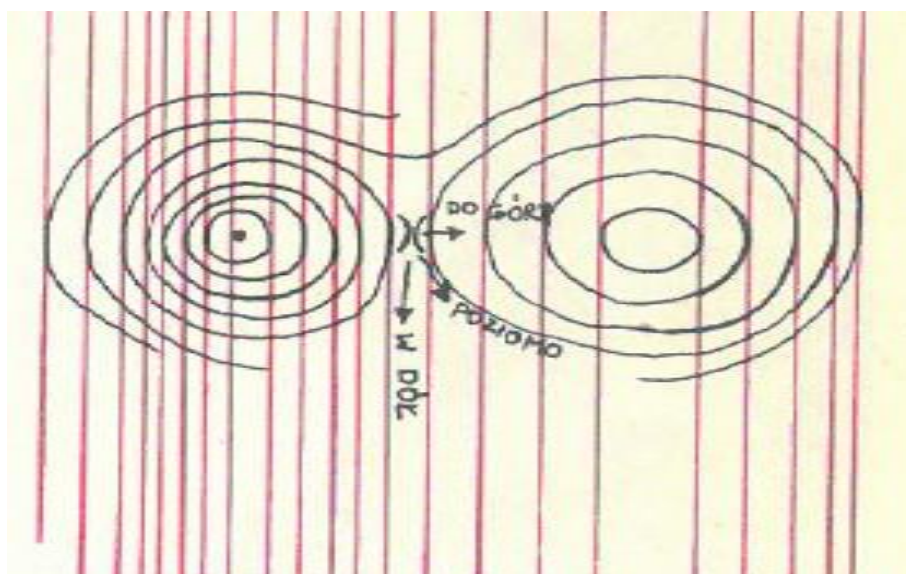
Funkcja ma maksimum w punkcie x , jeżeli blisko tego punktu nie ma wartości większych, a największą wartość – jeżeli w ogóle nie przyjmuje większych wartości. Każdy wierzchołek górski tworzy maksimum funkcji wysokości. Z wierzchołka nie ma drogi pod górę.

W łagodnych górach w okolicach wierzchołka stok jest prawie poziomy, ale nie zawsze spłaszczanie się terenu zwiastuje osiągnięcie szczytu. Może to być tylko **punkt przegięcia** funkcji. **Także szczyt górski to maksimum funkcji.**~

W wielu przypadkach wycieczki na szczyty zaczynają się z przełęczy. I skoro szczyty to maksimum funkcji czy przełęcz zatem to minimum funkcji ?? Patrząc na poniższy rysunek może on nas pozorny utwierdzać w tym przekonaniu .



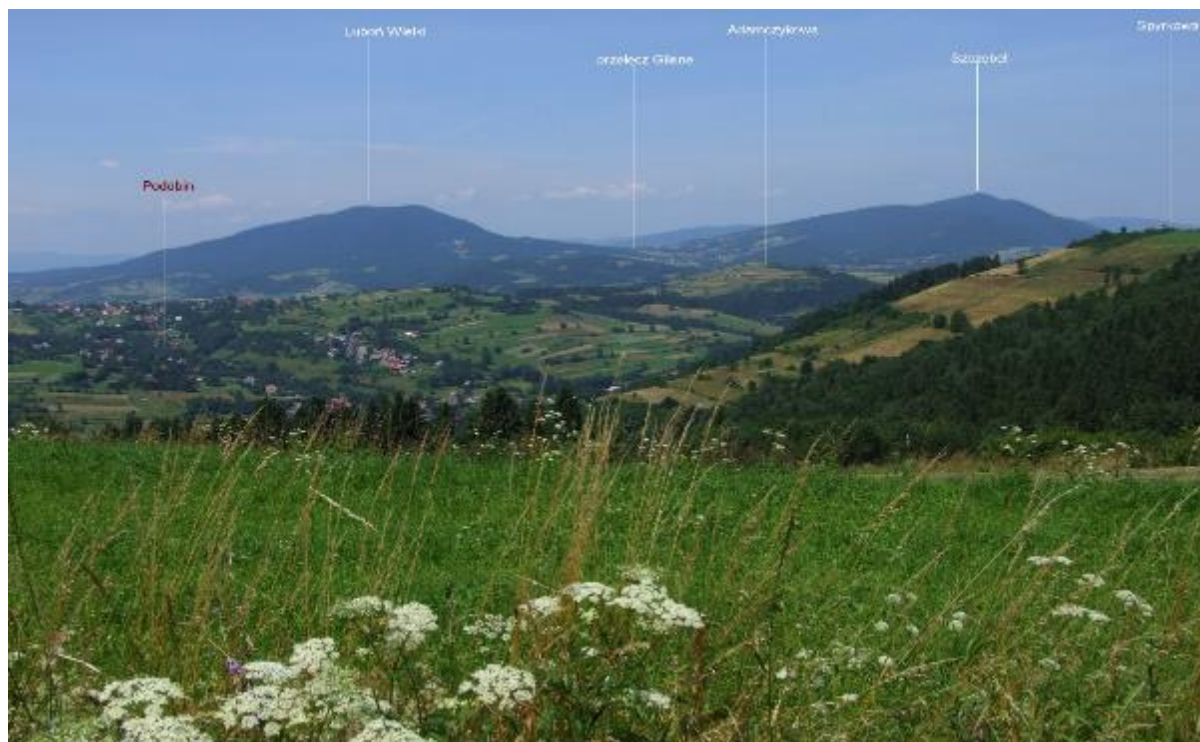
Ten sam rysunek przedstawiamy jako rysunek warstwiczny przełęczy



I widzimy, że można z niej iść do góry, na dół, a nawet i poziomo, a wiemy że funkcja osiąga minimum tam, gdzie wokół nie ma wartości mniejszych. **Taka przełęcz tworzy tzw. punkt siodłowy.**

⁶ Karpowicz A.(1986), „Zobaczcie Inaczej”, Wyd. Alfa

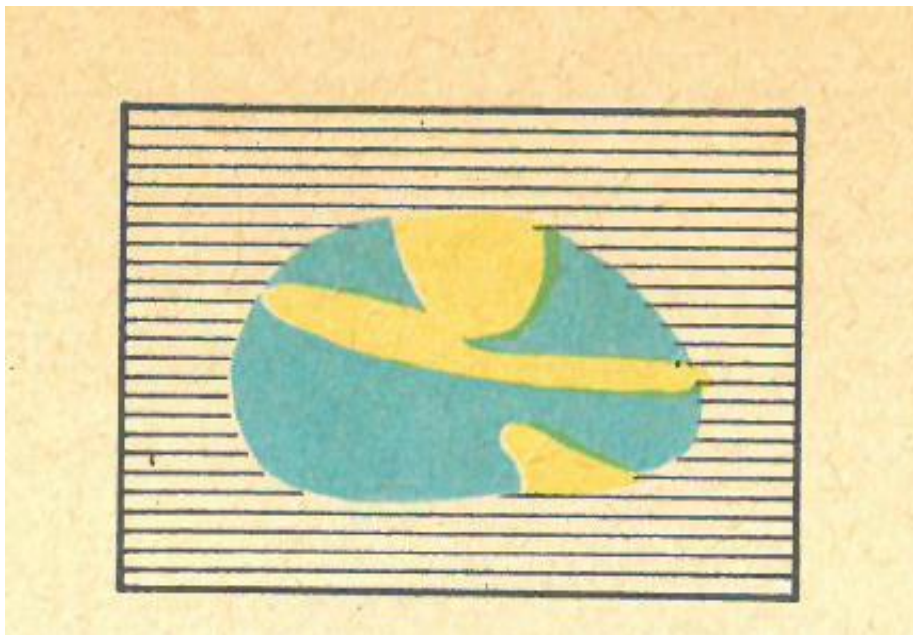
Poniżej jedna z takich przełęczy siodłowych w Beskidzie Wyspowym: **Przełęcz Glisne**, z której można zdobyć dwa szczyty Beskidu Wyspowego **Luboń Wielki** oraz **Szczebel**.



4. Zagadnienie czterech barw

Z pewnością każdy z nas kolorował niejedną mapę w taki sposób aby każdy region czy obszar otrzymał inną barwę. Na ogół wystarczy, żeby różnymi kolorami oznaczyć obszary, kraje sąsiednie czyli takie które mają wspólną granicę. Dalsze malowanie mapy, na której każdy kraj graniczący ze sobą będzie oznaczony innym kolorem nazywamy **malowaniem prawidłowym**. Przy takim sposobie malowania nasuwa się pytanie ile kolorów potrzeba aby prawidłowo stworzyć mapę oczywiście jest taka ilość barw, że każdy kraj mógłby mieć inną barwę. Interesujące jest natomiast jaka jest najmniejsza ilość barw wystarczająca do prawidłowego pomalowania mapy.

Łatwo jest namalować mapę dla której wystarczą dwie barwy tak jak na rysunku poniżej, przyjmuje się, że kraje których terytoria stykają się w jednym punkcie, nie są krajami sąsiednimi ponieważ nie mają wspólnej granicy



Rysunek ten przedstawia mapę wyspy na której kraje zostały zaznaczone kolorem niebieskim i żółtym a morze przedstawiono za pomocą kreskowania. Zazwyczaj jednak morze na mapach jest również kolorowane oraz wymaga się aby kraje sąsiadujące miały różną barwę od morza.

Przyjmując taki punkt widzenia morze będziemy traktować jako kraj i wtedy takiej mapy nie jesteśmy w stanie narysować dwoma kolorami.

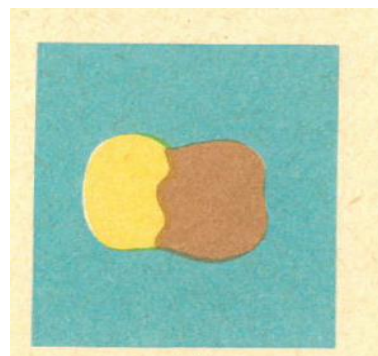
Dzięki tym rozważaniom powstała hipoteza znana pod nazwą „**zagadnienie czterech barw**”. Pierwszymi, którzy ją stosowali byli kartografowie.

Jednym z pierwszych, który chciał uzasadnić tę hipotezę był matematyk Keneth o. May. Jednak nie wniósł on nic nowego do udowadniania tej hipotezy i tak też było przez długi okres. Dopiero w roku 1878 **Matematyk Arthur Cayley** na posiedzeniu **Towarzystwa Geograficznego w Londynie** nadał zagadnieniu czterech barw światową sławę .

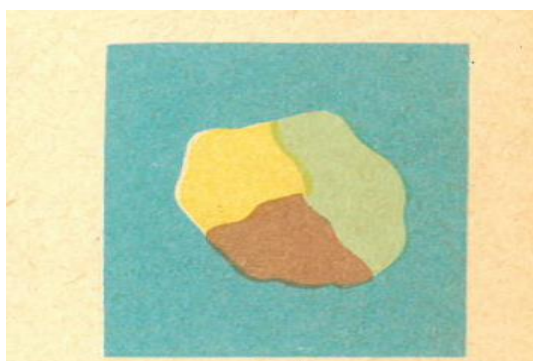
Tak powiedział o twierdzeniu, którego nie udało mu się rozwiązać. Na swoim wystąpieniu przedstawił on następujące stwierdzenia na podstawie wykonanych map:

Dla pomalowania mapy wyspy jak obok
jak na tym rysunku potrzeba trzech
barw:

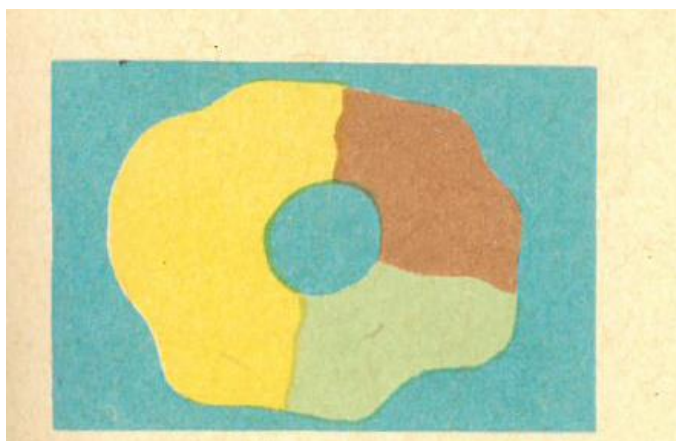
- morze: barwa niebieska
- dwóch barw żółtej i brązowej dla krajów



Na kolejnym rysunku przedstawiającym mapę potrzebujemy czterech barw, gdyż wszystkie trzy kraje graniczą z morzem i nie mogą otrzymać jego barwy. Po za tym graniczą ze sobą parami i muszą mieć trzy różne kolory.

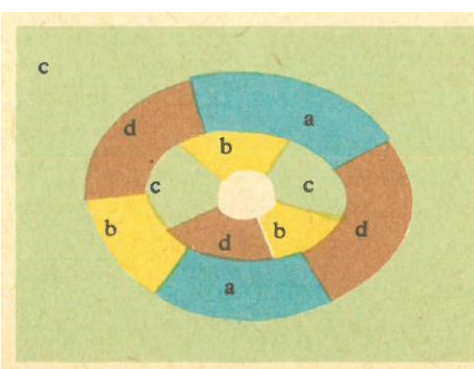
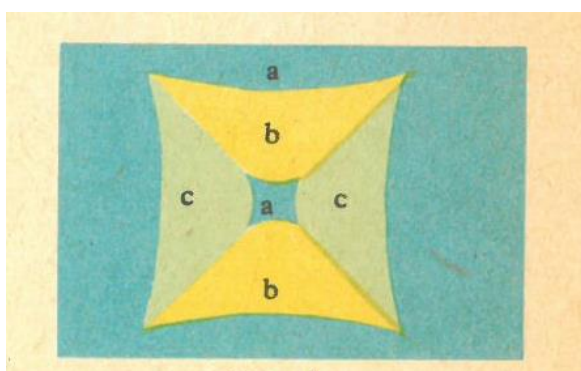


Taka sama zależność może zajść jeżeli zrezygnujemy z barwienia morza jak poniżej:



Kraj leżący pośrodku wyspy przyjął funkcję która przedtem miało morze.

Nieco bogatsze mapy pokazane na rysunkach poniżej dają się pomalować trzema lub czterema barwami .



Wiadomo , że mapy drukuje się w wielu barwach , najlepiej każde Państwo inną barwą: ponieważ jednak druk wielobarwnego arkusza jest kosztowny zadowolimy się tym, że graniczące ze sobą kraje będą miały różne barwy.

W rzeczywistości nie udało się dotychczas narysować mapy , najbardziej zawilej której nie można by pomalować w ten sposób za pomocą czterech barw. Tak samo nie udało się udowodnić, że do pomalowania każdej mapy wystarczą cztery barwy.

Stoimy przed bardzo prostym zagadnieniem, które można w paru minutach wyjaśnić każdemu laikowi zakresie matematyki, a którego nikt do tej pory nie rozwiązał.

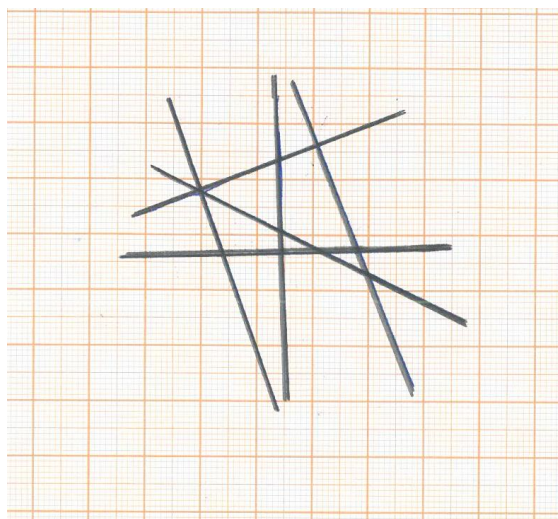
Słuszność hipotezy potwierdziło dwóch matematyków **Wolfgang Haken i Keneth Appel** 22 lipca 1976 roku.

Poniżej przedstawiamy zadanie związane z prawidłowym malowaniem map:

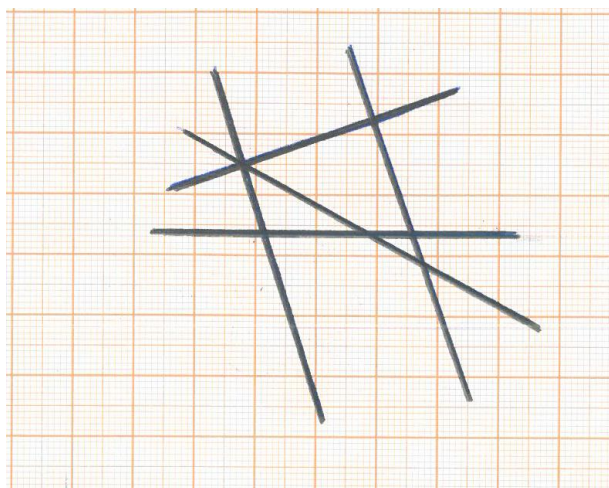
Na płaszczyźnie poprowadzono **n prostych**. Udowodnijmy, że utworzoną w taki sposób mapę można pomalować dwiema barwami:

Jest oczywiste, że jedna prosta na płaszczyźnie tworzy mapę, którą można pomalować dwiema barwami. Zakładamy, że nasze twierdzenie jest prawdziwe dla k prostych i mając to na uwadze udowodnimy, że tak samo możemy pomalować mapę, którą otrzymamy prowadząc **$k+1$ prostych** na płaszczyźnie.

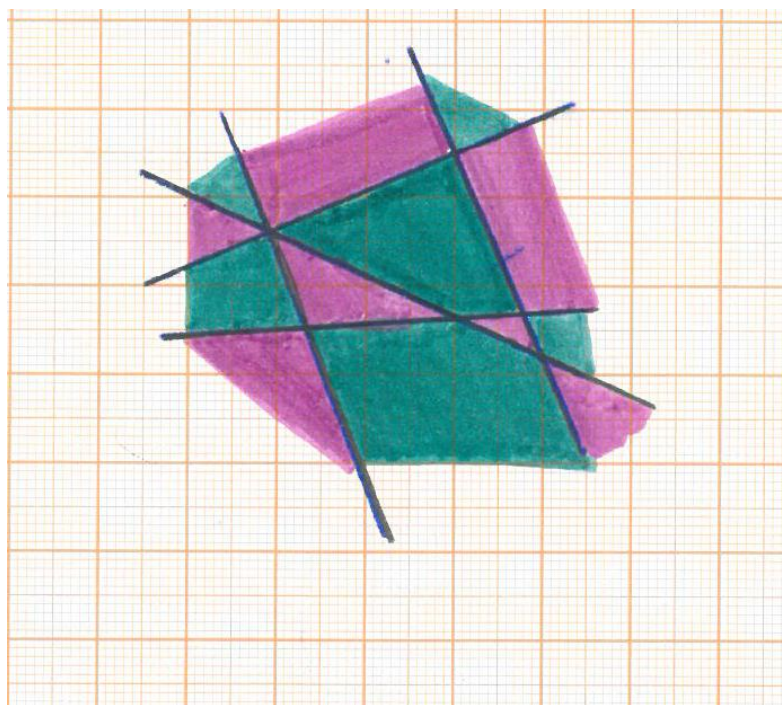
Do udowodnienia tego twierdzenia stosujemy **indukcję matematyczną** czyli metodę dowodzenia twierdzeń (najczęściej równań i nierówności), które są prawdziwe dla nieskończonej liczby przypadków (najczęściej dla nieskończonej wielu liczb naturalnych). Rysujemy nasze proste która stworzy nam mapę **M** utworzoną z **$K + 1$ prostych**.



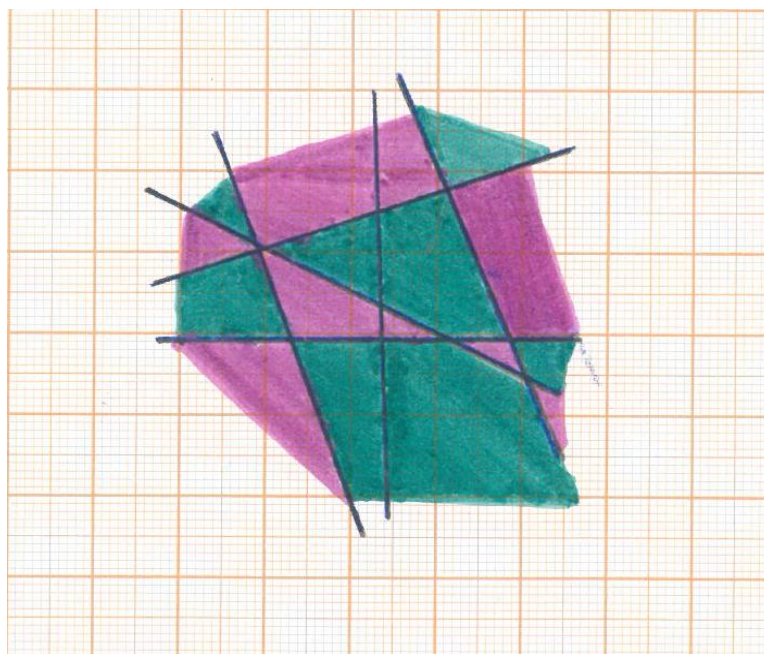
Następnie odrzucamy jedną prostą i powstaje nowa mapa z **k prostych** poprowadzonych na płaszczyźnie:



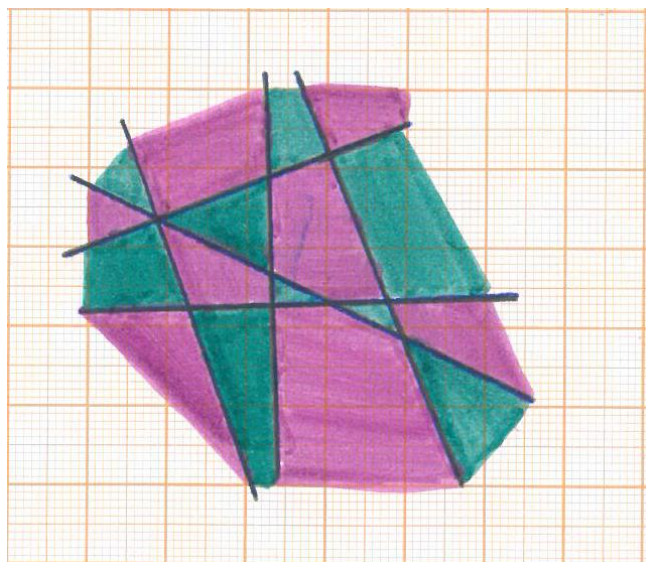
a taką mapę z założenia można pomalować dwoma kolorami- mapa poniżej:



Następnie dołączamy odrzuconą prostą, która dzieli nam płaszczyznę na dwie części z których każda jest pomalowana prawidłowo dwiema barwami:



Barwy z płaszczyzny po lewej stronie zostawiamy bez zmian natomiast w płaszczyźnie z prawej strony zmieniamy je na przeciwieństwo dzięki czemu otrzymamy prawidłowe pomalowanie naszej mapy jak poniżej.



W ten sposób udowodniliśmy że mapę otrzymana z dowolnej liczby prostych na płaszczyźnie można pomalować prawidłowo używając tylko dwóch kolorów⁷.

⁷ Rauszer C (1983), *Rozmaitości Matematyczne*, Instytut Wydawniczy Nasza Księgarnia

5. Podsumowanie : Średnia Arytmetyczna

W skład korony Beskidu wyspowego wchodzi następujące szczyty:

L.P	nazwa szczytu	wysokość szczytu w m. n.p.m	dystans w km
1	Adamczykowa	612	4,03
2	Chełm	789	19,26
3	Cichoń	926	4,92
4	Czarny Dział	673	10,28
5	Ćwilin	1072	7,93
6	Ciecień	830	8,54
7	Grodzisko	618	12,47
8	Jasień	1063	12,2
9	Jaworz	918	
10	Kamionna	801	6,31
11	Korab	727	4,72
12	Krzysztonów	1013	14,53
13	Kostrza	720	4,21
14	Księża Góra	643	12,47
15	Kutrzyca	1053	11,93
16	Kuklacz	701	5,74
17	Łopusze Wschodnie	601	5,38
18	Lubogoszcz	967	4,83
19	Lubomir	902	4,74
20	Luboń Wielki	1023	15,65
21	Łopień	960	8,82
22	Łyżka	802	5,74
23	Mogielica	1170	14,53
24	Modyń	1029	4,16
25	Miejska Góra	716	3,65
26	Ostra(Stara Wieś)	925	4,92
27	Ostra(Wiczyce)	780	8,63
28	Ogorzała	805	8,63
29	Patryja	763	3,42
30	Potaczkowa	745	2,57
31	Sałasz	905	
32	Skielek	749	1,62
33	Szczebel	976	5,91
34	Śnieżnica	1007	6,71
35	Urbania Góra	671	3,68
36	Wsołowa	624	11,11
37	Worecznik	559	3,83
38	Zęzów	695	3,02
39	Zębalowa	858	11,15
40	Białowodzka Góra	615	8,45
	Suma:	33006	290,69

W trzeciej kolumnie pokazane są wysokości szczytów, w czwartej liczba kilometrów, które przeszliśmy zdobywając poszczególne szczyty.

Na podstawie tych danych możemy sobie robić różne wyliczenia na przykład korzystając ze średniej arytmetycznej.

Średnia arytmetyczna zbioru liczb⁸ - to suma tych liczb podzielona przez ich liczbę.

Średnia arytmetyczna liczb $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, wyraża się wzorem:

$$X = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n}$$

Korzystając z tego wzoru wyliczamy: **średnia wysokość korony Beskidu Wyspowego**

$$X = \frac{33006 \text{ m.n.p.m (suma wszystkich wysokości)}}{40 \text{ (ilość szczytów)}} = 825,15 \text{ m.n.p.m.}$$

Oraz **średnią kilometrów z całego dystansu** pokonanego podczas zdobywania wszystkich szczytów (w tym przypadku dzielimy ją nie na 40 a na 38 ponieważ podczas jednej wędrowki zdobyliśmy 3 szczyty)

$$X = \frac{290,69 \text{ km}}{38} = 7,64 \text{ km}$$

Za zdobycie 40 szczytów korony Beskidu Wyspowego otrzymujemy odznakę PTTK:



I tym miłym akcentem kończymy naszą matematyczną wędrowkę.

⁸ <https://www.matemaks.pl/srednia-arytmetyczna.html>

Bibliografia:

1. Rauszer C. (1983) „Rozmaitości Matematyczne” Instytut Wydawniczy „Nasza Księgarnia
2. Ibanes P. (2012) „Marzenie o mapie doskonałej” RBA
3. Karpowicz A. (1986), Zobaczcie Inaczej, Wyd. Alfa
4. Beskid Wyspowy (2020) Mapa, Wydawnictwo Compass
5. <https://pl.wikipedia.org/wiki/Mapa>
6. https://pl.wikipedia.org/wiki/Skala_liczbowa
7. https://pl.wikipedia.org/wiki/Skala_mianowana
8. <https://pl.wikipedia.org/wiki/Hektar>
9. [https:// pl.wikipedia.org/wiki/Morga](https://pl.wikipedia.org/wiki/Morga)
10. <http://www.pkulczycki.wodip.opole.pl/>