Szkoła Podstawowa nr 50 im. Włodzimierza Tetmajera w Krakowie

WIELOŚCIANY I „TWIERDZENIE OMGA”

Milena Marchewka

Małgorzata Mazur

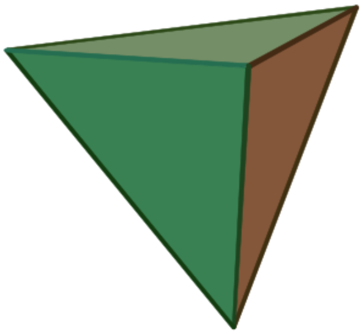
Gabriela Michałowska

<u>Opiekun pracy:</u>
mgr Dorota Szczepańska

Kraków, luty 2023 r.

WSTĘP

Każdy z nas spotyka się na co dzień z wielościanami. Mogą one przybierać różną formę, najczęściej zauważamy wielościany występujące w postaci najprostszych brył złożonych z 4 do 6 ścian, jak np. pudełko po butach, piramida, kostka Rubika, czy szafki kuchenne. Spotykamy się też ze znacznie bardziej złożonymi wielościanami, jak choćby brylanty (najczęściej zbudowane z 58 ścian, ale niekiedy nawet ze 146 ścian) lub piłeczki golfowe złożone z 300 do 500 ścianek.



najprostszy czworościan

Źródło: https://pl.wikipedia.org/

brylant ze 146 ścianami

Źródło: https://diamondscenter.pl/

piłeczka golfowa

Źródło: https://pl.wikipedia.org/

WIELOŚCIANY

Czym właściwie są wielościany? Zgodnie z definicją wielościan to bryła geometryczna, ograniczona przez tak zwaną powierzchnię wielościenną, czyli powierzchnię utworzoną z wielokątów o rozłącznych wnętrzach i każdym boku wspólnym dla dwóch wielokątów.

Każdy wielościan ma:

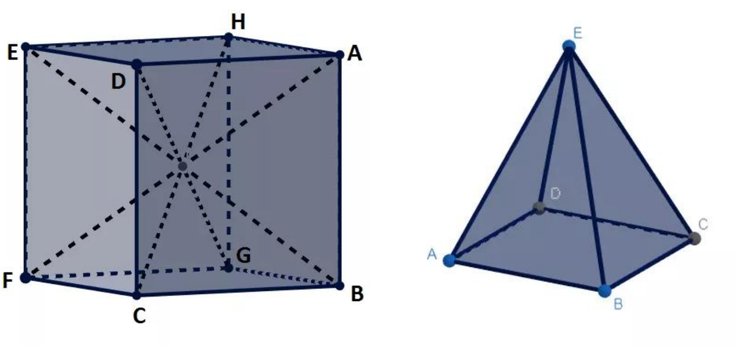
- ściany – wielokąty, które razem tworzą powierzchnię wielościanu,
- krawędzie, będące bokami ściany,
- wierzchołki - końce krawędzi wielościanu.

Należy jednak zaznaczyć, iż Istnieją różne opinie co do formalnej, „matematycznej" definicji wielościanu i stąd nie podajemy takiej definicji w naszej pracy.

Niewątpliwie najbardziej znane grupy wielościanów to graniastosłupy i ostrosłupy – nie jest to jednak podstawowy podział wielościanów. W zależności od ich budowy wielościany można podzielić na:

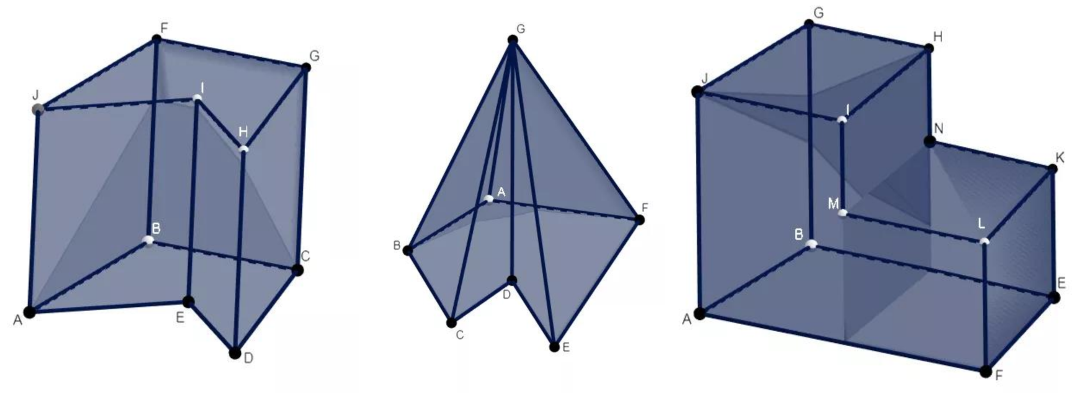
- wypukłe i niewypukłe

Wielościan wypukły to taki, w którym prawdą jest, że dwa jego punkty mogą zawsze być połączone odcinkiem linii, który pozostaje w obrębie figury. W wielościanie niewypukłym łącząc co najmniej dwa jego punkty można narysować odcinek linii znajdujący się na zewnątrz figury.



wielościany wypukłe

Źródło: https://pl.economy-pedia.com

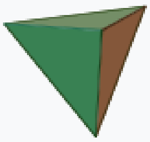
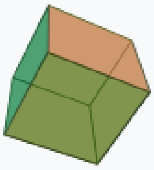
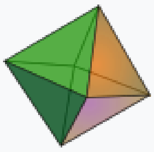
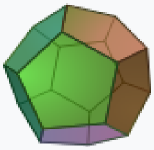
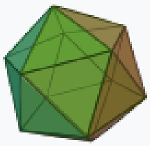


wielościany niewypukłe

Źródło: https://pl.economy-pedia.com

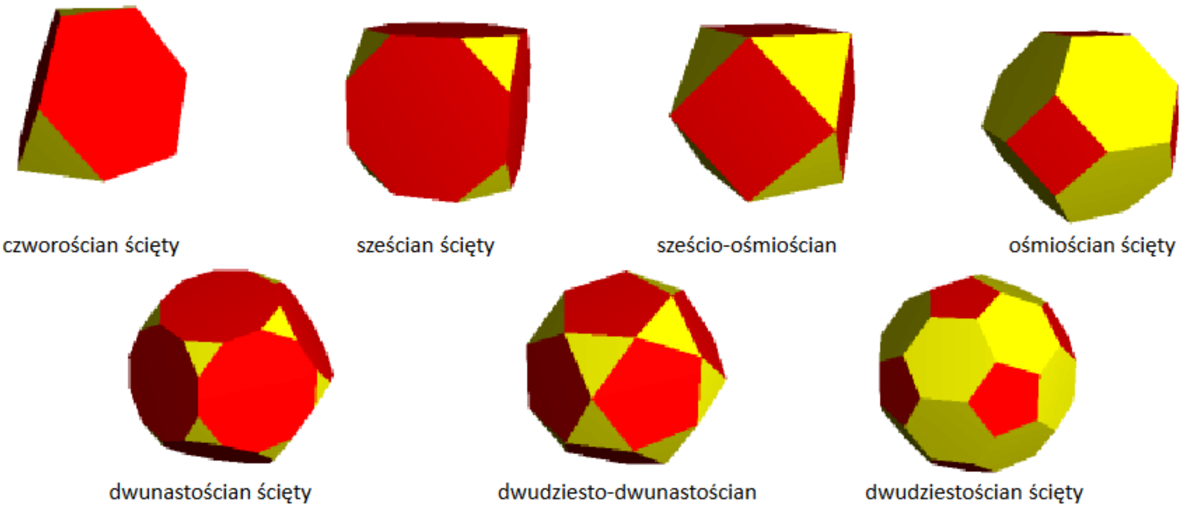
- foremne, półforemne i nieforemne (wszystkie pozostałe)

Wielościan foremny (platoński - od nazwiska greckiego filozofa i matematyka Platona) to taki, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi, w każdym wierzchołku zbiega się taka sama liczba ścian oraz wszystkie kąty wielościenne są równe. Bryły platońskie są bryłami wypukłymi. Istnieje tylko 5 wielościanów foremnych – zestawiono je w poniższej tabeli.

Nazwa	Nazwa grecka	Grafika	Ściana	Liczba ścian	Liczba krawędzi	Liczba wierzchołków
czworościan	*tetraedr*	 (model 3D)	trójkąt foremny (równoboczny)	4	6	4
sześcian	*heksaedr*	 (model 3D)	czworokąt foremny (kwadrat)	6	12	8
ośmiościan	*oktaedr*	 (model 3D)	trójkąt foremny (równoboczny)	8	12	6
dwunastościan	*dodekaedr*	 (model 3D)	pięciokąt foremny	12	30	20
dwudziestościan	*ikosaedr*	 (model 3D)	trójkąt foremny (równoboczny)	20	30	12

Źródło: https://pl.wikipedia.org/

Wielościan półforemny (archimedesowy - od imienia Archimedesa z Syrakuz) to taki wielościan, którego ściany są wielokątami foremnymi, w każdym wierzchołku zbiega się jednakowa liczba ścian, jednak poszczególne ściany różnią się od siebie oraz istnieje izometria przekształcająca każdy wierzchołek na każdy inny (inaczej mówiąc ściany nie są przystającymi wielokątami foremnymi). Wielościany te powstają w wyniku ścinania naroży wielościanów platońskich. Przykładowe wielościany półforemne przedstawiono poniżej.



Źródło: http://www.math.uni.wroc.pl

Jak widać na powyższej grafice tworzenie wielościanów wcale nie musi być sprawą prostą.

TWORZENIE WIELOŚCIANÓW O ZADANIEJ LICZBIE ŚCIAN, KRAWĘDZI LUB WIERZCHOŁKÓW

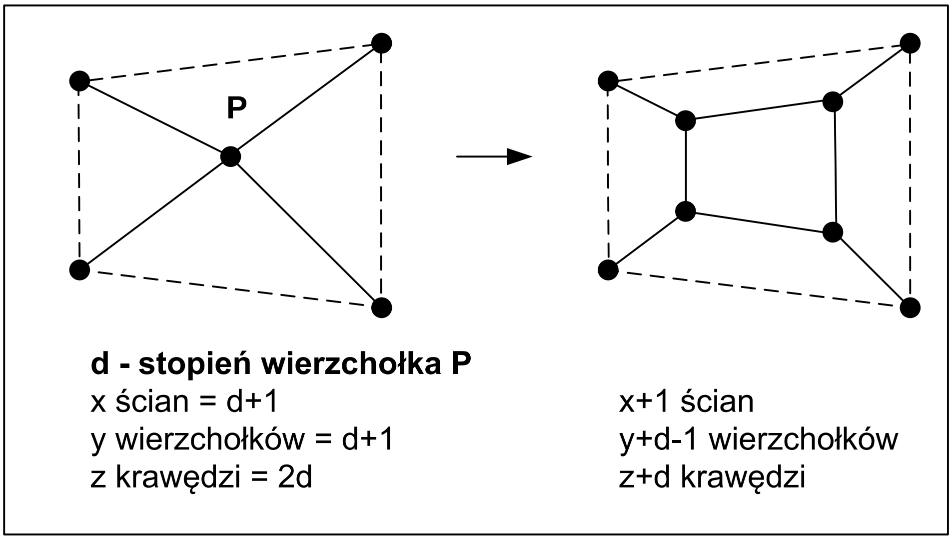
Czy zatem łatwo jest utworzyć wielościan o zadanej liczbie ścian, krawędzi lub wierzchołków? Jak najprościej to zrobić?

Przystępnej i sprytnej odpowiedzi na te pytania dostarcza artykuł „Twierdzenie OMGa” autorstwa Bartłomieja Bzdęgi z Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu.

W artykule przedstawiono dwie metody tworzenia wielościanów, przy czym zaprezentowane sposoby odnoszą się do wielościanów wypukłych.

METODA 1:

Polega na ścięciu wierzchołka ***P*** (na rys 1) stopnia ***d*** (stopień wierzchołka to ilość krawędzi wychodząca z tego wierzchołka) w taki sposób, by płaszczyzna cięcia przechodziła przez wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka P, ale nie przechodziła przez żaden wierzchołek tego wielościanu. Takie cięcie zagwarantuje płaszczyzna położona wystarczająco blisko wierzchołka P.



Rys. 1

Na podstawie rysunku z artykułu „Twierdzenie OMGa"

Ta metoda spowoduje:

– wzrost liczby ścian o 1 (powstaje ściana d-kątna);

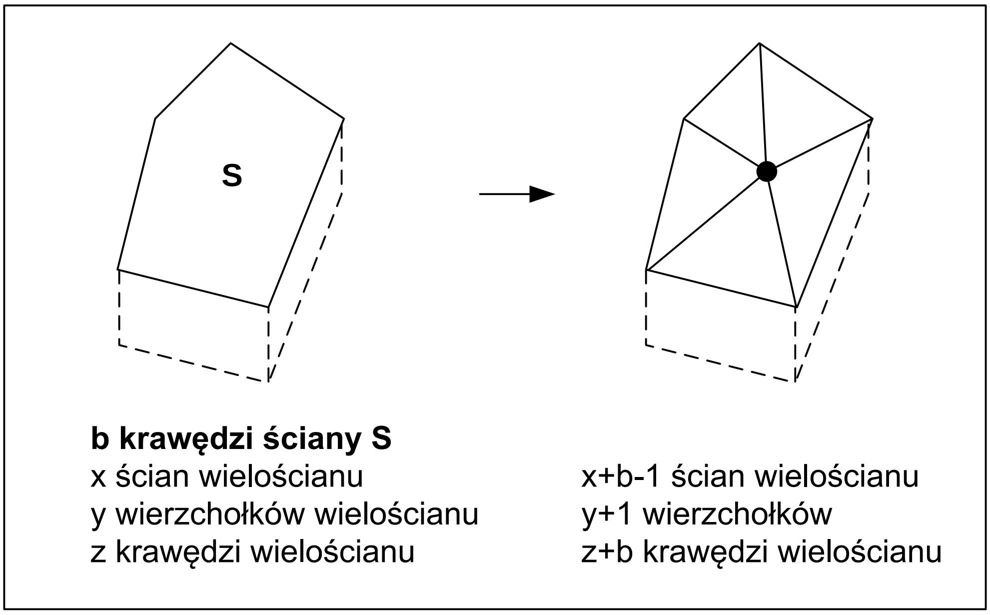
– wzrost liczby krawędzi o d (są to krawędzie nowo powstałej ściany);

– wzrost liczby wierzchołków o d−1 (na miejsce wierzchołka P przychodzi d wierzchołków stopnia 3).

Ponadto wszystkie ściany, których wierzchołkiem był punkt P, zwiększają liczbę boków o 1.

METODA 2:

Polega na wybudowaniu ostrosłupa, którego podstawą jest ściana ***S*** mająca ***b*** boków (na rys 2) w taki sposób, by kąty dwuścienne pomiędzy ścianami tego ostrosłupa a sąsiednimi ścianami wielościanu były miary mniejszej niż 180 stopni (w przeciwnym wypadku otrzymamy wielościan niewypukły). Aby to osiągnąć należy zbudować odpowiednio niski ostrosłup.



Rys. 2

Na podstawie rysunku z artykułu „Twierdzenie OMGa”

Ta metoda spowoduje:

– wzrost liczby ścian o b − 1 (na miejsce b-kąta pojawi się b trójkątów);

– wzrost liczby krawędzi o b (są to krawędzie boczne dobudowanego ostrosłupa);

– wzrost liczby wierzchołków o 1 (stopnia b).

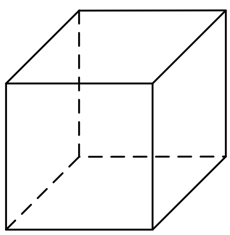
Ponadto wszystkie wierzchołki dawnej ściany S zwiększą stopień o 1.

Przedstawione powyżej dwie metody mają ułatwić tworzenie wielościanów wypukłych o zadanej liczbie ścian, krawędzi lub wierzchołków.

Przykład wykorzystania metod 1 i 2:

Zadanie: Przekształcenie sześcianu w wielościan o 22 ścianach.

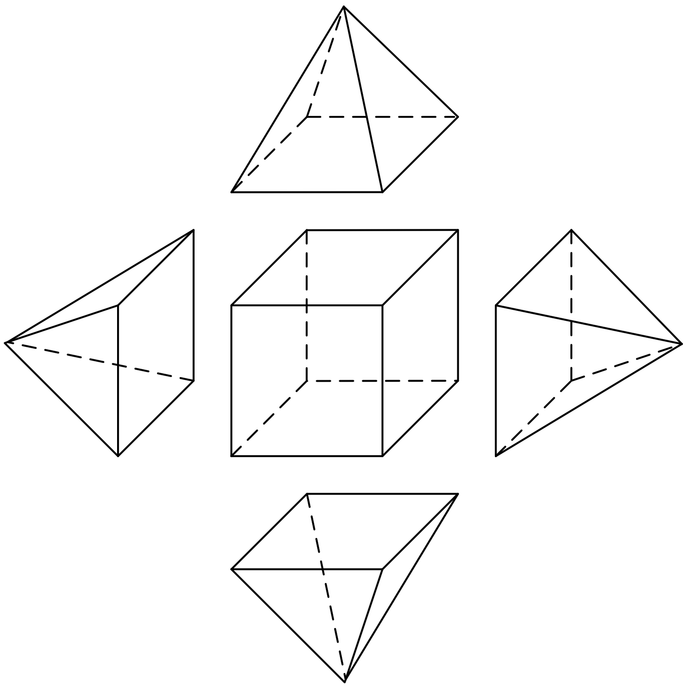
1. Za punkt wyjścia posłuży nam sześcian:



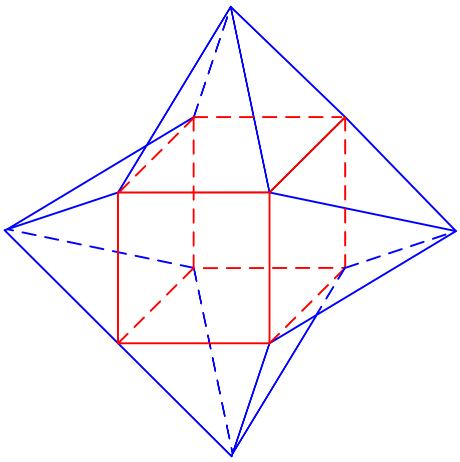
Na 4 ścianach sześcianu budujemy ostrosłupy stosując **metodę nr 2**

Uwaga: Poniższe rysunki ostrosłupów są jedynie poglądowe. Ostrosłupy powinny być na tyle niskie, aby bryła pozostała wielościanem wypukłym.

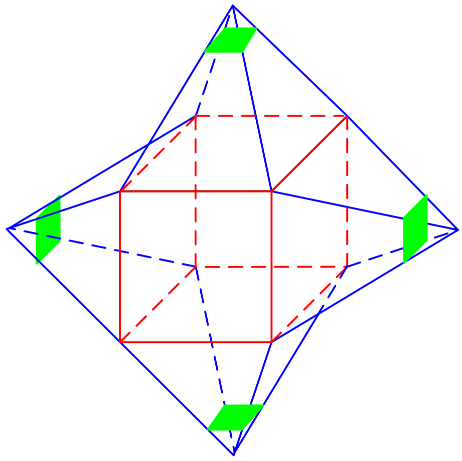
2.



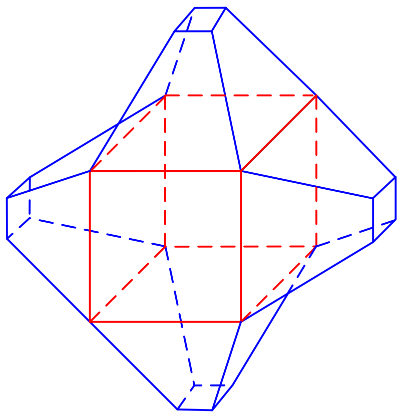
Otrzymujemy w ten sposób wielościan o 18 ścianach – 4 ostrosłupy każdy o 4 ścianach bocznych oraz dwie ściany sześcianu.



3. Ścinamy wierzchołki ostrosłupów stosując **metodę nr 1**



Otrzymujemy w ten sposób wielościan o 22 ścianach – 4 ścięte ostrosłupy (każdy o 4 ścianach bocznych i jednej ścianie stanowiącej ścięty wierzchołek) oraz dwie ściany sześcianu.



ZASTOSOWANIE METOD 1 i 2 - ZADANIA:

(zadanie z artykułu B. Bzdęgi „Twierdzenie OMGa w Delcie nr 2/2023)

Czy istnieje wielościan wypukły,

1. w którym liczba ścian i liczba wierzchołków są różnymi liczbami pierwszymi?
2. który ma tyle samo wierzchołków i ścian, ale nie jest ostrosłupem?
3. którego liczba krawędzi jest cztery razy większa od wartości bezwzględnej różnicy liczby jego ścian i wierzchołków?
4. w którym każda krawędź jest bokiem pewnej ściany siedmiokątnej?
5. który ma dokładnie siedem ścian sześciokątnych?
6. w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 i każde dwie ściany o wspólnej krawędzi mają różną liczbę boków?

7. który ma nieparzystą liczbę ścian i wszystkie wierzchołki parzystego stopnia?

Zad 1

Czy istnieje wielościan wypukły, w którym liczba ścian i liczba wierzchołków są różnymi liczbami pierwszymi? (zadanie z artykułu B. Bzdęgi „Twierdzenie OMGa w Delcie nr 2/2023)

Rozwiązanie (nasze, ale ostatecznie zgodziło się z rozwiązaniem dołączonym do artykułu):

Szukana bryła nie jest graniastosłupem, ponieważ graniastosłup ma zawsze parzystą liczbę wierzchołków. Nawet jeśli zetniemy jeden z nich, to otrzymamy dodatkowe dwa, więc liczba wciąż będzie parzysta.

Dlatego można byłoby rozpatrzyć ostrosłup z parzystą liczbą krawędzi przy podstawie, bo tylko w takim wariancie mamy nieparzystą liczbę wierzchołków przed wykonaniem jakiejkolwiek z operacji.

Próba 1

Za podstawę ostrosłupa bierzemy czworokąt, co daje nam wyjściowo 5 ścian. Ścinając po kolei wierzchołki, przybywa o jedną ścianę, więc możemy uzyskać ich 6,7,8 lub 9 (z tego tylko 7 jest liczbą pierwszą). Aby otrzymać 7 ścian trzeba ściąć 2 wierzchołki przy podstawie. Niestety w celu otrzymania liczby ścian, która jest liczbą pierwszą, należy ściąć jeden, trzy lub 4 wierzchołki. Dlatego też ostrosłup z czworokątem w podstawie nie może być rozwiązaniem.

Próba 2

Zatem bierzemy inną podstawę, tym razem 6-ciokąt (gdyż musi to być parzystokąt żeby przed ścięciem była nieparzysta liczba wierzchołków). Wyjściowo mamy 7 ścian i ścinamy kolejno wierzchołki w podstawie.

- jeśli zetniemy 2 wierzchołki to wychodzi 7+2=9 źle, bo ta liczba nie jest pierwsza

- jeśli zetniemy 3 wierzchołki to wychodzi 7+3=10 też źle

- jeśli zetniemy 5 wierzchołków to wychodzi 7+ 5=12 też źle

- jeśli zetniemy 6, to jest $7 + 6 = 13$ ścian, które jest liczbą pierwszą rozwiązującą zadanie. Wtedy wierzchołków jest $7 - 6 + 6 \cdot 3 = 19$ (ścinamy sześć wierzchołków, ale dochodzą przy każdym ścięciu 3 nowe).

Odp. Ścinamy 6 ścian przy podstawie w ostrosłupie prawidłowym 6-ciokątnym, a utworzenie bryły jest możliwe.

Nasze rozwiązanie, zgodziło się z rozwiązaniem dołączonym do artykułu, ale doszłyśmy do niego samodzielnie.

Zad 2

Czy istnieje wielościan wypukły, który ma tyle samo wierzchołków i ścian, ale nie jest ostrosłupem? *(zadanie z artykułu B. Bzdęgi „Twierdzenie OMGa w Delcie nr 2/2023)*

Rozwiązanie (nasze):

Dla graniastosłupa n-kątnego:

$(n+2)$ ściany,

$3n$ krawędzi,

$2n$ wierzchołków,

byłoby $3n = n+2$,

czyli $2n = 2$,

$n = 1$, co stanowi sprzeczność, bo podstawa graniastosłupa musi mieć co najmniej 3 wierzchołki.

Dla ostrosłupa n-kątnego:

$(n+1)$ ścian

$2n$ krawędzi

$(n+1)$ wierzchołków

Ponieważ zgodnie z warunkami zadania bryła nie może być ostrosłupem, ścinamy wierzchołek. Przy ścięciu wierzchołka dla ostrosłupa n-kątnego liczba ścian wzrasta o jedną, jest teraz $n+2$ ściany, oraz $n+1+d-1$, czyli $n+d$ wierzchołków:

$n+2 = n+d$

czyli $d = 2$ sprzeczność, bo z wierzchołka bryły wychodzą przynajmniej 3 wierzchołki.

Zbudowanie takiej bryły ze ścięcia wierzchołka ostrosłupa nie jest więc możliwe.

Spróbujmy więc ściąć wierzchołek graniastosłupa. Przy ścięciu wierzchołka graniastosłupa n- kątnego, zwiększa się liczba ścian o 1, teraz graniastosłup ma $n+3$

ściany, oraz $2n + d - 1$ wierzchołków (d to liczba krawędzi wychodząca, ze ściętego wierzchołka).

Tak więc: $n + 3 = 2n + d - 1$

czyli, $4 = n + d$

Nie jest to możliwe, ponieważ $n \geq 3$ (jako liczba krawędzi podstawy) i $d \geq 3$ (liczba krawędzi wychodząca z jednego wierzchołka).

Bryła powstała ze ścięcia wierzchołka graniastosłupa nie istnieje.

Próbowałyśmy dobudować ostrosłup do ściany graniastosłupa lub ostrosłupa.

Dla graniastosłupa n-kątnego: $n + 2 + b - 1$ ścian (gdzie b to liczba boków ściany, na której dobudowujemy), $2n + 1$ wierzchołków:

$n + 2 + b - 1 = 2n + 1$

$b = n,$

Dla ostrosłupa n-kątnego: $n + 1 + b - 1$, czyli $n + b$ ścian (gdzie b to liczba boków na ścianie, na której dobudowujemy), $n + 1 + 1$, czyli $n + 2$ wierzchołki:

$n + b = n + 2$

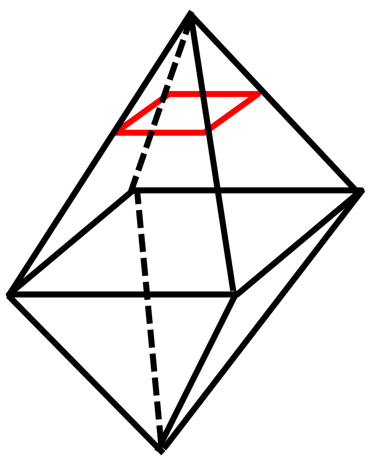
$b = 2$ niemożliwe, nie ma przecież na płaszczyźnie dwukątów.

Nie jest możliwe spełnienie warunków zadania za pomocą dobudowania ściany do graniastosłupa lub ostrosłupa.

Może więc ściąć któryś z wierzchołków ośmiościanu foremnego (6 wierzchołków, 8 ścian)?

$6 + d - 1 = 6 + 4 - 1 = 9$ wierzchołków,

$8 + 1 = 9$ ścian.



Ilustracja do rozwiązania zadania 2.

Odp. Zgodnie z tezą zawartą w artykule „Twierdzenie OMGa” wielościan istnieje. Jest to ścięty ośmiościan foremny.

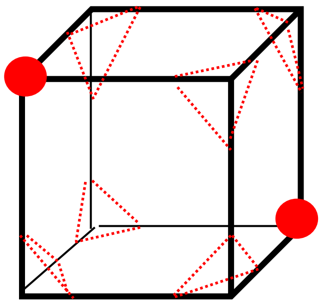
W odpowiedziach do artykułu zamieszczono inne rozwiązanie: dobudowano ostrosłup do jednej ze ścian sześcianu, czyli, gdybyśmy lepiej poszukały, to dla graniastosłupa znalazłoby się rozwiązanie.

Zad 4

Czy istnieje wielościan wypukły, w którym każda krawędź jest bokiem pewnej ściany siedmiokątnej? *(zadanie z artykułu B. Bzdęgi „Twierdzenie OMGa w Delcie nr 2/2023)*

Rozwiązanie (zaczerpnięte z artykułu B. Bzdęgi):

Na początku rozważamy sześcian. Jeśli odetniemy wierzchołek to na jego miejsce uzyskamy ścianę trójkątną. Jeżeli ścięlibyśmy każdy wierzchołek to otrzymalibyśmy 6 ścian 8-kątnych i 8 ścian trójkątnych, co nie spełnia wymagań zadania. Jeżeli od każdego naroża sześcianu oprócz dwóch przeciwległych odetniemy wierzchołek, wówczas każda krawędź tego wielościanu jest bokiem pewnej ściany 7-kątnej.



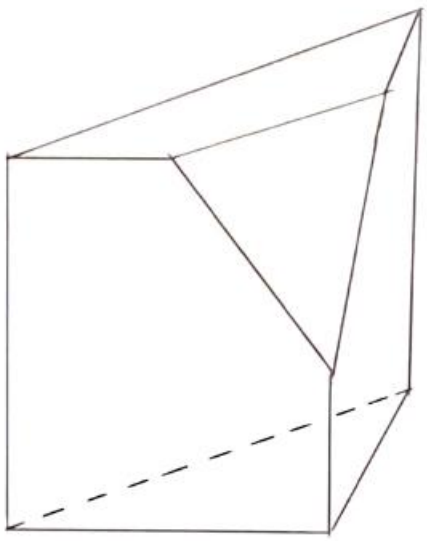
Ilustracja do zadania 4. Wierzchołki, które nie zostaną odcięte zaznaczone na czerwono (pogrubione).

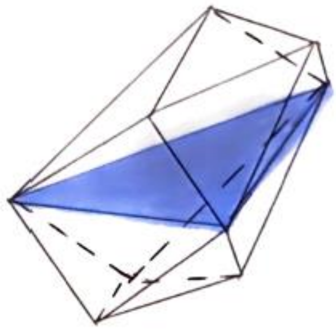
Zad 7

Czy istnieje wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę ścian i wszystkie wierzchołki parzystego stopnia? *(zadanie z artykułu B. Bzdęgi „Twierdzenie OMGa w Delcie nr 2/2023)*

Rozwiązanie (zaczerpnięte z artykułu B. Bzdęgi):

Rozpatrzmy graniastosłup trójkątny i płaszczyznę przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego, wybranego wierzchołka, odetnijmy z niego czworościan zawierający ten wierzchołek. Następnie w ten sam sposób odetnijmy czworościany z pozostałych wierzchołków graniastosłupa. Otrzymany wielościan spełnia warunki zadania





Ilustracja do rozwiązania zadania nr 7.

CZY DA SIĘ ZBUDOWAĆ DOWOLNY WIELOŚCIAN WYPUKŁY O ZADANEJ LICZBIE ŚCIAN, KRAWĘDZI LUB WIERZCHOŁKÓW?

Czy można jednak dowolnie narzucić liczbę ścian, krawędzi lub wierzchołków w wielościanie wypukłym? Jak sprawdzić, czy np. da się zbudować wielościan o 7 ścianach, 8 wierzchołkach i 12 krawędziach?

Tutaj z pomocą przychodzi twierdzenie Eulera o wielościanach. Euler to XVIII-wieczny szwajcarski matematyk i fizyk, jeden z najwybitniejszych matematyków w historii, który dokonał licznych odkryć w przeróżnych gałęziach matematyki. Zauważył on, iż:

- jeśli dla dowolnego wielościanu zwykłego przyjmiemy oznaczenia:

S - liczba ścian,

W - liczba wierzchołków,

K - liczba Krawędzi,

- to zachodzi równość

$$W + S = K + 2$$

Co ciekawe, Euler nie zaprezentował swojego odkrycia w żadnym opracowaniu naukowym, a podzielił się nim w liście do swojego przyjaciela Christiana Goldbacha.

Odpowiadając na postawione powyżej pytanie – nie da się zbudować wielościanu o 7 ścianach, 8 wierzchołkach i 12 krawędziach, gdyż:

Lewa strona równania: $W + S = 8 + 7 = 15$

a

Prawa strona równania: $K + 2 = 12 + 2 = 14$

$L \neq P$

Zatem wielościan wypukły o 7 ścianach i 8 wierzchołkach musiałby mieć 13 krawędzi.

Pamiętać należy ponadto, że liczba krawędzi musi być większa od liczby wierzchołków, a liczba wierzchołków nie może być mniejsza od liczby ścian.

Dowód twierdzenia Eulera o wielościanach

Aby udowodnić prawdziwość powyższego wzoru można posłużyć się zasadą indukcji matematycznej. Aby tego dokonać należy odrzucić jedną ze ścian wielościanu, a pozostałą jego część rozłożyć na płaszczyźnie (ściany wielościanu są wielokątami o rozłącznych wnętrzach i wspólnych bokach, które to wielościany dzielą płaszczyznę na skończoną ilość obszarów).

Dla jednej dowolnej ściany zachodzi (zgodnie z przyjętymi wcześniej oznaczeniami) zależność:

$$S = 1 \text{ i } K = W.$$

Dla każdej kolejnej ściany ilość ścian zwiększa się o 1, a liczba wierzchołków o jeden mniej niż liczba krawędzi (co można opisać jako $W + 1 = K$).

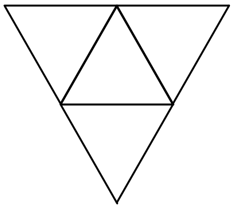
Możemy więc zapisać: $W + S = K + 1$

Na koniec dołączmy odrzuconą początkowo ścianą, tworząc znów wielościan - jej dołączenie spowoduje domknięcie wielokąta, a wzór będzie miał postać:

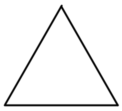
$$W + S = K + 2, \text{ czyli wzór Eulera.}$$

Poniżej zaprezentowane kolejne etapy dowodu twierdzenia Eulera dla czworościanu foremnego:

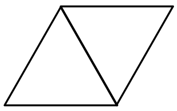
Siatka czworościanu



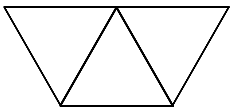
Dodawanie ścian



S=1 Zatem:
K=3 W+S = 4
W=3 K+1=4

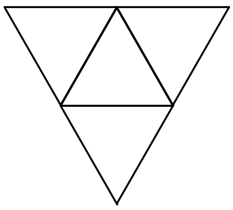


S=2 Zatem:
K=5 W+S = 6
W=4 K+1=6



S=3 Zatem:
K=6 W+S = 7
W=4 K+1=7

Domknięcie czworościanu



S=4 Zatem:
K=6 W+S = 8
W=4 K+2=8

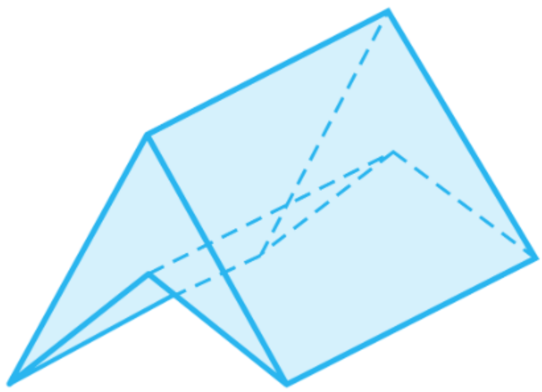
DODATKOWE INFORMACJE WARTE ZAPAMIĘTANIA:

- w przypadku wielościanów wypukłych o ścianach trójkątnych. W takich bryłach dodatkowo spełniona jest zależność:

$$3 \cdot S = 2 \cdot K$$

- liczba krawędzi wielościanów może być dowolną liczbą parzystą nie mniejszą od 6

- liczba krawędzi wielościanów może być dowolną liczbą nieparzystą nie mniejszą od 9
- wzór Eulera sprawdza się także dla niektórych wielościanów niewypukłych – np. dla każdego graniastosłupa niewypukłego (przykład poniżej)



Źródło: http://zpe.gov.pl

A NA DESER…

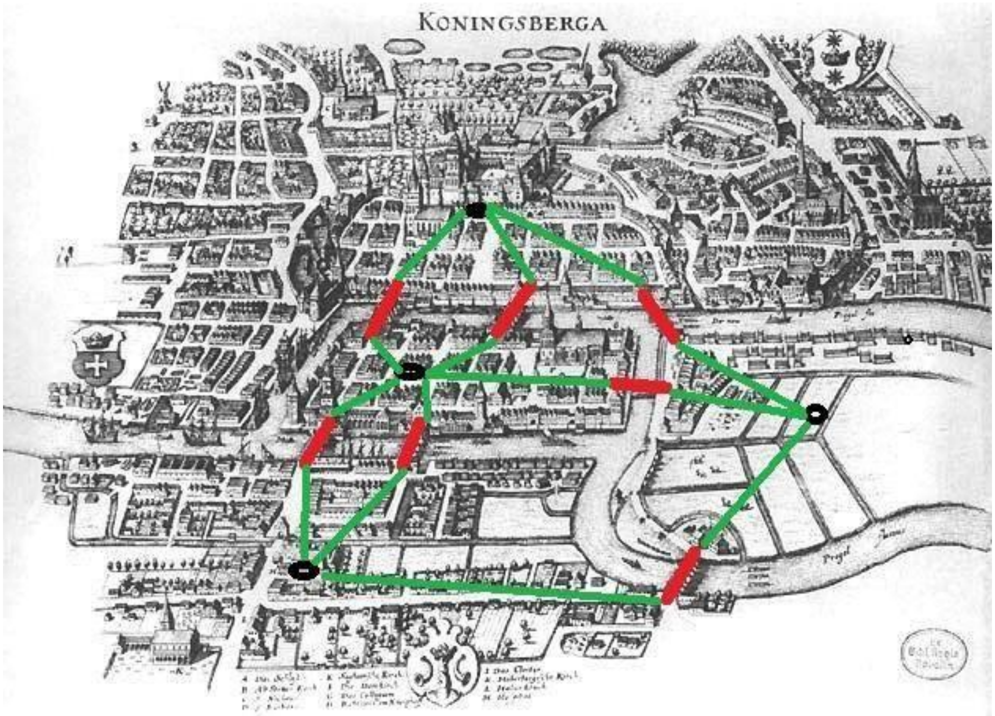
Coś o Eulerze…

Większość swojego naukowego życia Euler spędził w Petersburgu (tam też zmarł), ale pracował również dla króla Prus Fryderyka, gdzie udzielał prywatnych lekcji księżniczce Anhalt-Dessau, siostrzenicy króla. Efektem tych lekcji była książka zawierająca ponad 200 listów Eulera napisanych do księżniczki stanowiących pierwsze w historii dzieło w przystępny sposób objaśniające najważniejsze pojęcia fizyki i matematyki. Euler był zatem pierwszym w dziejach popularyzatorem nauki, a przy tym autorem pierwszej bestsellerowej książki popularnonaukowej. O pracowitości Eulera świadczy liczba jego prac naukowych (po utracie wzroku je dyktował) - w sumie wydano ich 886, spośród nich 356 ukazało się po jego śmierci.

i „jego” mostach…

„W Królewcu jest wyspa zwana Knipawą […]” – tak rozpoczynała się praca naukowa Eulera, która dała początek tzw. teorii grafów, niezwykle istotnej we współczesnej informatyce, planowaniu produkcji, transporcie i genetyce.

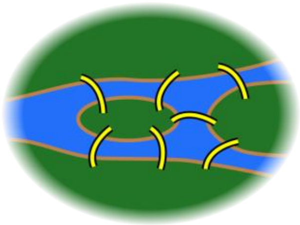
Euler rozwiązał problem, nad którym od dawna zastanawiali się mieszkańcy Królewca: „Czy można po siedmiu mostach łączących dzielnice miasta z wyspą na Pregole odbyć spacer w ten sposób, by przejść kolejno przez wszystkie mosty nie przechodząc po żadnym z nich więcej niż raz jeden?”



Mapa Królewca z 7 mostami.

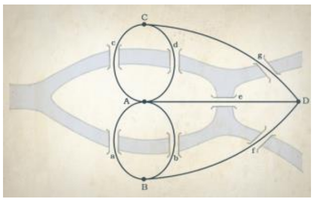
Źródło: https://www.gdanskstrefa.com

Euler dowiódł, że jest to niemożliwe. Przedstawił rozwiązanie zagadki w postaci schematu na mapie złożonego z punktów i kresek, gdzie punkty oznaczały poszczególne dzielnice, a linie przedstawiały możliwą trasę spaceru – tym samym stworzył pierwszy w historii „graf” .



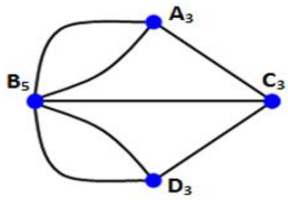
schemat mostów

Źródło: https://www.gdanskstrefa.com



graf nałożony na schemat

Źródło: https://open.uj.edu.pl



graf

Źródło: https://centrumnaukiec1.pl

Liczby przy kropkach na grafie informują, ile linii spotyka się w każdej z kropek. Liczby te są nieparzyste. Analizując ten i podobne mu grafy, Euler odkrył, że przejście każdą krawędzią tylko raz będzie możliwe na przykład wtedy, gdy w każdej kropce (wierzchołku grafu) spotka się parzysta liczba linii (krawędzi grafu), wtedy zaś, gdy liczba krawędzi przy każdej kropce będzie nieparzysta, takie przejście będzie niemożliwe.

Tym co zrobił Euler dalej, było sformułowanie podstaw teorii grafów - w tym pojęć takich jak krawędź, wierzchołek oraz stopień wierzchołka. Dla powyższego grafu każdy z wierzchołków jest nieparzystego stopnia (trzy wierzchołki są stopnia równego 3, jeden wierzchołek jest stopnia 5). I okazuje się, że to wystarcza do tego, by nie dało się zaplanować spaceru tak, jak planowali mieszkańcy miasta. Aby spacer był możliwy, to dokładnie dwa wierzchołki mogą mieć nieparzysty stopień.

W języku teorii grafów „graf z mostami Eulera" nazywany jest grafem nie-eulerowskim, natomiast graf, w którym da się „zaplanować spacer" przez wszystkie krawędzie, w tym każdą tylko raz - jest grafem eulerowskim. Taką trasę (tj. ciąg kolejnych wierzchołków i krawędzi, przez które przechodzimy), nazywamy *cyklem Eulera* jeśli wracamy do punktu startowego lub *drogą* jeśli punkt startowy i końcowy się nie pokrywają. Zachodzi zatem następujące twierdzenie:

Graf ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego wierzchołek ma stopień parzysty. Graf ma drogę Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego.

Należy wspomnieć również o grafach skierowanych tj. takich których wierzchołki połączone są strzałkami (stąd nazwa) albo łukami zakończonymi grotem. Ruch po takim grafie możliwy jest tylko w kierunkach wskazywanych przez krawędzie. Graf skierowany można sobie wyobrazić jako sieć ulic, z których każda jest jednokierunkowa, a ruch pod prąd jest zakazany.

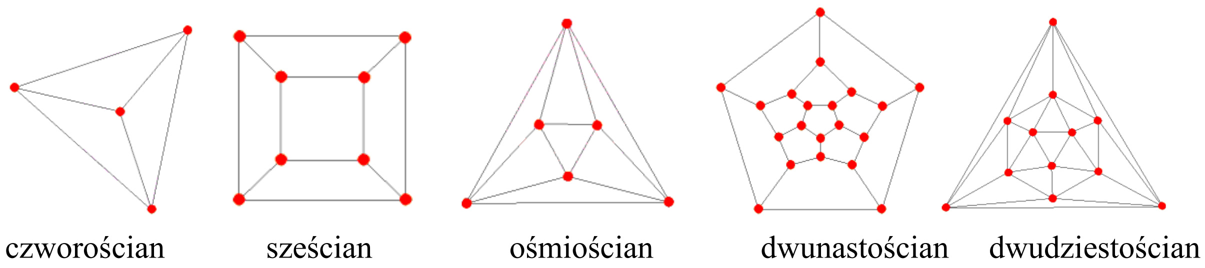
Graf *skierowany* (ze strzałkami na krawędziach) ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym wierzchołku liczba krawędzi wychodzących równa jest liczbie krawędzi wchodzących.

Tak narodziła się teoria grafów - matematyczna idea, która stoi między innymi u podstaw dzisiejszej informatyki, kryptografii, a także wielu innych praktycznych zastosowań. Stanowi też świetną metodę rozwiązywania wielu zadań logicznych (np. problem komiwojażera, problem chińskiego listonosza, problem najkrótszej drogi, czy da się narysować bez odrywania ołówka od kartki i bez rysowania ponownie wzdłuż narysowanej już linii kopertę otwartą i zamkniętą).

i co to ma wspólnego z wielościanami?

Nazewnictwo punktów i linii w grafach brzmi zadziwiająco podobnie do nazewnictwa stosowanego w wielościanach. Otóż zbieżność ta nie jest przypadkowa. **Wielościany można przedstawić w postaci grafów. Odpowiednikiem wierzchołka i krawędzi wielościanu jest wierzchołek i krawędź grafu, a odpowiednikiem ściany wielościanu obszar otoczony przez krawędzie grafu, a także obszar na zewnątrz grafu**.

Przykładowo - tak jak wyróżniamy wielościany platońskie, tak samo wyróżniamy grafy platońskie, czyli grafy utworzone z krawędzi i wierzchołków wielościanów foremnych, co przedstawia poniższa grafika:



Źródło: http://www.minch.pl

Należy podkreślić, że wzór Eulera dla wielościanów (W + S = K + 2) spełniają wszystkie grafy planarne tj. narysowane na płaszczyźnie w ten sposób, że ich krawędzie nie przecinają się.

WNIOSKI

Czego się nauczyłyśmy przy pisaniu tej pracy?

- **Poznałyśmy rodzaje wielościanów,**
- **Dowiedziałyśmy się, że tematem wielościanów interesowano się już w starożytności**
- **Poznałyśmy zależność liczby ścian i krawędzi w wielokątach wypukłych o ścianach trójkątnych,**
- **Ćwiczyłyśmy tworzenie wielościanów o zadanej liczbie ścian, krawędzi i wierzchołków**
- **Poznałyśmy twierdzenie Eulera o wielościanach i dowiedziałyśmy się jak niesamowity wkład wniósł w rozwój matematyki,**
- **Poznałyśmy podstawy teorii grafów Eulera i sposoby jej zastosowania.**

Tak więc, warto było napisać pracę z dziedziny matematyki, aby poznać zarówno trochę więcej niż na lekcjach matematyki, jak i nauczyć się sposobu pisania i redagowania pracy.

BIBLIOGRAFIA (ŹRÓDŁA)

1. M. Braun, A. Mańkowska, M. Paszyńska, K. Wiej, W. Babiański, E. Szmydtkiewicz, J. Janowicz „Matematyka z kluczem”- podręcznik do klasy ósmej („Nowa Era”, 2021 r.)
2. M. Bzdęga „Twierdzenie OMGa”- https://www.deltami.edu.pl/2023a/02/2023-02-delta-art-12-kpo.pdf
3. https://pl.wikipedia.org,
4. https://pl.economy-pedia.com,
5. https://diamondscenter.pl
6. https://www.beta-iks.pl,
7. http://matematyka.wroc.pl,
8. https://zpe.gov.pl,
9. https://www.gdanskstrefa.com,
10. https://eszkola.pl,
11. https://open.uj.edu.pl,
12. http://www.minch.pl,
13. https://centrumnaukiec1.pl