

O PEWNYCH PODZIAŁACH TRÓJKĄTA

Autor: Jakub Skalany

Korekta: Joanna Trybuła

WSTĘP

Pewnego dnia postanowiłem rozwiązać zadanie: "W jakim stosunku podzielić przyprostokątną trójkąta prostokątnego, aby otrzymać dwie figury o równych polach".

Rozwiązałem go na następnych stronach rozwijając go:

1. Rozdział 1: Podział trójkąta na figury o równych polach.
2. Rozdział 2: Nieskończony podział z zachowaniem proporcji cięcia.
3. Rozdział 3: Przykłady podziałów z zachowaniem proporcji cięcia:
 - a. podział na figury o polach zmniejszających się o $\frac{1}{2}$,
 - b. złoty podział odcinka,
 - c. złoty podział pól.
4. Zakończenie: Informacje o możliwych uogólnieniach.

I Liceum Ogólnokształcące
im. Seweryna Goszczyńskiego
w Zespole Szkół Ogólnokształcących Nr 1
w Nowym Targu
34-400 Nowy Targ, Pl. Krasieńskiego 1
tel. 18 266 29 55 Regon 492901259

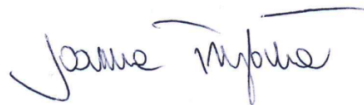
Nowy Targ, 15.02.2023r.

Informacja nauczyciela.

Jakub jest uczniem klasy drugiej o poszerzonym programie nauczania matematyki, fizyki i języka angielskiego. W Konkursie Prac Matematycznych startuje po raz drugi. W zeszłym roku napisał pracę pod tytułem "Dlaczego $2+2=4$ ", w której przedstawił informacje dotyczące konstrukcji zbiorów liczbowych.

Jakub Skalany to osoba utalentowana matematycznie, pracowita i zdyscyplinowana. Przedstawiane przez niego rozwiązania zadań cechuje wysoki stopień zrozumienia przerabianego materiału, precyzja i duża kultura matematyczna.

Uczeń preferuje pracę samodzielną, ale potrafi również zgodnie pracować w grupie, dzieląc się swoją wiedzą i doświadczeniem z innymi uczniami. Jakub nieustannie poszerza swoją wiedzę i umiejętności matematyczne, rozwija swoje zainteresowania, czego dowodem jest niniejsza praca napisana przez Niego samodzielnie. Treści w niej zawarte wykraczają poza podstawę programową nauczania matematyki w szkole ponadpodstawowej. Muszę przyznać, że przeczytałam ją z zainteresowaniem. W tej pracy widać ciekawe podejście do przedstawionych zagadnień matematycznych. Dlatego też praca z Jakubem daje dużo satysfakcji.



Dane kontaktowe:

Autor: Jakub Skalany

tel: 732 831 498

email: jakuskałanego@gmail.com

Szkoła: I Liceum Ogólnokształcące w Nowym Targu, im. Seweryna Goszczyńskiego

Plac Krasieńskiego 1 34-400 Nowy Targ

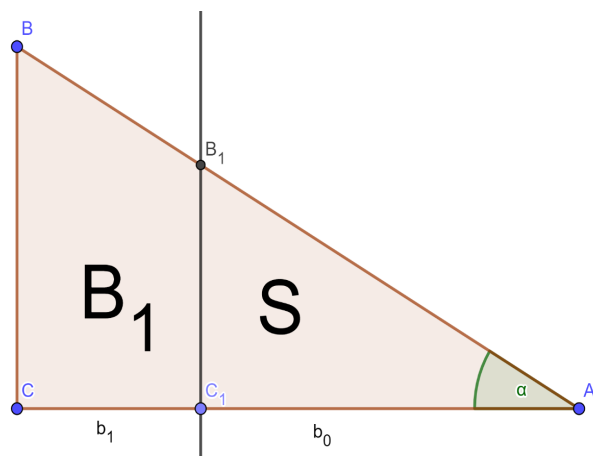
tel/fax: 18 266 29 55, 18 266 38 58

lo@goszczyński.nowytarg.pl

Opiekun: mgr Joanna Trybuła

tel. 696 678 958 email: trybula.joanna@gmail.com

Podział trójkąta na figury o równych polach



rys.1

Zacznijmy od podziału trójkąta na dwie figury o równych polach. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

B_1 – pole trapezu B_1BC_1C

S – pole $\triangle AB_1C_1$

$b_0 = |AC_1|$

$b_1 = |C_1C|$

Wtedy:

$$\begin{aligned} P_{B_1} &= P_{ABC} - P_{AB_1C_1} = \frac{1}{2}(b_0 + b_1)^2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2}(b_0)^2 \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \frac{1}{2} [(b_0 + b_1 + b_0)(b_0 + b_1 - b_0)] \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \frac{1}{2} [b_1(2b_0 + b_1)] \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} b_0^2 \operatorname{tg} \alpha$$

Stąd ponieważ $B_1 = S$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} b_0^2 &= b_1(2b_0 + b_1) \Leftrightarrow, \\ \Leftrightarrow b_0^2 &= 2b_0b_1 + b_1^2 \Leftrightarrow b_0^2 - 2b_0b_1 - b_1^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^2 - 2\frac{b_0}{b_1} - 1 &= 0 \quad b_1 > 0 \end{aligned}$$

Przyjmując $t = \frac{b_0}{b_1}$ otrzymujemy równanie $t^2 - 2t - 1 = 0$ z

$$\text{wyróżnikiem } \Delta = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{zał: } t > 0; \quad t_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2}$$

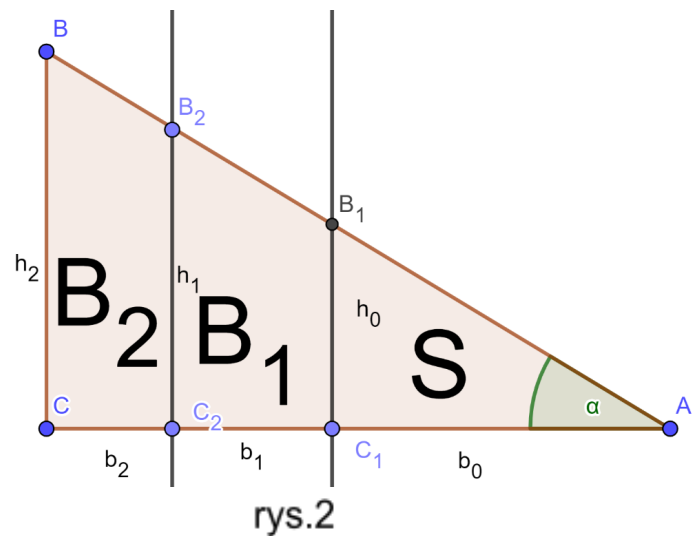
$$\frac{b_0}{b_1} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow b_2 = \frac{b_0}{1+\sqrt{2}} = b_0(\sqrt{2} - 1).$$

Wartym zauważenia jest to, że stosunek długości odcinków b_0, b_1 jest niezależny od miary kąta alfa.

Rozszerzmy to zadanie na podział trójkąta na trzy figury o równych polach.

Przyjmując:

- $h_0 = b_0 \operatorname{tg} \alpha$
- $h_1 = (b_0 + b_1) \operatorname{tg} \alpha$
- $h_2 = (b_0 + b_1 + b_2) \operatorname{tg} \alpha$



Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 P_{B_2} &= P_{ABC} - P_{AB_2C_2} = \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + b_2)^2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2}(b_0 + b_1)^2 \operatorname{tg} \alpha = \\
 &= \frac{1}{2} [(b_0 + b_1 + b_2 + b_0 + b_1)(b_0 + b_1 + b_2 - b_0 - b_1)] \operatorname{tg} \alpha = \\
 &= \frac{1}{2} [b_2(2b_0 + 2b_1 + b_2)] \operatorname{tg} \alpha \\
 S &= \frac{1}{2} b_0^2 \operatorname{tg} \alpha
 \end{aligned}$$

Stąd ponieważ $B_2 = S$ otrzymujemy:

$$b_0^2 = b_2(2b_0 + 2b_1 + b_2), \text{ i uwzględniając } b_1 = b_0(\sqrt{2} - 1),$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 b_0^2 &= b_2(2b_0 + 2b_0(\sqrt{2} - 1) + b_2) \Leftrightarrow b_0^2 = b_2(2b_0(1 + \sqrt{2} - 1) + b_2) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow b_0^2 &= b_2(2\sqrt{2}b_0 + b_2) \Leftrightarrow b_0^2 - 2\sqrt{2}b_0b_2 - b_2^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b_0}{b_2}\right)^2 - 2\sqrt{2}\frac{b_0}{b_2} - 1 = 0 \quad b_2 > 0
 \end{aligned}$$

Przyjmując $t = \frac{b_0}{b_2}$ otrzymujemy równanie $t^2 - 2\sqrt{2}t - 1 = 0$

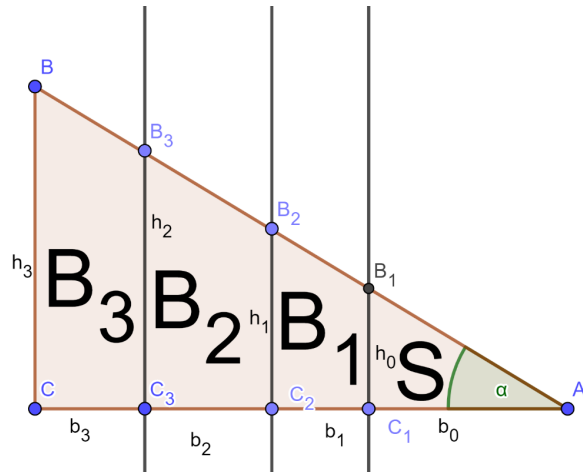
$$\Delta = 8 + 4 = 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

zał: $t > 0$; $t_1 = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{b_0}{b_2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow b_2 = \frac{b_0}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = b_0(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

Rozszerzmy to zagadnienie na podział trójkąta na cztery figury o równych polach. Przyjmując:

- $h_0 = b_0 \operatorname{tg} \alpha$
- $h_1 = (b_0 + b_1) \operatorname{tg} \alpha$
- $h_2 = (b_0 + b_1 + b_2) \operatorname{tg} \alpha$
- $h_3 = (b_0 + b_1 + b_2 + b_3) \operatorname{tg} \alpha$



rys.3

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 P_{B_3} &= P_{ABC} - P_{AB_3C_3} = \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + b_2 + b_3)^2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + b_2)^2 \operatorname{tg} \alpha = \\
 &= \frac{1}{2} [(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_0 + b_1 + b_2)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 - b_0 - b_1 - b_2)] \operatorname{tg} \alpha = \\
 &= \frac{1}{2} [b_3(2b_0 + 2b_1 + 2b_2 + b_3)] \operatorname{tg} \alpha \\
 S &= \frac{1}{2} b_0^2 \operatorname{tg} \alpha
 \end{aligned}$$

Stąd ponieważ:

$$\begin{aligned}
 b_3^2 &= b_3(2b_0 + 2b_1 + 2b_2 + b_3), \text{ i uwzględniając } b_1 = b_0(\sqrt{2} - 1) \\
 b_2 &= b_0(\sqrt{3} - \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{otrzymujemy } b_0^2 &= b_3(2b_0 + 2b_0(\sqrt{2} - 1) + 2b_0(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + b_3) = \\
 &= b_3(2b_0(1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}) + b_2) \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow b_0^2 = b_3(2\sqrt{3}b_0 + b_3) \Leftrightarrow b_0^2 - 2\sqrt{3}b_0b_3 - b_3^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b_0}{b_3}\right)^2 - 2\sqrt{2}\frac{b_0}{b_3} - 1 = 0 \quad b_3 > 0$$

$$t = \frac{b_0}{b_3} \Rightarrow t^2 - 2\sqrt{3}t - 1 = 0 \quad \Delta = 12 + 4 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4$$

$$\text{zał: } t > 0; \quad t_1 = \frac{2\sqrt{3}+4}{2} \wedge t_2 = \frac{2\sqrt{3}-4}{2}; \quad t_2 \text{ nie spełnia założeń}$$

$$\frac{b_0}{b_3} = \sqrt{4} + \sqrt{3} \Rightarrow b_2 = \frac{b_0}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = b_0(\sqrt{4} - \sqrt{3})$$

Wniosek nasunął się oczywisty, a mianowicie $b_n = b_0(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Udowodnijmy ten wniosek formalnie:

Przyjmijmy:

$$\begin{cases} b_0 = x_0 \\ b_k = x_k - x_{k-1} \end{cases}$$

gdzie $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

wówczas

$$b_0 = x_0$$

$$b_1 = x_1 - x_0$$

$$b_2 = x_2 - x_1$$

$$b_n = x_n - x_{n-1}$$

niech $\sum_{i=0}^n b_i = b = x_n$

Wtedy

$$S = \frac{1}{2}h_0b_0 = \frac{1}{2}b_0^2 \operatorname{tg} \alpha \wedge S = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}h_n b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}b^2 \quad \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{zatem: } \frac{1}{2}b_0^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}b^2 \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow b_0^2 = \frac{1}{n+1}b^2$$

$$\Rightarrow b_0 = \frac{b}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geq 1$$

$$\text{Ponadto } B_k = \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right) x_k^2 - \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right) x_{k-1}^2 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha (x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{n+1} b^2$$

$$\text{więc } x_k^2 - x_{k-1}^2 = \frac{1}{n+1} b^2 \Rightarrow x_k^2 = \frac{1}{n+1} b^2 + x_{k-1}^2 \Rightarrow x_k = \sqrt{\frac{b^2}{n+1} + x_{k-1}^2}$$

Stąd

$$\text{a. dla } k=0 \quad x_0 = \frac{b}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{b. dla } k=1 \quad x_1 = \sqrt{\frac{b^2}{n+1} + \frac{b^2}{n+1}} = \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}$$

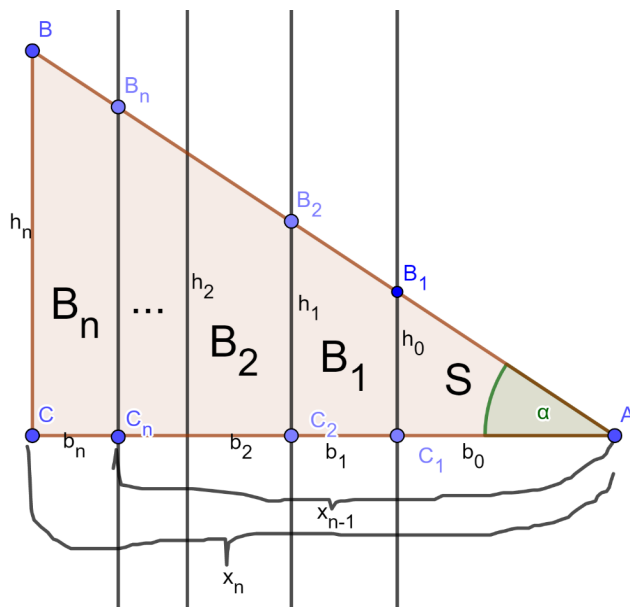
$$\text{c. dla } k=2 \quad x_2 = \sqrt{\frac{b^2}{n+1} + \frac{2b^2}{n+1}} = \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{d. dla } k=3 \quad x_3 = \sqrt{\frac{b^2}{n+1} + \frac{3b^2}{n+1}} = \frac{b\sqrt{4}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{zatem } x_k = \sqrt{\frac{b^2}{n+1} + \frac{kb^2}{n+1}} = \frac{b\sqrt{k+1}}{\sqrt{n+1}}, \text{ w szczególności dla } k=n$$

$$\text{otrzymujemy } x_n = \sqrt{\frac{b^2}{n+1} + \frac{nb^2}{n+1}} = \frac{b\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = b$$

$$b_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b\sqrt{k+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{b\sqrt{k}}{\sqrt{n+1}} = \frac{b}{\sqrt{n+1}} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = b_1(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}); \text{ co należało udowodnić.}$$

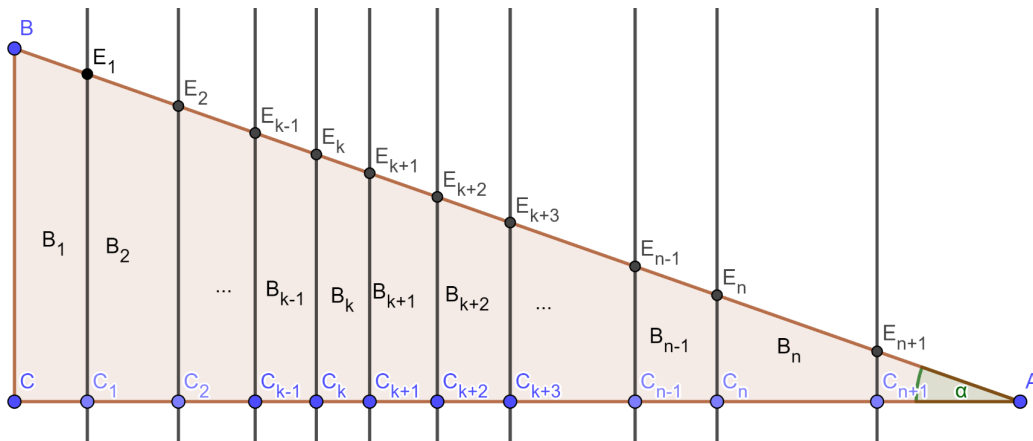


rys.4

Warto zauważyć, że w badanym ciągu wystąpiły metalowe liczby (algebraiczne dodatnie rozwiązania równań $(x^2 - px - q = 0)$). W tym miejscu postawiłem sobie następujące pytanie: “w jaki ciąg ułożą się pola figur, gdy przyprostokątną AC będziemy dzielić w stosunku złotym lub harmonicznym”.

Nieskończony podział z zachowaniem proporcji cięcia

W rozdziałach 2-3 przyjmijmy oznaczenia jak na rys.5



rys.5

Trójkąt prostokątny ABC, w którym $|AC| = b$, $|CB| = h = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha = |\angle BAC|$ dzielimy prostokadłymi do przyprostokątnej AC na przeliczalną ilość części $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ spełniających warunki:

- 1) $\forall (k \in \mathbb{N}) \left[\frac{P_{B_{k+1}}}{P_{B_k}} = q \wedge q \in (0, 1) \right]$
- 2) $\sum_{k=1}^{\infty} P_{B_k} = P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg} \alpha$ gdzie P_{B_k} to pole trapezu B_k dla $k = 1, 2, 3, \dots \wedge C_0 = C$

Podany problem ilustruje nr.5, na którym przyjęliśmy następujące oznaczenia:

- 3) $x_k = |C_k A|$ dla $k \in \{0, 1, \dots\}$, $x_0 = b$
- 4) $b_k = x_{k-1} - x_k = |C_{k-1} A| - |C_k A|$ dla $k \in \{1, 2, \dots\}$
- 5) $h_k = x_k \operatorname{tg} \alpha$ dla $k \in \{1, 2, \dots\}$ oraz $h_0 = h = x_0 \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \alpha$

Ważnym zadaniem jest znalezienie zależności pomiędzy punktami cięcia C_k dla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ a parametrami ΔABC , czyli długością boku

$b = |AC|$ i $\alpha = |\angle BAC|$

Zauważmy, że dla każdego $k = 1, 2, 3, \dots$ mamy

$$\begin{aligned} P_{B_K} &= P_{\Delta AB_{K-1}C_{K-1}} - P_{\Delta ABC} = \\ &= \frac{1}{2} (x_{k-1})^2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} (x_k)^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} [(x_{k-1})^2 - (x_k)^2] \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \frac{1}{2} \cdot b_k (b_k + 2x_k) \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Ponieważ $b_k + x_k = x_{k-1}$ zatem

$$q = \frac{P_{B_{K+1}}}{P_{B_K}} = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{(x_k)^2 - (x_{k+1})^2}{(x_{k-1})^2 - (x_k)^2} = \frac{b_{k+1}(b_{k+1} + 2x_{k+1})}{b_k(b_k + 2x_k)} \text{ stąd}$$

$$6) \quad q = \frac{b_{k+1}^2}{b_k^2} \cdot \frac{1 + 2(\frac{x_{k+1}}{b_{k+1}})}{1 + 2(\frac{x_k}{b_k})} \text{ przyjmując, że}$$

$$7) \quad \frac{x_k}{b_k} = \frac{x_{k+1}}{b_{k+1}} = \omega = \text{const, dla } k = 1, 2, \dots \text{ i biorąc pod uwagę, że}$$

$$x_k = x_{k+1} + b_{k+1} \text{ mamy}$$

$$\omega = \frac{x_{k+1} + b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_{k+1}}{b_k} (1 + \frac{x_{k+1}}{b_{k+1}}) = \frac{b_{k+1}}{b_k} (1 + \omega) \text{ dla } k = 1, 2, \dots$$

$$8) \text{ czyli } \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\omega}{1 + \omega} \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

Uwzględniając punkty 6,7,8 otrzymujemy:

$$q = (\frac{\omega}{1 + \omega})^2 \frac{1 + 2\omega}{1 + 2\omega} \Rightarrow$$

$$9) \Rightarrow q = (\frac{\omega}{1 + \omega})^2 \text{ dla } q \in (0, 1)$$

wtedy na mocy punktu 1

$$P_{B_{K+1}} = (\frac{\omega}{1 + \omega})^2 P_{B_K} \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

więc $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ to ciąg geometryczny, więc

$$10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} P_{B_K} = P_1 \frac{1}{1 - q}$$

Z punktów 4,7 i 9 otrzymujemy:

$$11) \quad q = (\frac{\omega}{1 + \omega})^2 = (\frac{\frac{x_k}{b_k}}{1 + \frac{x_k}{b_k}})^2 = (\frac{x_k}{x_k + b_k})^2 = (\frac{x_k}{x_{k-1}})^2 \text{ stąd też } q = (\frac{x_1}{x_0})^2 \text{ stąd}$$

$$12) \quad \frac{1}{1 - q} = \frac{(x_0)^2}{(x_0)^2 - (x_1)^2}$$

$$\text{Z drugiej strony } P_{B_1} = P_{\Delta ABC} - P_{\Delta AB_1C_1} = \frac{1}{2} ((x_0)^2 - (x_1)^2) tg \alpha$$

$$\text{zatem } P_{B_1} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{1}{2} ((x_0)^2 - (x_1)^2) \frac{(x_0)^2}{(x_0)^2 - (x_1)^2} tg \alpha$$

$$\text{czyli } \sum_{k=1}^{\infty} P_{B_k} = P_{B_1} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{1}{2} (x_0)^2 tg \alpha = P_{\Delta ABC}$$

Wykazaliśmy zatem, że możliwe jest odpowiednie cięcie trójkąta prostokątnego na przeliczalną (nieskończoną) ilość trapezów (pasków) tak ,aby pole trapezu B_{K+1} z cięcia następnego było proporcjonalne do pola B_K trapezu cięcia poprzedniego, czyli

$$\forall (k \in N) \frac{P_{B_{K+1}}}{P_{B_K}} = q, \text{ gdzie } \sqrt{q} = \frac{|C_{K+1}A|}{|C_KA|}$$

Przykłady podziałów z zachowaniem proporcji cięcia

Przykłady nieskończonych cięć trójkąta prostokątnego ABC prostymi prostopadłymi do przyprostokątnej.

Dokonyamy nieskończonego podziału ΔABC przyjmując (odpowiednie) przykładowo różne proporcje pomiędzy wybranymi elementami (parametrami) figur powstałych przy dowolnych dwóch kolejnych cięciach w celu wyznaczenia na przeciwprostokątnej punktów $C_1, C_2, \dots, C_{K-1}, C_K, \dots$ jej przecięcia z linią do niej prostopadłą.

Przykład 1:

Założmy, że pole figury odciętej (trapezu) jest równe połowie pola figury odciętej w cięciu k-1, tzn:

$$\frac{P_{B_{K+1}}}{P_{B_K}} = \frac{1}{2} \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots \text{ Przy czym } P_{B_1} < P_{\Delta ABC} \text{ gdzie}$$

$$P_{B_1} = \frac{1}{2} (b^2 - x_1^2) tg \alpha = P_{\Delta ABC} - P_{\Delta AB_1C_1}$$

$$q = \frac{P_{B_{K+1}}}{P_{B_K}} = \frac{1}{2} \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots \text{ ponieważ } q = \left(\frac{\omega}{1+\omega} \right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{1+\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (2 - \sqrt{2})\omega = \sqrt{2} \Rightarrow \omega = 1 + \sqrt{2}$$

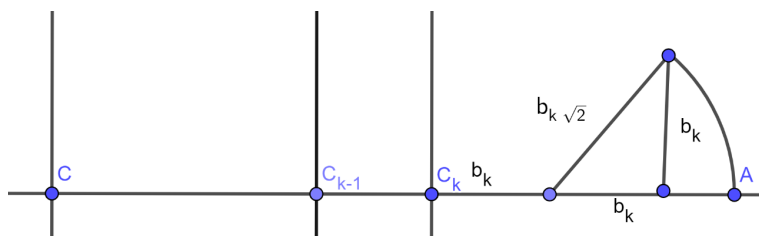
$$\text{Z rozdziału 2 wiemy, że } \omega = \frac{x_k}{b_k} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{a także na mocy (11) } q = \left(\frac{x_k}{x_{k-1}} \right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reasumując, relacje pomiędzy długościami odcinków na przyprostokątnych powstałych z punktów $B_K C_K$ do niej prostopadłymi (rys. rozdział 2) przedstawiają się następująco:

$$\frac{|AC_K|}{|C_{K-1}A|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{|AC_K|}{|C_{K-1}C_K|} = 1 + \sqrt{2} \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots$$

gdzie $C_0 = C$ $|AC_0| = x_0 = b$ $|AC_K| = x_k$ $|C_{K-1}C_K| = b_k$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$



Geometrycznie tę relację można przedstawić następująco (dla każdego cięcia $k = 1, 2, 3, \dots$) co wiąże się ze srebrnym podziałem każdego odcinka $|AC_K|$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$.

rys.6 ponieważ $t = \frac{x_k}{b_k} = 1 + \sqrt{2}$ jest rozwiązaniem równania $t^2 - 2t - 1 = 0$

Rzeczywiście

$\Delta = 8$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8}$ $t = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} > 0$ (odrzucaamy ujemne rozwiązanie, gdyż geometrycznie nie ma ono sensu). Rozwiązanie tego równania przyjęto nazywać srebrną liczbą, analogicznie do równania $t^2 - t - 1 = 0$, którego rozwiązanie przyjęto nazywać liczbą złotą.

Proponowany podział spełnia warunki poprzedniego zadania, tak więc pola trapezów będą się zmniejszały o $\frac{1}{2}$ tworząc skończoną sumę szeregu geometrycznego.

Przykład 2:

W przykładzie pierwszym wychodzimy z założenia, że pole aktualnie odcinanej części $\triangle ABC$ jest $\frac{1}{2}$ pola części poprzednio odciętej i w rezultacie doszliśmy do srebrnego podziału przyprostokątnej AC punktami C_K ($k = 1, 2, 3, \dots$). W tym przykładzie postępujemy odwrotnie, a mianowicie zakładamy, że punkty C_K ($k = 1, 2, 3, \dots$) dzielą odpowiednio AC w złotym stosunku, tzn.

$$\frac{|AC_K|}{|C_{K-1}A|} = \frac{|C_{K-1}C_K|}{|AC_K|} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \text{ czyli "całość } C_{K-1}A \text{ do części dłuższej } AC_K$$

ma się tak, jak część dłuższa AC_K do części krótszej $C_{K-1}C$, gdzie

$C_{K-1}A = AC_K + C_{K-1}C$ dla ($k = 1, 2, 3, \dots$) przy czym $C_0 \equiv C$ w $\triangle ABC$ prostokątnym o przyprostokątnej AC i kącie ostrym $\alpha = |\angle BAC|$

Przy przyjętych oznaczeniach (zobacz roz.2) mamy

$$14) \frac{x_{k-1}}{x_k} = \frac{x_k}{b_k} \Leftrightarrow \frac{x_{k-1}}{x_k} = \frac{x_k}{x_{k-1} - x_k} \Leftrightarrow x_k^2 = x_{k-1}^2 - x_{k-1}x_k$$

stąd równanie $t^2 - t - 1 = 0$, gdzie $t = \frac{x_{k-1}}{x_k}$ Dodatnim rozwiązaniem tego

równania jest złota liczba $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Rzeczywiście $\Delta = 1 + 4 = 5 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$

wtedy $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0, t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ zatem $\frac{x_{k-1}}{x_k} = \phi$ dla $(k = 1, 2, 3, \dots)$ i

zgodnie ze wzorem z podpunktu jedenastego mamy $q = \left(\frac{x_k}{x_{k-1}}\right)^2 = \frac{1}{\phi^2}$, zatem

$$15) P_{B_{K+1}} = \frac{1}{\phi^2} P_{B_K} \text{ dla } (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{Wówczas } \sum_{k=1}^{\infty} P_{B_K} = P_{B_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\phi^2}\right)^k = P_{B_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\phi^2}} = P_{B_1} \frac{\phi^2}{\phi^2-1}$$

$$\text{czyli } \sum_{k=1}^{\infty} P_{B_K} = \phi \cdot P_{B_1}, \text{ ponieważ } \phi^2 = \phi + 1$$

A wiedząc, że $\sum_{k=1}^{\infty} P_{B_K} = P_{\Delta ABC}$ (na mocy p. 12) otrzymujemy

$$P_{\Delta ABC} = \phi \cdot P_{B_1}$$

Wykazaliśmy, że nieskończone cięcie ΔABC zgodnie z przyjętą złotą zasadą podziału przyprostokątnej AC poprawnie i całkowicie rozkłada ΔABC na przeliczalną ilość części, których pola spełniają określone warunki

$$(P_{\Delta ABC} = \phi \cdot P_{B_1} \wedge P_{B_{K+1}} = \frac{1}{\phi^2} P_{B_K} \text{ dla } (k = 1, 2, 3, \dots))$$

Przykład 3:

Postaramy się udowodnić, że możliwe jest tego typu rozcinanie ΔABC prostokątnego z innym niż w przykładzie 2 udziałem złotej liczby, a mianowicie z warunkiem:

$$16) P_{B_{K+1}} = \frac{1}{\phi} P_{B_K} \text{ dla } (k = 1, 2, 3, \dots) \text{ (wszystkie parametry } \Delta ABC \text{ i ich znaczenia są}$$

identyczne takie, jak w rozdziale 2.)

W jakiej proporcji muszą znajdować się punkty cięcia C_K ($k = 1, 2, 3, \dots$)

przyprostokątnej AC ΔABC prostokątnego.

Otóż, przy założeniu, 16 ciąg $\{P_{B_K}\}_{k=1}^{\infty}$ jest też ciągiem geometrycznym o ilorazie

$$q = \frac{1}{\phi} \text{ gdzie } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \text{ jest liczbą złotą}$$

warunek 17) $\sum_{k=1}^{\infty} P_{B_K} = P_{\Delta ABC}$ powinien być spełniony, gdyż oznacza on, że suma

pól odciętych figur jest polem rozcinanego ΔABC . Faktycznie z warunków 16) i 17) otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} x_0^2 \operatorname{tg} \alpha = P_{B_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\phi}} \text{ czyli}$$

$$\frac{1}{2} x_0^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} (x_0^2 - x_1^2) \cdot \frac{\phi}{\phi-1} \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ stąd równanie}$$

$$(\phi - 1)x_0^2 = (x_0^2 - x_1^2)\phi \Rightarrow (\phi - 1) = \left(1 - \frac{x_1^2}{x_0^2}\right)\phi$$

$$\frac{x_1^2}{x_0^2} = 1 - \frac{\phi-1}{\phi} = \frac{1}{\phi}$$

otrzymany warunek $\frac{x_1}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{\phi}}$

przenosimy na wszystkie cięcia: $\frac{x_1}{x_0} = \frac{x_2}{x_1} = \dots = \frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{x_{k+1}}{x_k} = \dots = \frac{1}{\sqrt{\phi}}$

wtedy przyjęte rozcinanie ΔABC w punktach C_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) przyprostokątnej AC

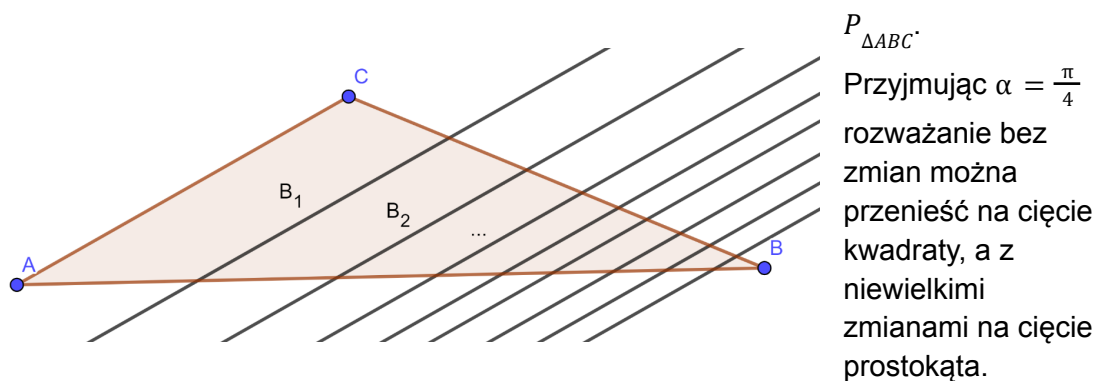
zachowujących proporcję $\frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{|AC_k|}{|AC_{k-1}|} = \frac{1}{\phi}$ a więc inaczej niż w przykładzie 2

w pełni i poprawnie rozcina trójkąt prostokątny ABC.

Zakończenie

Stosunkowo łatwo uogólnić przedstawione przeze mnie rozważania zastępując założenie prostokątności do przyprostokątnej linii cięć warunkiem ich równoległości

przy zachowaniu pozostałych założeń. Wówczas $\sum_{k=1}^{\infty} P_{B_k}$ powinien być zbieżny do



rys.7

Uzyskane proporcje mogą być użyteczne w ogólnych rozważaniach o figurach podobnych, ale to temat na zupełnie inną pracę...

SPIS TREŚCI:

Strony:

- s.1-Strona tytułowa.
- s.2-Wstęp.
- s.3-Informacja nauczyciela.
- s.4-Dane kontaktowe.
- s.5-Rozdział 1-"Podział trójkąta na figury o równych polach".
- s.9-"Nieskończony podział z zachowaniem proporcji cięcia".
- s.11-"Przykłady podziałów z zachowaniem proporcji cięcia".
- s.14-Zakończenie.
- s.15-Spis treści.
- s.16-Źródła.

Źródła

- <https://www.youtube.com/watch?v=WfPew1gRHR0>
- Corbalan Fernando, *Złota proporcja*, 2022, Hiszpania, Avenida Diagonal (na zlecenie national geographic), 2022, 978-84-1393-820-1.