

AKROBACJE NA TRAPEZIE



**“RADOŚĆ PATRZENIA I ROZUMIENIA JEST NAJPIĘKNIEJSZYM DAREM NATURY.”
A.EINSTEIN**

Dobór zadań i dowodów wykonany samodzielnie przez

Artur Mądrała klasa 8,

Rysunki z wykorzystaniem tabletu graficznego oraz programu komputerowego Paint
wykonane samodzielnie przez

Julia Mądrała klasa 7.

Szkoła Podstawowa im. Bohaterów walk o Niepodległość Polski w Izdebniku

ul. Krakowska 1, 34-144 Izdebnik, tel. 33 876 32 24, zsizdebnik@wp.pl

Rys historyczny.

Odniesienie do historii "Trapez" - greckie słowo, które w starożytności oznaczało „stół” (po grecku „trapedzion” oznacza stół, stół jadalny). Figura geometryczna została nazwana tak przez jej podobieństwo do małego stołu.

W „Początkach” (gr. Στοιχεῖα, łac. Elementa - główne dzieło Euklidesa, napisane około 300 lat pne. i poświęcone systematycznej konstrukcji geometrii) termin „trapez” jest używany nie we współczesnym, ale w innym sensie: dowolny czworobok (nie równoległobok). „Trapez” w naszym znaczeniu po raz pierwszy znajduje się u starożytnego greckiego matematyka Posidoniusa. W średniowieczu, według Euklidesa, każdy czworokąt (nie równoległobok) nazywano trapezem; dopiero w XVIII wieku. słowo nabiera nowoczesnego znaczenia.

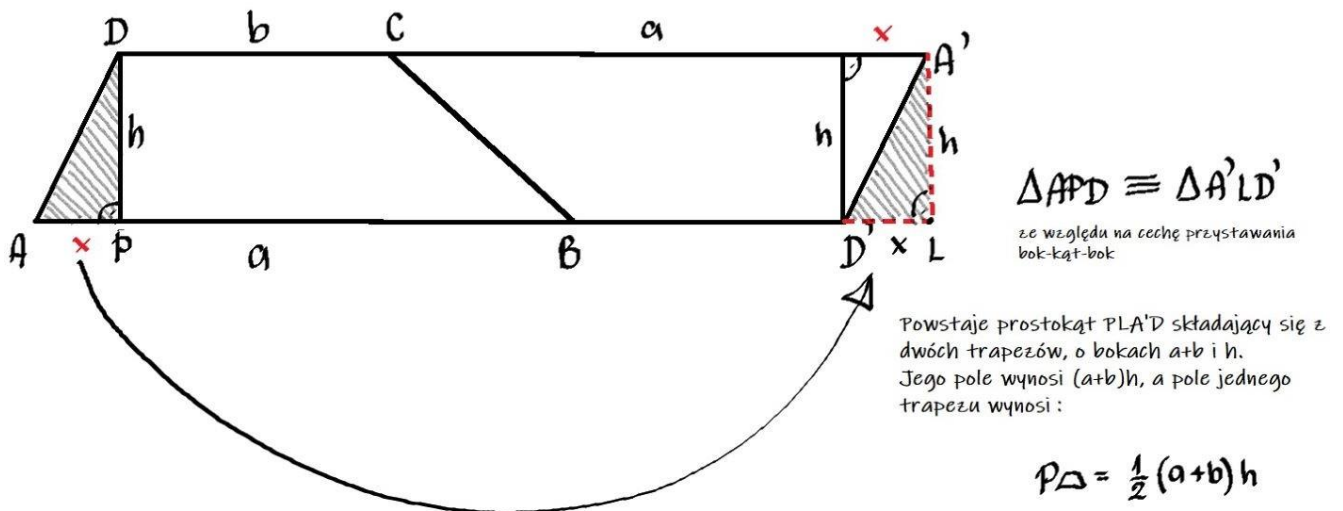
Wstęp.

Trapez jest czworokątem, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych.

Hm...wydawałoby się, że nie ma w nim nic ciekawego, nic przykuwającego uwagę, a jednak....jest on figurą niezwykłą, dlaczego? Dogłębne przeanalizowanie właściwości trapezów, daje wiele przydatnych własności i strategii w zadaniach dowodowych oraz ułatwia nam rozwiązywanie zadań w przypadku figur takich jak: kwadrat, równoległobok, romb oraz prostokąt.

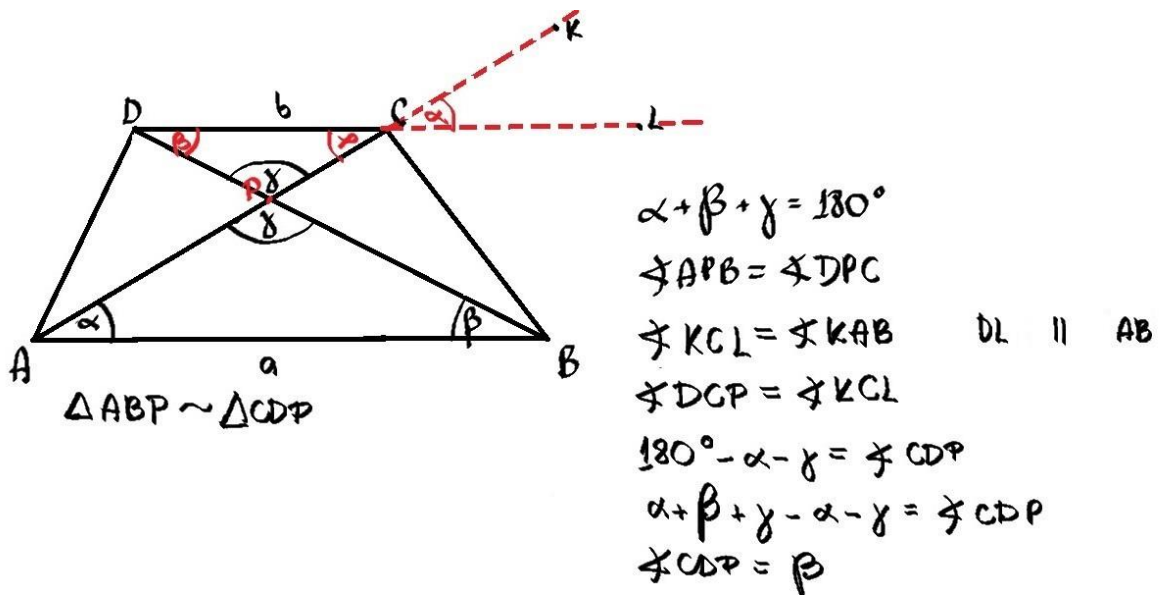
1. Pole trapezu

Pole trapezu:

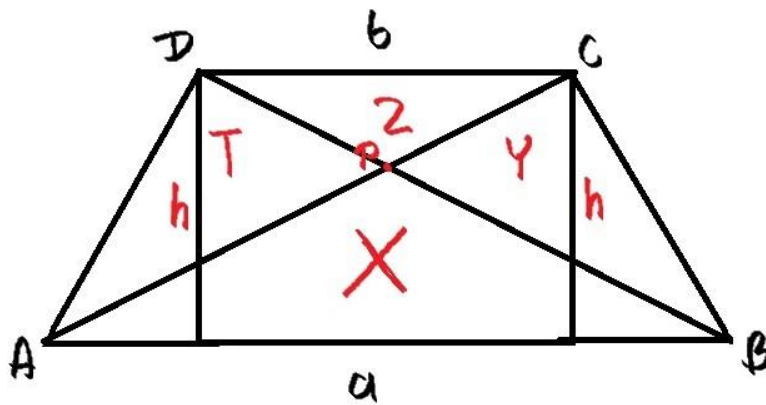


Powyżej przedstawiłem w jaki sposób udowodnić wzór na pole trapezu

2. Podobieństwo w trapezie



Powyżej udowodniłem podobieństwo trójkątów ABP i CDP



$$[APB] = X$$

$$[APD] = T$$

$$[BPC] = Y$$

$$[CPD] = Z$$

$$[ABC] = X + Y$$

$$[ABD] = X + T$$

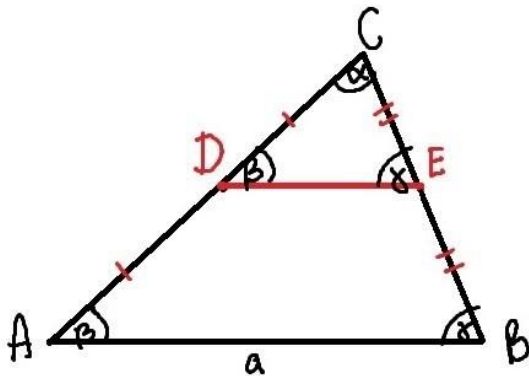
$$[ABC] = \frac{a \cdot h}{2} = [ABD]$$

$$[ABC] = [ABD]$$

$$X + Y = X + T$$

$$Y = T$$

Powyżej udowodniłem, że pola trójkątów APD i PBC są równe

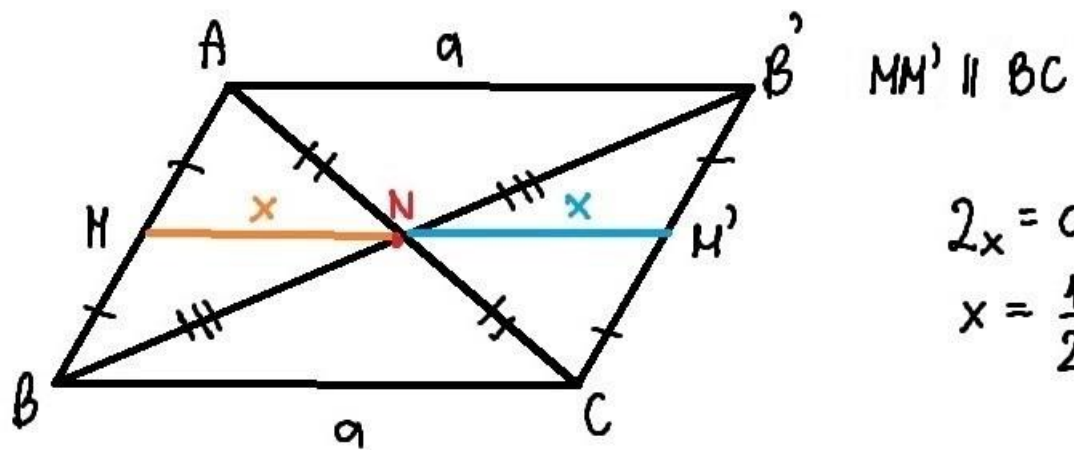


Z podobieństwa wynika, że odcinek DE jest równy połowie podstawy

$$|AD| = |DC|$$

$$|BE| = |EC| \quad \triangle ABC \sim \triangle CDE$$

$$DE \parallel AB \quad |DE| = \frac{1}{2}a$$

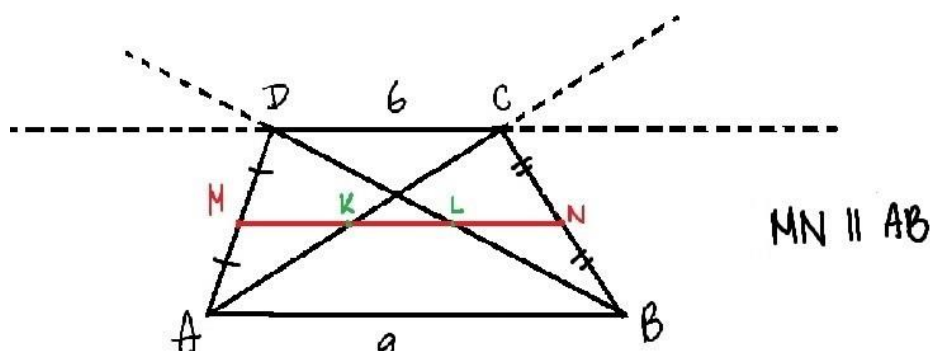


$$2x = a$$

$$x = \frac{1}{2}a$$

B' to odbicie punktu B względem punktu N
 $BCB'A$ to równoległobok (przekątne przecinają się w połowie)

Powyżej udowodniłem, że odcinek łączący środki ramion trójkąta wynosi połowę jego podstawy
 (dwoma metodami: metodą podobieństwa i równoległoboku)



własności
 trójkąta
 udowodnione
 wcześniej

$$|ML| = \frac{1}{2}a$$

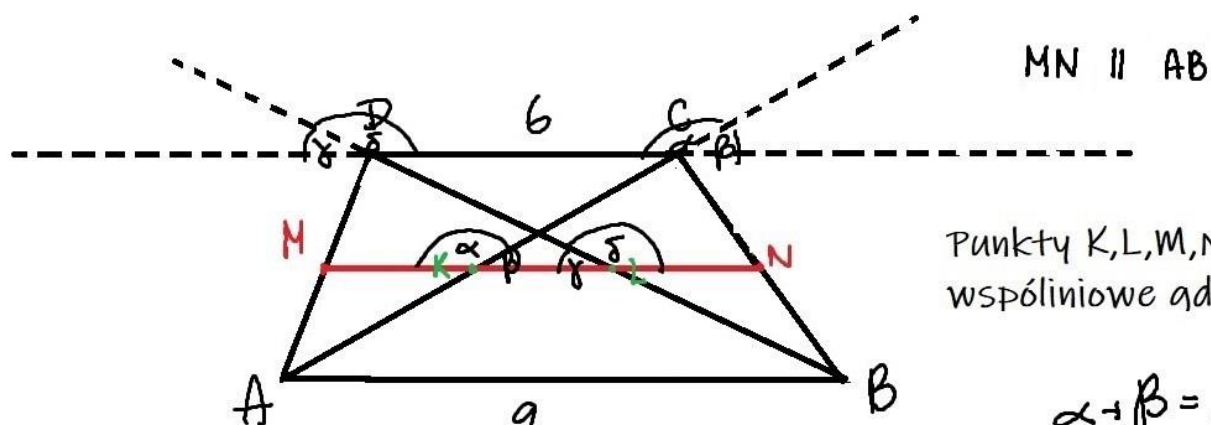
$$|LN| = \frac{1}{2}b$$

$$|LN| + |ML| = \frac{1}{2}(a+b)$$

Odcinek łączący środki ramion trapezu wynosi połowę sumy jego podstaw.

Powyżej udowodniłem, że odcinek łączący środki ramion trapezu jest równy połowie sumy jego podstaw*

*Powyższa własność trapezu zachodzi tylko, gdy punkty KLMN są współliniowe.



Punkty K, L, M, N są
wspólniowe gdy:

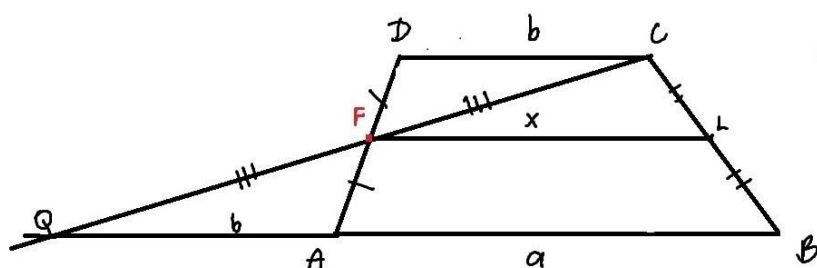
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\gamma + \delta = 180^\circ$$

Kąty te są równe 180
stopni na podstawie
kątów odpowiadających

3. Średnie w trapezie

- Średnia arytmetyczna



$FL \parallel AB$

$$|QF| = |FC|$$

$$\angle QFA = \angle CFB \Rightarrow \triangle QAF \equiv \triangle FCB$$

$$|AF| = |FB|$$

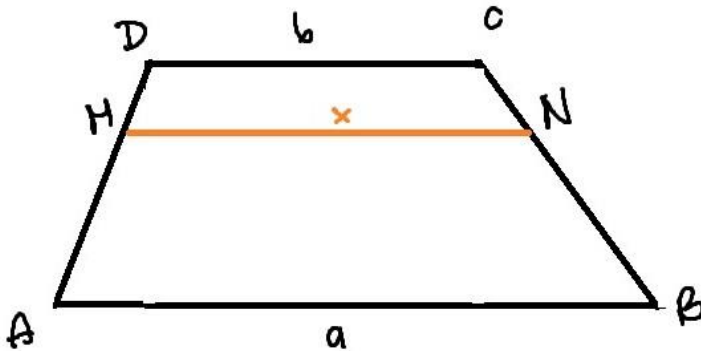
Po przeniesieniu trójkąta CFD w miejsce
AFQ, powstał trójkąt QCB, w którym
odcinek x łączy środki ramion trójkąta

$$\Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

Przedstawiony powyżej rysunek ilustruje średnią arytmetyczną w trapezie

○ średnia geometryczna

teza: odcinek MN dzieli trapez na dwa trapezy podobne



założenie:

$$\square HNCD \sim \square ABNM$$

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{a}$$

odcinek x to inaczej
średnia geometryczna
podstaw

$$x^2 = ab$$

$$x = \sqrt{ab}$$

○ średnia harmoniczna

$$\triangle APB \sim \triangle CPD$$

$$\frac{a}{b} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h-h_1}{h_1}$$

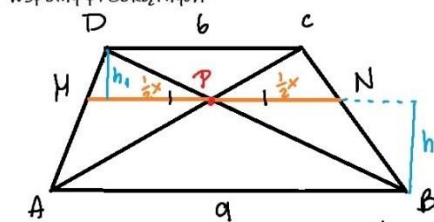
$$\frac{a}{b} = \frac{h}{h_1} - 1$$

$$\frac{h}{h_1} = \frac{a}{b} + 1$$

$$\frac{h}{h_1} = \frac{a+b}{b}$$

$$\frac{h_1}{h} = \frac{b}{a+b}$$

odcinek MN to odcinek równoległy do podstaw przechodzący przez punkt wspólny przekątnych



$$\frac{a+b}{2} (h_1 + h_2) = \frac{x+a}{2} h_2 + \frac{x+b}{2} h_1$$

$$(a+b)h = (x+a)(h-h_1) + (x+b)h_1$$

$$ah + bh = xh - xh_1 + ah - ah_1 + xh_1 + bh_1$$

$$bh = xh - ah_1 + bh_1$$

$$xh = bh + ah_1 - bh_1 \quad | : h$$

$$x = b + a \cdot \frac{h_1}{h} - b \cdot \frac{h_1}{h}$$

ZAŁOŻENIE: $MN \parallel AB \parallel CD$

$$|MN| = x$$

$$\text{Teza: } x = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$\begin{cases} h = h_1 + h_2 \\ h_2 = h - h_1 \end{cases}$$

$$x = b + a \cdot \frac{b}{a+b} - b \cdot \frac{b}{a+b}$$

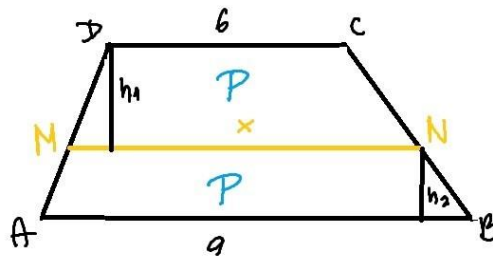
$$x = b + \frac{ab}{a+b} - \frac{b^2}{a+b}$$

$$x = \frac{ab + b^2 + ab - b^2}{a+b} = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{ab}}$$

$$x = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

○ średnia kwadratowa

Odcinek równoległy do podstaw dzielący trapez ABCD na dwa równe pola.



założenie:

$MN \parallel AB \parallel CD$

$$[ABNM] = [MNCB]$$

teza: $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

$$(x+b)h_1 = (x+a)h_2$$

$$② \quad xh_1 + bh_1 = xh_2 + ah_2$$

$$① \quad \frac{a+b}{2} (h_1 + h_2) = \frac{x+b}{2} h_1 + \frac{a+x}{2} h_2$$

$$ah_1 + ah_2 + bh_1 + bh_2 = xh_1 + bh_1 + ah_2 + xh_2$$

$$\begin{cases} ① \quad ah_1 + bh_2 = xh_1 + xh_2 \\ ② \quad xh_1 + bh_1 = xh_2 + ah_2 \end{cases}$$

$$① \quad h_1(a-x) = h_2(x-b)$$

$$② \quad h_1(x+b) = h_2(x+a)$$

① : ②

$$\frac{a-x}{x+b} = \frac{x-b}{x+a}$$

$$(a-x)(a+x) = a^2 - x^2$$

$$a^2 - x^2 = x^2 - b^2$$

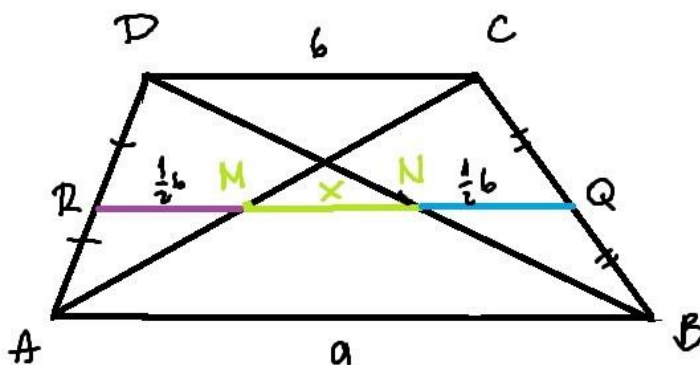
$$2x^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

4. Odcinek łączący środki przekątnych trapezu

odcinek łączący środki przekątnych trapezu: ($a > b$)



założenie:

M i N to środki przekątnych

teza: $MN \parallel AB$

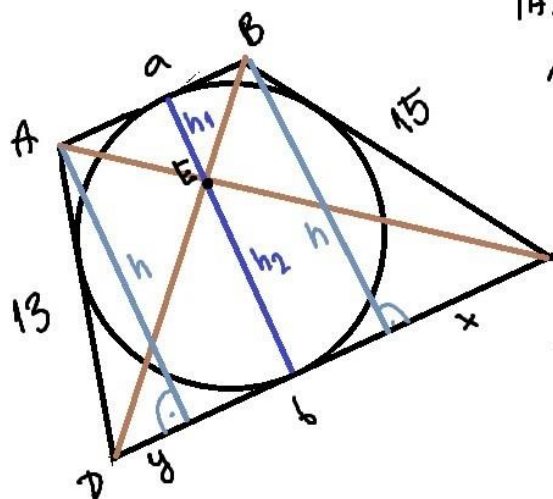
$$x = \frac{a-b}{2}$$

$$|MQ| = \frac{1}{2}a = x + \frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{2} = x$$

ta własność zachodzi tylko gdy punkty R, M, N, Q są współliniowe (co zostało udowodnione wcześniej)

5. Zadanie z trapezem

W trapez o polu 168 i ramionach długości 13 i 15 można wpisać okrąg. Przekątne dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole każdego z tych trójkątów.



$$|AD| + |BC| = |AB| + |DC| \Rightarrow 28 = a + b$$

wynika to z tego, że: jeżeli w czworokąt można wpisać okrąg, to oznacza, że sumy przeciwległych boków czworokąta są równe

$$[ABCD] = 168$$

$$168 = (a + b) \cdot h$$

$$168 = \frac{28 \cdot h}{2} \quad | :14$$

$$h = 12$$

$$x^2 + 12^2 = 15^2$$

$$x^2 = 81$$

$$x = 9$$

$$y^2 + 12^2 = 13^2$$

$$y^2 = 25$$

$$y = 5$$

$$b = a + x + y$$

$$a + b = 28 \quad | \quad a + a + 14 = 28$$

$$x + y = 14 \quad | \quad a = 7$$

$$b = a + 14 \quad | \quad b = 21$$

$$h_1 + h_2 = 12$$

$$\frac{b}{h_2} = \frac{a}{h_1} \Rightarrow b \cdot h_1 = a \cdot h_2$$

$$\begin{cases} 21h_1 = 7h_2 \\ h_1 + h_2 = 12 \end{cases} \quad | :7$$

$$\begin{cases} 3h_1 = h_2 \\ h_1 + 3h_1 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1 = 3 \\ h_2 = 9 \end{cases}$$

$$[ABE] = \frac{a \cdot h_1}{2} \Rightarrow \frac{3 \cdot 7}{2} = 10,5$$

$$[DEC] = \frac{b \cdot h_2}{2} \Rightarrow \frac{21 \cdot 9}{2} = 94,5$$

$$[BEC] = [AED]$$

$$[ABCD] = 10,5 + 94,5 + 2[BEC]$$

$$168 = 105 + 2[BEC] \quad | - 105$$

$$63 = 2[BEC]$$

$$31,5 = [BEC] \Rightarrow [AED]$$

odpowiedź: Pola trójkątów wynoszą odpowiednio : ABE - 10,5 , DEC - 94,5 , BEC - 31,5 , AED - 31,5

" Matematyka

*Co można policzyć?
chyba wszystko prawie'*

domy na ulicy i owady w trawie,

Ile gwiazd na niebie i aut na ulicy

i kompotów ile w babcinej piwnicy.

A wszystko zasługa jest Matematyki

dodawanie, dzielenie, mnożenia, wyniki

I dlatego zwana jest nauk królową , trzeba ją rozumieć

wszystko robić z głową! , , - autor nieznany

Bibliografia.

<https://podarilove.ru/pl/teorema-o-diagonalnych-trapecii-material-po-geometrii-na/>

<https://www.xxlo.pl/assets/Uploads/Zbior-zadan-z-matematyki-2.pdf>

<https://www.math-only-math.com/perimeter-and-area-of-trapezium.html>

Dziękuję za uwagę

Opinia nauczyciela matematyki dotycząca pracy ucznia z przedmiotu matematyka.

Szkoła Podstawowa im. Bohaterów walk o Niepodległość Polski w Izdebniku.

Artur Mądrała

Artur jest uczniem klasy ósmej Szkoły Podstawowej w Izdebniku. Od klasy piątej do chwili obecnej realizuje indywidualny program nauczania z matematyki i języka angielskiego. Artur szybko dał się poznać jako osoba utalentowana matematycznie, pracowita i zdyscyplinowana. Przedstawiane przez niego zadania często cechuje duża kreatywność i indywidualizm oraz niekiedy nietypowe podejście do rozważanego problemu. Jego wiedza znacznie przekracza wymagania edukacyjne dla szkoły podstawowej. Na zajęciach jest bardzo aktywny. Bez problemów rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności. Jest laureatem wielu konkursów matematycznych: Laureat międzynarodowego konkursu Kangur Matematyczny w roku szkolnym: 2017/18, (trzykrotnie uzyskał w nim wynik bardzo dobry- 2016/17, 2018/19, 2021/22 oraz dwukrotnie wyróżnienie 2019/20, 2020/21), Laureat konkursu Krakowska Matematyka w roku szkolnym 2018/19 (był także finalistą tego konkursu w roku szkolnym 2019/20). Obecnie dostał się do etapu wojewódzkiego Małopolskiego Konkursu Matematycznego, który odbędzie się 21 lutego 2023r.. Uczeń preferuje pracę samodzielną, ale również potrafi zgodnie pracować w grupie, czego dowodem jest napisana praca Akrobacje na trapezie. Treści w niej zawarte wykraczają poza podstawę programową nauczania matematyki w szkole podstawowej i jest napisana całkowicie samodzielnie.

Artur ciągle poszerza swoją wiedzę, umiejętności i zainteresowanie związane z matematyką. Uczęszcza na dodatkowe zajęcia dla uczniów uzdolnionych matematycznie. Interesuje się także innymi przedmiotami takimi jak: fizyka, chemia i informatyka i w tych dziedzinach także poszerza swoją wiedzę i osiąga sukcesy. /I miejsce w Miedzyszkolnym Konkursie Wiedzy Informatycznej dla uczniów Szkół Podstawowych. 2021/22/

nauczyciel matematyki
Zygmunt Sternal



Opinia nauczyciela matematyki dotycząca pracy ucznia z przedmiotu matematyka.

Szkoła Podstawowa im. Bohaterów walk o Niepodległość Polski w Izdebniku.

Julia Mądrała

Julia jest uczennicą klasy siódmej Szkoły Podstawowej w Izdebniku. Od klasy piątej do chwili obecnej realizuje indywidualny program nauczania z matematyki i plastyki. Julia jest utalentowana matematycznie, pracowita i zdyscyplinowana. Jest aktywna na zajęciach i wykonuje zadania o podwyższonym stopniu trudności. Swoimi wiadomościami i umiejętnościami znacznie wybiega poza program nauczania dla klasy siódmej. Jest laureatką wielu konkursów plastycznych i matematycznych: Czterokrotnie uzyskała bardzo dobry wynik w Międzynarodowym konkursie Kangur Matematyczny w roku szkolnym: 2017/18, 2018/19, 2019/20, 2020/21 oraz jedno wyróżnienie w roku szkolnym 2021/22). Jest laureatką konkursu Krakowska Matematyka 2021. W roku szkolnym 2022/23 dostała się do etapu wojewódzkiego Małopolskiego Konkursu Matematycznego, który odbędzie się 21 lutego 2023r.

Uczennica lubi pracować samodzielnie a także w grupie, czego dowodem jest napisana praca Akrobacje na trapezie. Treści w niej zawarte wykraczają poza podstawę programową nauczania matematyki w szkole podstawowej i jest napisana całkowicie samodzielnie. Julia ciągle poszerza swoją wiedzę, umiejętności i zainteresowanie związane z matematyką. Uczęszcza na dodatkowe zajęcia dla uczniów uzdolnionych matematycznie. Interesuje się także plastyką i językiem angielskim.

nauczyciel matematyki
Zygmunt Stenale

