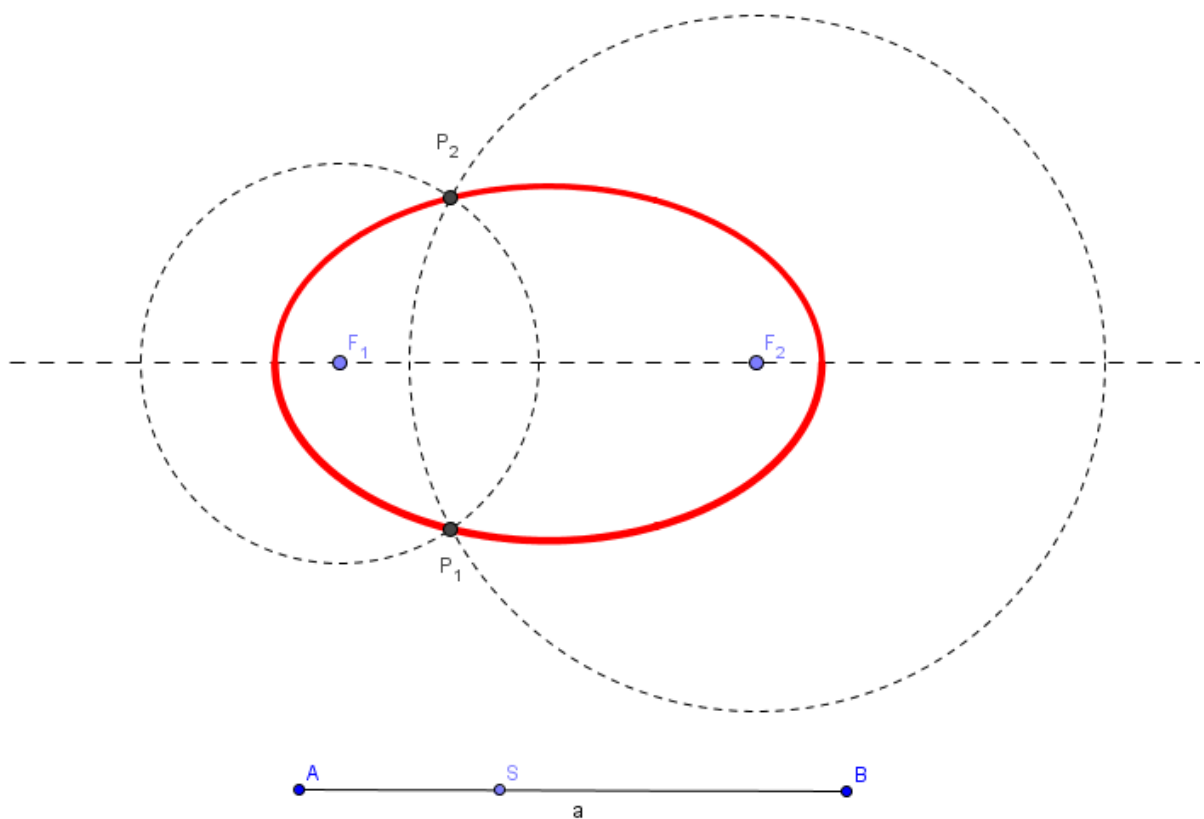


ELIPSA NA 10 SPOSOBÓW



Pracę wykonali:
Amelia Węgrzyn
Jerzy Kucharski
z XX Liceum Ogólnokształcącego w Krakowie

Czym jest elipsa

Jednymi z elementarnych figur w matematyce są krzywe, które nie tylko pojawiają się w matematyce, ale obserwujemy ją na co dzień, np. gdy spoglądamy z nadzieją w niebo i widzimy ślady samolotów, kiedy w euforii bawimy się na stoku i widzimy nasze własne ślady.

Jednak jest taka konkretna krzywa o istnieniu której nawet nie myślimy a bez niej życie mogło by być wiele trudniejsze (wiem, wiem, brzmi górnolotnie, ale postaram się to państwu wytłumaczyć). Bo jak idziemy sobie krakowskim parkiem doświadczeń i widzimy dziwny „talerz” zaczynamy do niego mówić a osoba po drugiej stronie drogi nas słyszy, to cieszymy się że fajna zabawka a nie zastanawiamy się w czym tkwi sekret . Jak jedziemy samochodem to nie zastanawiamy się dlaczego nie oślepiamy światłem drugiego kierowcy po prostu przyjmujemy to za fakt. A my chcemy wam dzisiaj przedstawić sprawce tych wszystkich zamieszkań, szanowną panią Elipsę.

Według definicji elipsa to miejsce geometryczne płaszczyzny dla których suma odległości od dwóch ustalonych punktów (ognisk elipsy) jest zawsze taka sama i równa wielkiej osi elipsy.

Nie wiem jak dla państwa, ale dla mnie na razie ta definicja jest niezrozumiała, więc swoją pracę zaczniemy od przedstawienia państwu elipsy w praktyce, oczywiście wrócimy do tej definicji, ale dopiero wtedy gdy w praktyce przedstawimy sobie wszystko co jest w niej zawarte.

Elipsa za pomocą sznurka

Na początku spróbujmy sobie nakreślić przykładową elipsę. Mimo że jest to skomplikowana krzywa to wystarczy zaopatrzyć się w sznurek, deseczkę i dwa gwoździe. Po prostu obieramy sobie dwa punkty (wbijamy w nie gwoździe) bierzemy sznurek (dłuższy niż odległość między tymi punktami) i rozpinamy go między dwoma gwoździami. Teraz, kreśląc linię, jaką wyznacza napięty sznurek możemy bez problemu nakreślić elipsę.

doświadczenie nr 1

Mamy już narysowaną elipsę w przestrzeni, ale jednak cały dzisiejszy świat opiera się na komputerach, więc spróbujemy przenieść to na ekran.

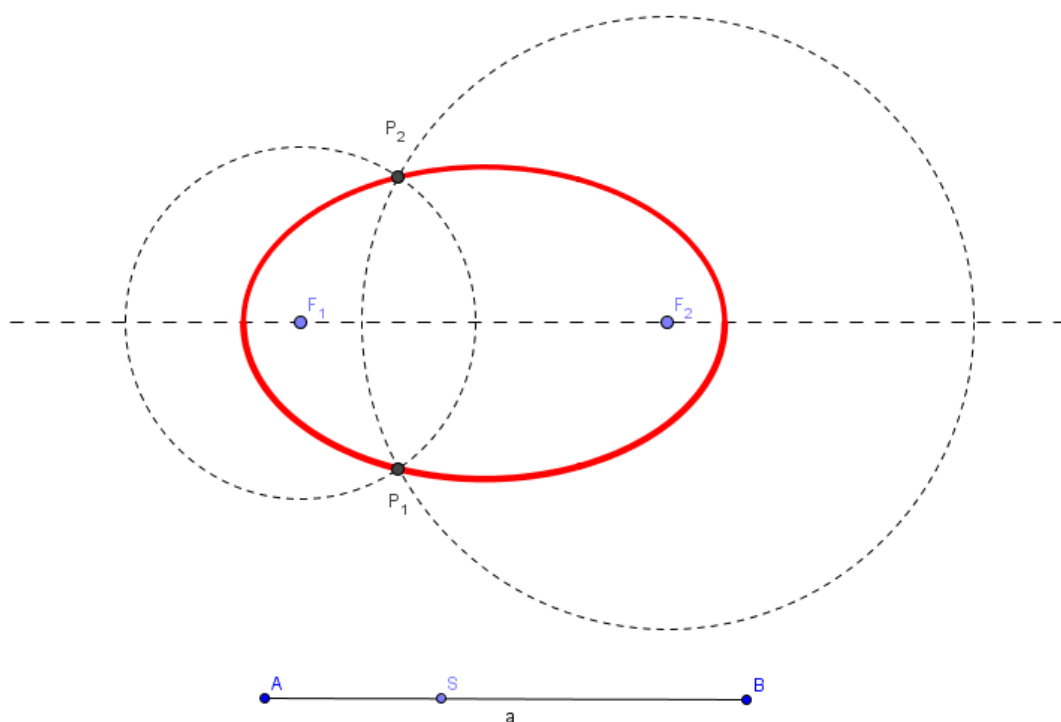
A teraz pokażemy jak stworzyć taką konstrukcję w GeoGebra:

- .na osi umieścimy punkty **$F1$** i **$F2$** .
- Skonstruujemy odcinek **AB** (w tym rysunku będzie stanowił rolę sznurka) który jest dłuższy niż odległość między **$F1$** a **$F2$** .
- Umieszczamy punkt **S** na odcinku **AB** .
- Za pomocą cyrkla kreślimy okrąg o promieniu **AS** i środku **$F1$** , i okrąg o promieniu **BS** i środku **$F2$** .
- Otrzymujemy punkty **$P1$** i **$P2$** będące częścią wspólną tych okręgów.
- Włączamy ślad punktów.
- Przesuwamy punkt **S** po odcinku **AB** .
- Ślad punktów **$P1$** i **$P2$** utworzy nam elipsę o ogniskach **$F1$** i **$F2$** .

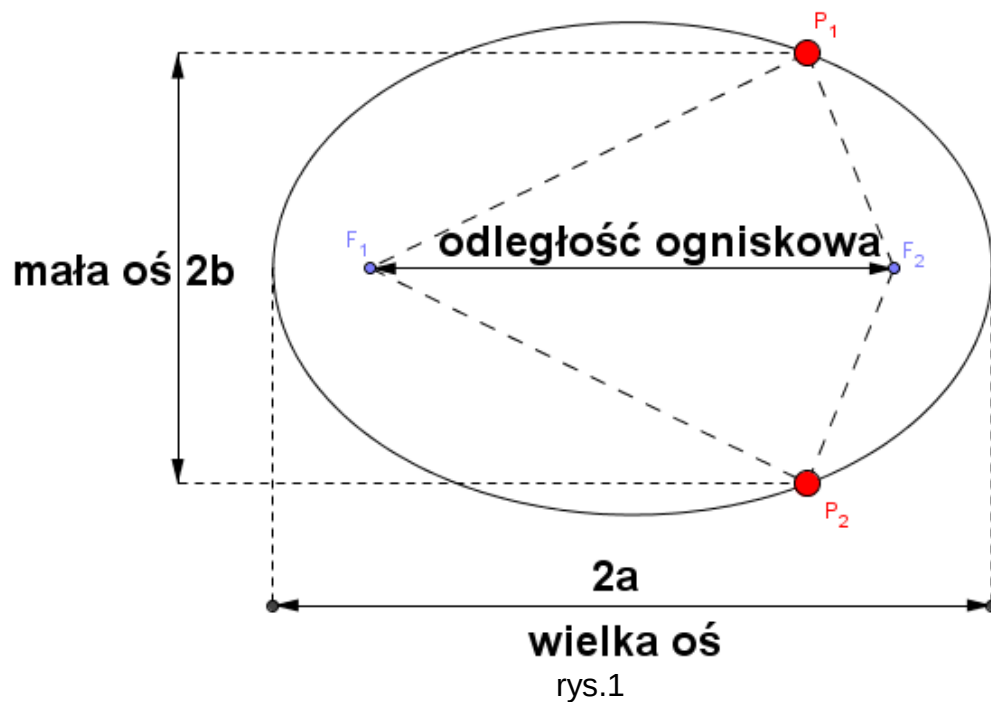
Uzyskaliśmy jedynie ślad elipsy który sam w sobie elipsą nie jest. Aby uzyskać elipsę zmieniającą się dynamicznie używamy narzędzia GeoGebry „*miejsce geometryczne*”.

Klikamy punkt **P1** i **S** i uzyskujemy połowę elipsy a następnie **P2** i **S** i uzyskujemy drugą połowę elipsy. Tym sposobem jesteśmy w stanie nakreślić elipsę w której możemy zmieniać położenie ognisk albo długość sznurka. Symbole ognisk elipsy **F1** i **F2** pochodzą od greckiego słowa Focus (ognisko).

plik elipsa_definicja.ggb

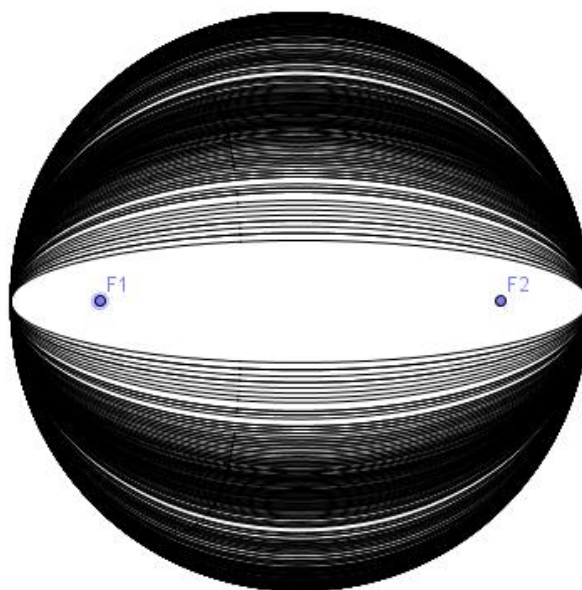


Skoro już wiemy czym jest ognisko to wytłumaczmy sobie kolejne pojęcia. Na przykład odległość ogniskowa to odległość między ogniskami elipsy i według prawideł rządzących matematyką oznaczamy tą odległość jako **2c**. Podobnie mianem **2b** określamy małą oś elipsy, czyli odległość między parą bliższych wierzchołków elipsy, a odległość między parą dalszych odcinków elipsy nazywamy wielką osią i oznaczamy jako **2a**.



Skonstruujmy sobie teraz elipsę w programie GeoGebra i trochę się nią pobawmy. Na początku zmieńmy odległość między ogniskami elipsy nie zmieniając długości „sznurka”, otrzymamy wtedy różne elipsy, należące do tej samej rodziny. Można zauważyć, że nie zmienia się ich wielka oś. Zmienia się jedynie oś mała. Z tego możemy wywnioskować że długość „sznurka” ma wpływ na wielkość elipsy zaś odległość ognisk na jej kształt.

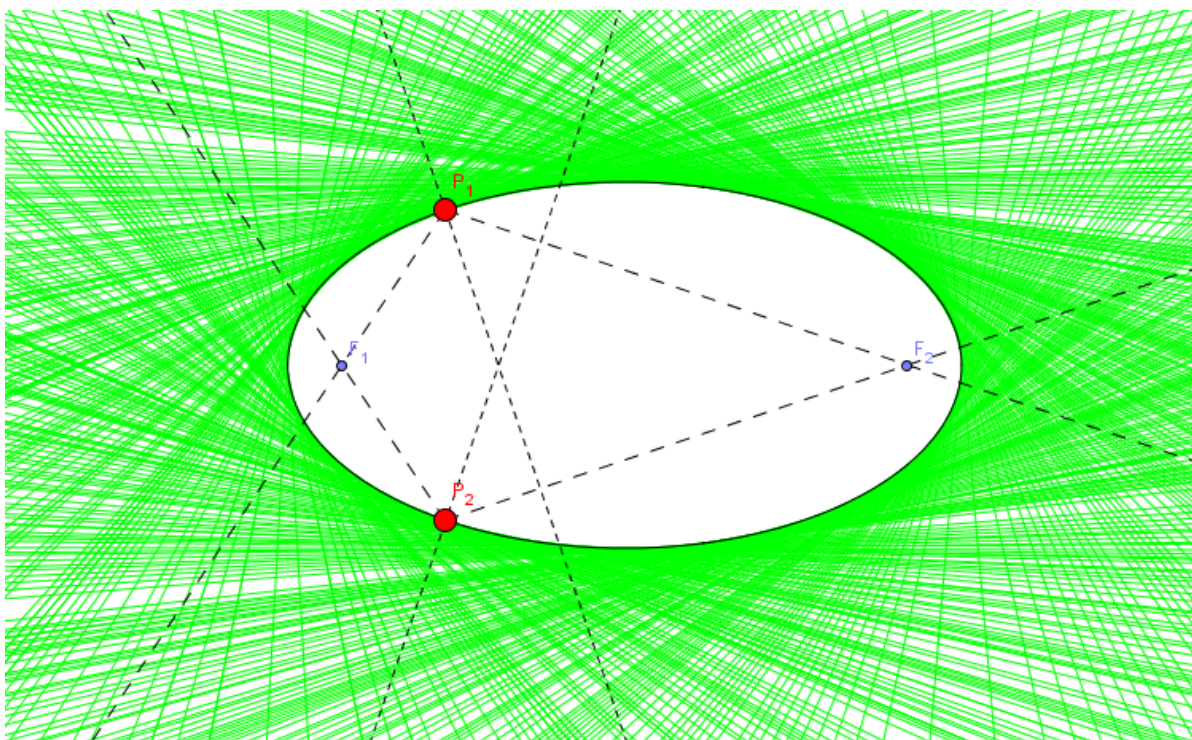
plik elipsa_kształt_elipsy.ggb



Obwiednia elipsy – sposób 1

Otwieramy plik z definicją elipsy i tworzymy półproste P_1F_1 i P_1F_2 oraz P_2F_1 i P_2F_2 . Tym sposobem powstają dwa kąty $F_1P_1F_2$ i $F_1P_2F_2$. W następnym kroku tworzymy dwusieczne tych kątów. W punktach P_1 P_2 przeprowadzamy proste prostopadłe do dwusiecznej kąta. Jeżeli włączymy ślad i będziemy poruszać punktem S wykreślone proste są styczne do tej elipsy a elipsa jest obwiednią rodziny stycznych do tej elipsy.

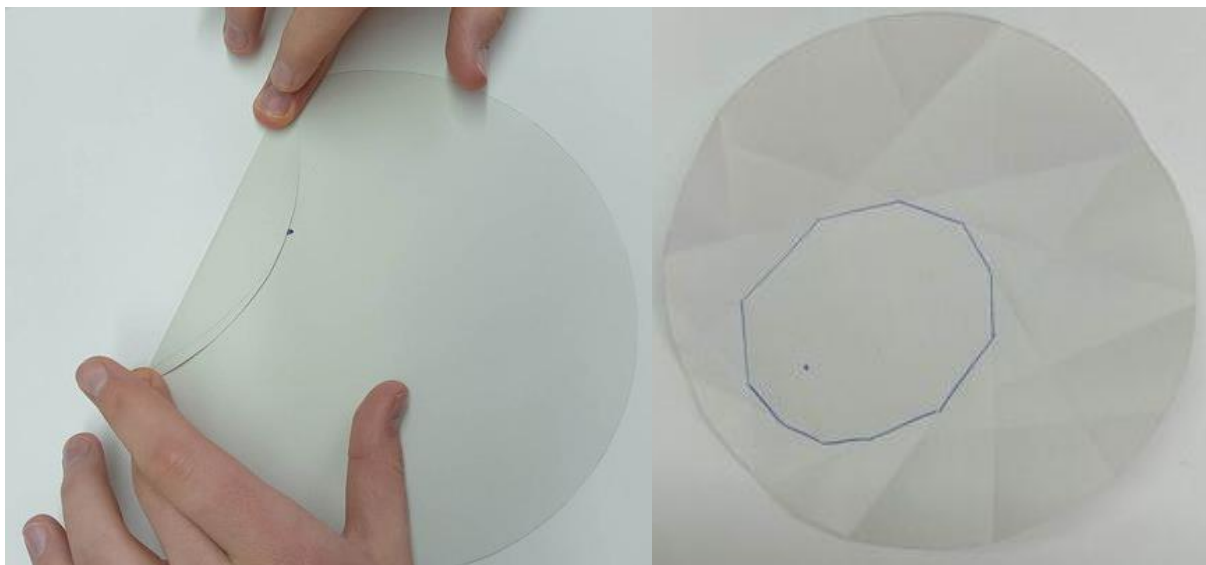
Plik *elipsa_obwiednia_sposób_1.ggb*



Elipsa z kartki papieru

Odejdźmy na chwilę od komputera, weźmy kartkę w kształcie koła, zaznaczmy na niej losowy punkt (nie będący środkiem tego koła) i zginajmy tę kartkę tak aby ten punkt zawsze stykał się z krawędzią okręgu. W ten sposób skonstruowaliśmy najprostszy model obwiedni elipsy. Oczywiście nie jest to dokładne, będzie tym dokładniejsze im więcej razy zegnijemy kartkę

Doświadczenie nr 2



Obwiednia elipsy – sposób 2

Inną ciekawą konstrukcją przy której wykorzystamy obwiednię będzie tworzenie elipsy z dowolnego koła.

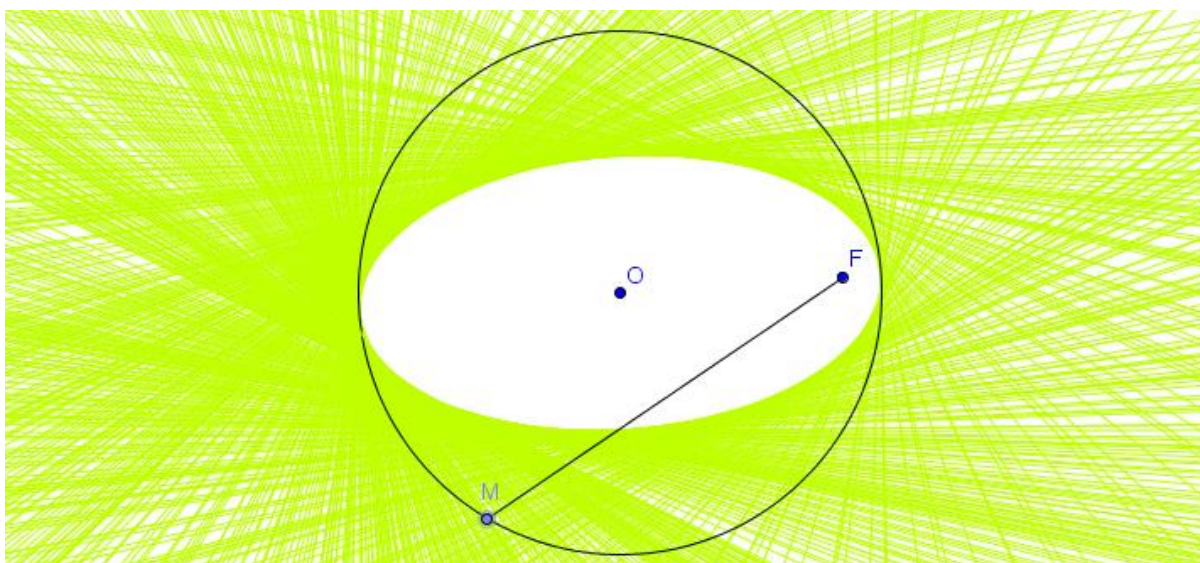
W GeoGgebrze rysujemy dowolny okrąg.

Obieramy dowolny punkt F który będzie ogniskiem elipsy, i punkt M który leży na okręgu

Tworzymy odcinek FM i prostą m prostopadłą do niego i przechodzącą przez punkt M

Teraz poruszając punktem M tworzymy obwiednie elipsy o ognisku w punkcie F .

Plik elipsa_obwiednia_sposób_2.ggb



Elipsa jako zbiór środków okręgów

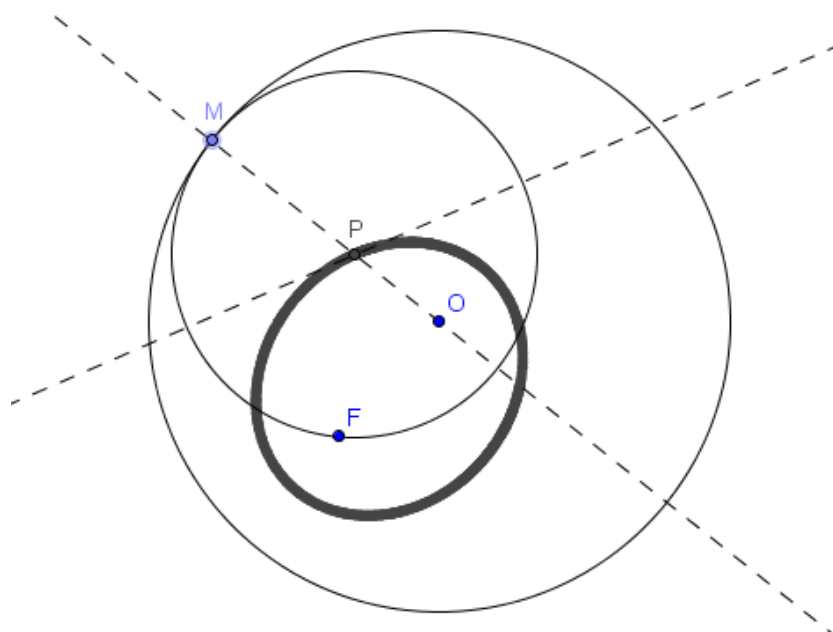
Następną konstrukcją którą wykonamy będzie elipsa jako zbiór środków pewnych okręgów.

- Utwórzmy okrąg o środku O i dowolnym promieniu R
- Obierzmy dowolny punkt M na tym okręgu
- Obierzmy punkt F należący do wnętrza koła tego okręgu
- Skonstruujmy okrąg przechodzący przez punkt F styczny wewnętrznie do danego okręgu w punkcie M .

Aby skonstruować taki okrąg musimy wyznaczyć prostą normalną przechodzącą przez punkty O i M , to na niej będzie leżał jego środek. Skoro punkty F i M mają leżeć na konstruowanym okręgu, to jego środek będzie leżał na symetralnej odcinka FM . Teraz wystarczy znaleźć punkt wspólny obu prostych – to środek P poszukiwanego okręgu.

- Wykorzystując narzędzie *włącz ślad* możemy zaobserwować, jaką krzywą wykreśli punkt P w trakcie poruszania punktem M po okręgu bazowym.

plik elipsa_zbiór_środków_okręgu.ggb

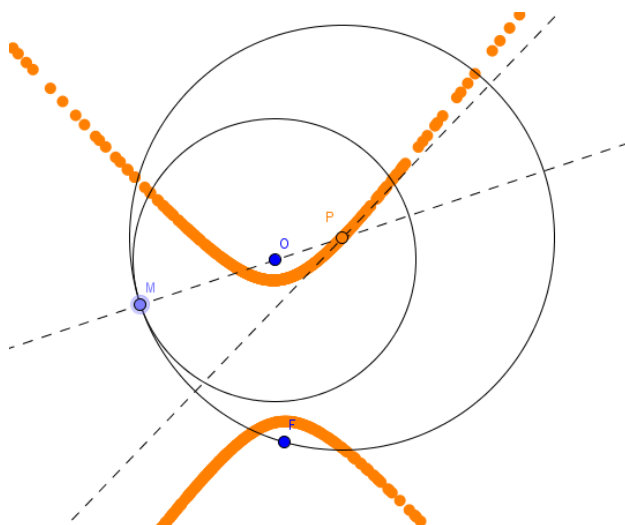


$$|FP| + |PO| = \text{const}$$

$$(|PM| = |FP|)$$

$$|PM| + |OP| = OM = \text{constans}$$

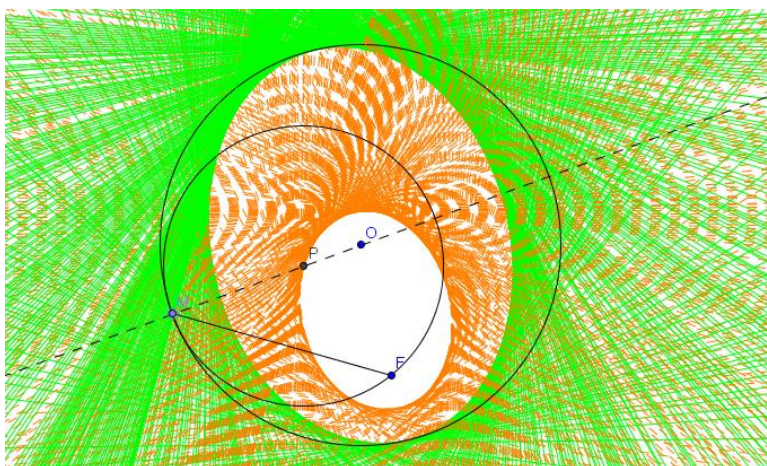
Spróbujmy teraz wyciągnąć punkt F poza okrąg. Ponownie poruszamy punktem M po okręgu. Punkt P w tym wypadku wykreśla hiperbolę



Obwiednia elipsy – sposób 3

Gdyby spróbować stworzyć elipsę wykorzystując opcję symetralnej dla odcinka FM , to zauważymy związek między tą konstrukcją a poprzednią, więc spróbujmy to umieścić w jednym okręgu.

Plik elipsa_obwiednia_sposób_3.ggb



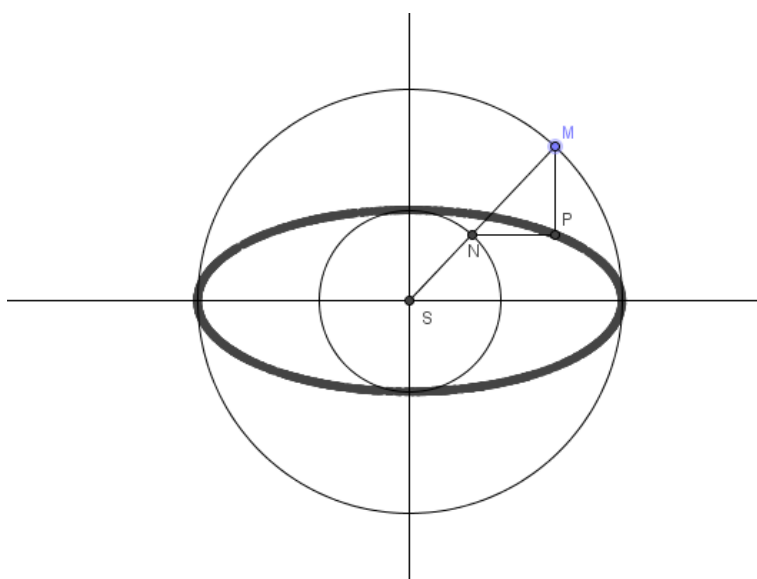
Uzyskane elipsy są tego samego kształtu ale jednokładne. Mają wspólne ognisko F i wydaje się że ono jest środkiem tej jednokładności.

Elipsa na bazie dwóch okręgów

Wiemy już jak skonstruować elipsę za pomocą obwiedni, z dowolnego okręgu. Teraz spróbujemy narysować elipsę z użyciem dwóch okręgów gdzie jeden znajduje się w drugim.

Kreślimy dwa okręgi, wyznaczamy na większym punkcie **M** który porusza się po okręgu. Promień tego koła przecina mniejszy okrąg w punkcie **N**. Proste prostopadłe do dwóch osi poprowadzone przez te punkty przecinają się w punkcie **P**. Punkt **P** w trakcie poruszania punktem **M** po okręgu wykreśla elipsę. W tej konstrukcji można zauważyć powinowactwo osiowe prostokątne.

Plik elipsa_na_bazie_dwóch_okręgów.ggb



Elipsa jako wierzchołek ruchomego kwadratu

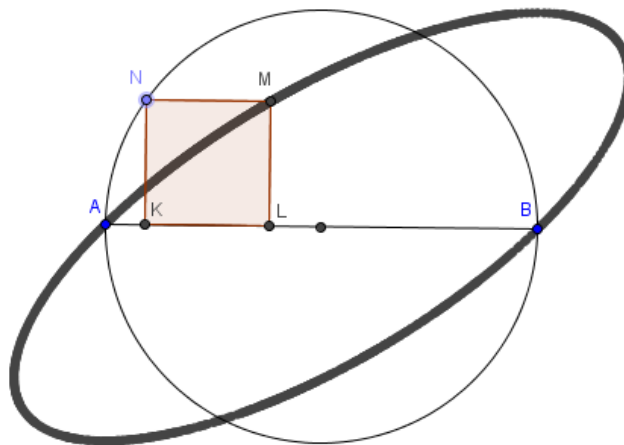
Skoro jesteśmy w stanie narysować elipsę przy użyciu dwóch okręgów to rodzi się pytanie czy można ją stworzyć przy użyciu okręgu i kwadratu. Akurat można. Bierzemy koło o średnicy **AB**.

Na półokręgu tego półkola obierzemy dowolny punkt **N**. Budujemy kwadrat **KLMN** tak, by punkty **K** i **L** leżały na średnicy **AB**.

Kiedy my poruszamy punktem **N** po okręgu to wierzchołek **M** kreśli nam naszą ukochaną panią elipsę.

Kiedy w tej konstrukcji poruszamy punktem **N** jego ślad kreśli nam tak zwaną złotą elipsę, do dość nowo odkryty obiekt charakteryzujący się tym że długość wielkiej osi podzielona przez średnicę daje nam złotą liczbę oraz długość średnicy do małej osi daje nam złotą liczbę

Plik elipsa_wierzcholek_kwadratu.ggb



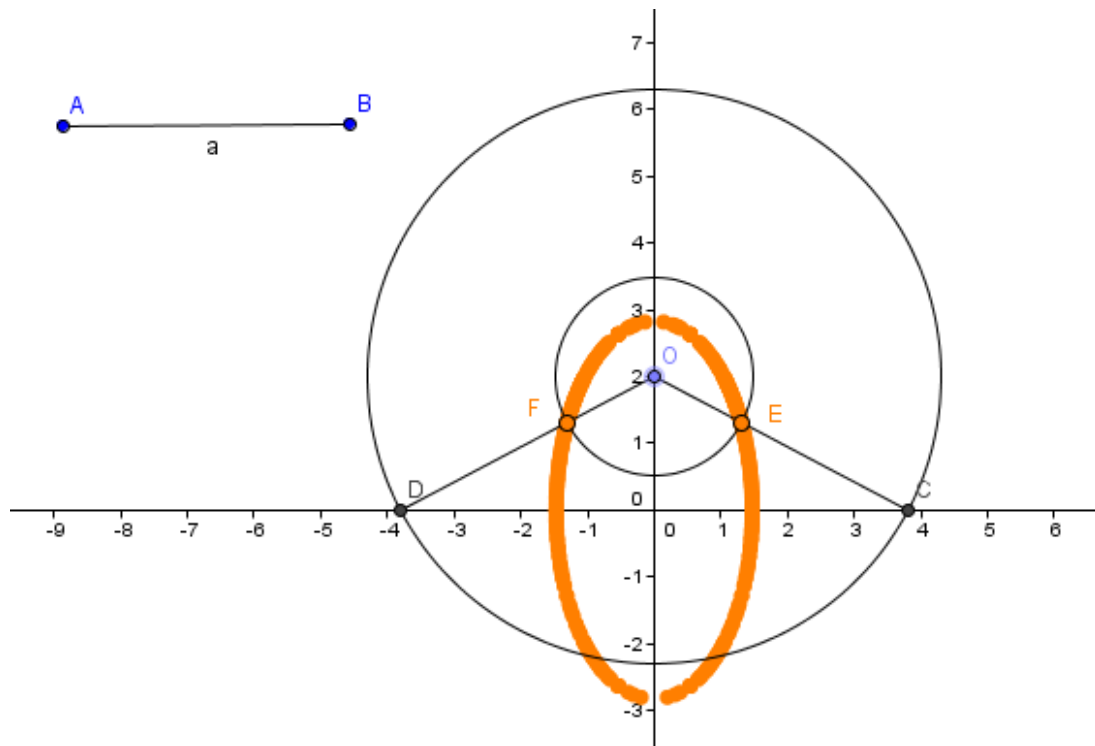
Cyrkiel eliptyczny

Czy można skonstruować elipsę za pomocą urządzenia mechanicznego?. Jednym z nich które mogą nam do tego posłużyć jest cyrkiel eliptyczny nazywany też elipsografem. Zasada jego działania jest dość prosta: na jednej listewce jest zamontowany pisak który kreśli elipsę w czasie gdy listewki ślizgają się po krzyżu.

Utwórzmy taki cyrkiel w programie GeoGebra.

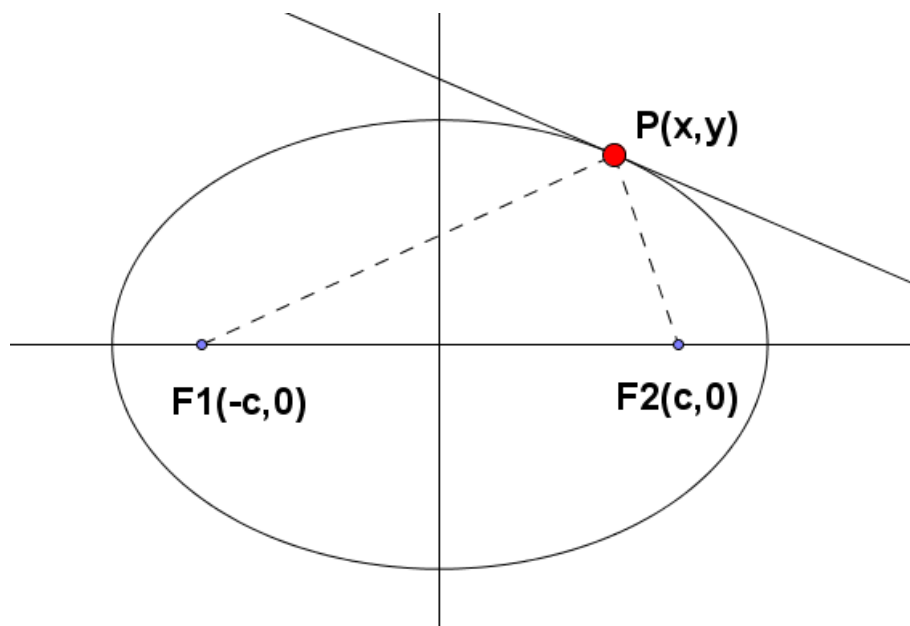
Plik elipsa_cyrkiel_eliptyczny.ggb

- Na osi **OY** obieramy punkt **O**
- Konstruujemy pomocniczy odcinek **a**
- Konstruujemy okrąg o środku **O** i promieniu **a**
- Obieramy punkt **C** będący punktem przecięcia powstałego okręgu z osią **OX** i tworzymy odcinek **OC**
- Obieramy punkt **E** na odcinku **OC**
- Konstruujemy okrąg o środku **O** i przechodzący przez punkt **E**
- Obieramy punkt **D** będący punktem przecięcia osi **OX** oraz większego okręgu, różny od punktu **C**
- Konstruujemy odcinek **OD** i punkt **F** będący punktem przecięcia tego odcinka z okręgiem przechodzącym przez punkt **E**
- Włączamy ślad punktów **E** i **F** a następnie poruszamy punktem **O** po osi **OY**
- Wielkość powstałej elipsy jest zależna od długości odcinka **a**, natomiast jej kształt od położenia punktu **E** na odcinku **OC**



Równanie elipsy

Skoro już wiemy jak zrobić elipsę graficznie to pomówmy trochę o jej własnościach.



Współrzędne ognisk wynoszą więc $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

Niech $P(x,y)$ będzie dowolnym punktem elipsy.

Z określenia elipsy wynika, że: $F_1P + F_2P = 2a = \text{const}$

Ale $F_1P = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, zaś $F_2P = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Zatem: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$

Podnosząc to równanie stronami do kwadratu otrzymamy:

$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 + 2 \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2$$

Co po przekształceniu daje równanie:

$$2 \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - (x+c)^2 - y^2 - (x-c)^2 - y^2$$

Podnieśmy je stronami do kwadratu

$$4 \cdot [(x+c)^2 + y^2] \cdot [(x-c)^2 + y^2] = [4a^2 - (x+c)^2 - 2y^2 - (x-c)^2]^2$$

I przekształcamy każdą z jego stron. Lewa strona przyjmie postać:

$$\begin{aligned} L &= 4 \cdot [x^2 + c^2 + 2xc + y^2] \cdot [x^2 + c^2 - 2xc + y^2] = \\ &= 4 \cdot [(x^2 + y^2 + c^2) + 2xc][(x^2 + y^2 + c^2) - 2xc] = \\ &= 4 \cdot [(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2] \end{aligned}$$

Natomiast prawą stronę można doprowadzić do postaci:

$$\begin{aligned} P &= [4a^2 - x^2 - 2xc - c^2 - y^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2]^2 = [4a^2 - 2(x^2 + y^2 + c^2)]^2 = \\ &= 4[2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2)]^2 = 4[4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + (x^2 + y^2 + c^2)^2] \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony równania $L = P$ przez 4 i redukując po obu stronach te same wyrażenia otrzymamy wyrażenie w postaci:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2c^2 &= 4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 - 4a^2c^2 + (x^2 + y^2 + c^2)^2 \\ -4x^2c^2 &= 4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 - 4a^2c^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę znaną już zależność:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

I wstawiając ją do równania (*), otrzymamy:

$$\begin{aligned} -4x^2(a^2 - b^2) + 4a^2x^2 + 4a^2y^2 + 4a^2(a^2 - b^2) &= 4a^4 \\ -4a^2x^2 + 4b^2x^2 + 4a^2x^2 + 4a^2y^2 + 4a^4 - 4a^2b^2 &= 4a^4 \\ 4b^2x^2 + 4a^2y^2 &= 4a^2b^2 \end{aligned}$$

Dzieląc stronami ostatnie równanie przez $4a^2b^2$ otrzymamy równanie:

znalazł się skupiony tłum. Kapłan szeptał słowa „... Ludu mój ludu, jak mnie nie posłuchasz to smok połknie słońce..” Głos kapłana zwielokrotniony na powierzchni elipsoidy robił wrażenie, jakby sam Ozyrys przemawiał do ludu. W tym dniu miało też nastąpić zaćmienie słońca, co już wówczas kapłani potrafili przewidzieć na podstawie obliczeń astronomicznych. Lud był zbuntowany, ale w momencie rozpoczęcia zaćmienia zrozumiał swój „błąd”. Ozyrys ponownie ustami kapłana wyszeptał „... skoro posłuchacie to słońce powróci na swoje miejsce..” lud zbuntował się przeciw faraonowi i tym samym kapłani osiągnęli swój cel. Tak więc matematyka posłużyła do niecných rozgrywek politycznych.



W obecnych czasach nadal chętnie sięgamy po elipsę, na przykład w budowie muszli koncertowych gdzie w jednym z ognisk siedzi artysta a w drugim siedzą słuchacze. Przez takie budowanie jesteśmy w stanie uzyskać o wiele lepsze efekty bez żadnego nagłośnienia. A jeśli umieścimy takie dwie muszle w odpowiedniej odległości od siebie i odpowiednio je wyprofilujemy, to osobę mówiącą do jednej z nich będzie słyszeć tylko osoba stojąca przy drugiej.

Jednak elipsa oprócz własności akustycznych ma też właściwości optyczne dlatego jest wykorzystywana w produkcji samochodów, a dokładnie w produkcji świateł odpowiednim profilowaniem żeby światło oświetlało drogę a nie oślepiało drugiego kierowcę. Tu jednak jest potrzebne jedno ognisko odpijające światło żarówki od lustra i dlatego jest to tym razem parabola.

Więc jak widać mimo że przez niektórych niedoceniana i omijana, to jednak na przykładzie elipsy widać że geometria rządzi naszym życiem, więc warto ją znać i stosować na co dzień.