

MODELE PLASTERKOWE 3D



**Praca wykonana przez uczennice XX Liceum Ogólnokształcącego im. L. Staffa
w Krakowie:**

Czaplak Magdalenę

Kajce Milenę

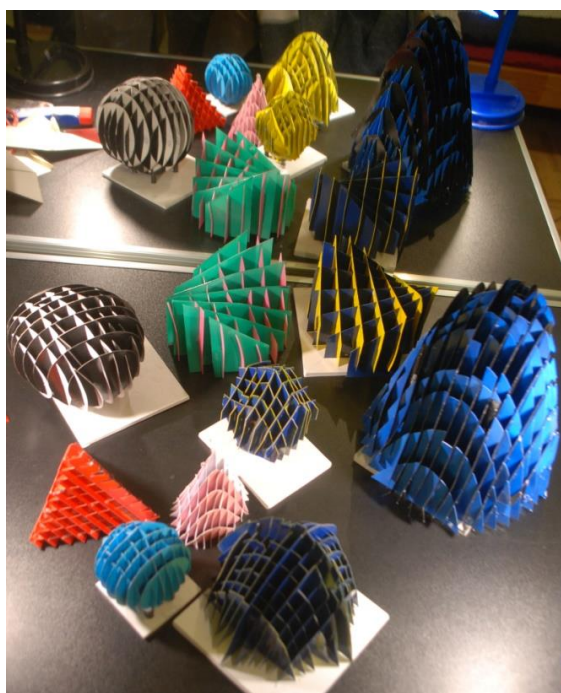
Kowalską Karolinę

Kraków luty 2022

WSTĘP

Nasza przygoda z bryłami plasterkowymi rozpoczęła się w październiku 2019 roku. Byliśmy wtedy uczennicami pierwszej klasy Liceum Ogólnokształcącego, Aktualnie jesteśmy w klasie trzeciej. Nasza nauczycielka matematyki, pani mgr Iwona Sitnik-Szumiec, współpracuje z panem dr Bronisławem Pabichem, pracującym w naszej szkole - XX Liceum Ogólnokształcącym jako wolontariusz. Wolontariat ten jest realizowany w ramach patronatu, jaki Oddział Krakowski Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki, sprawuje nad nauczaniem matematyki w naszej szkole. Pan dr Bronisław Pabich prowadzi koło matematyczne dla zainteresowanych uczniów. Zgłosiliśmy się do prac w tym kole. Bardzo zaciekały nas figury stworzone z form plasterkowych. Chcieliśmy dowiedzieć się więcej, jak dokładnie one powstają oraz spróbować własnych sił przy wykonywaniu takich modeli. Jak się okazało, wcale nie jest to taka prosta sztuka, lecz do dzisiaj z przyjemnością, wraz z panem doktorem Pabichem, obmyślamy powstawanie nowych form plasterkowych.

Czym jest w ogóle **forma plasterkowa**? Możemy to opisać własnymi słowami jako specyficzny trójwymiarowy model bryły wykonany z płaskich przekrojów tej bryły, które zawierają się w przecinających się prostopadle płaszczyznach. Na poniższej fotografii przedstawiamy kilka takich modeli wykonanych przez nasz zespół.



1. FORMA PLASTERKOWA CZWOROŚCIANU FOREMNEGO

Pierwszą formą slajсовą (plasterkową), którą wykonaliśmy, był czworościan foremny, bryła, którą znamy jeszcze ze szkoły podstawowej.

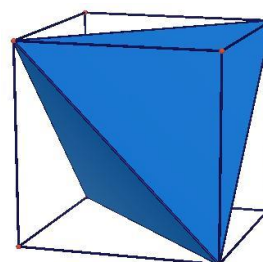
Formy plasterkowe (z angielskiego **sliceforms**) można projektować na ekranie komputera na kilka sposobów. Jednym z nich jest użycie darmowego programu do konstruowania obiektów przestrzennych SketchUp.

Opiszmy teraz sposób projektowania modelu w tym programie.

Kreślimy bryłę, którą chcemy podzielić na plasterki. W naszym przypadku będzie to czworościan foremny. Taki czworościan można umieścić w sześcianie, tak, by jego wierzchołki były wierzchołkami sześcianu. Dlatego najpierw konstruujemy w programie SketchUp sześcian. Przyjmijmy za długość krawędzi sześcianu wielkość np. 10 cm.

Rysunek 1 ilustruje tę sytuację.

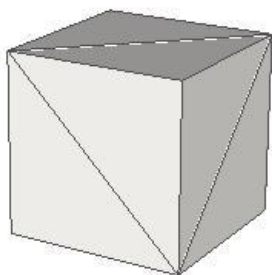
Z tego względu, że sześcian ma sześć ścian, a czworościan sześć krawędzi, krawędzie tego czworościanu muszą zawierać się w ścianach sześcianu, a ponieważ łączą wierzchołki sześcianu, krawędzie te są przekątnymi ścian sześcianu. Dlatego też wykreślimy sześć odpowiednio wybranych przekątnych sześcianu, by utworzyć krawędzie poszukiwanego czworościanu foremnego.



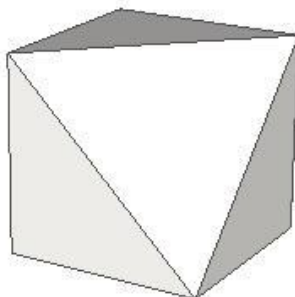
rys. 1

Do kreślenia przekątnych sześcianu używamy narzędzia **Linia (Line)**  Aby prawidłowo wybrać te przekątne, posłużymy się powyższym rysunkiem.

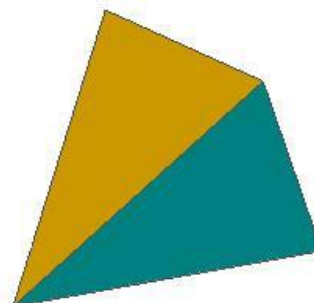
Po wykreśleniu przekątnych, będziemy usuwać narzędziem **Gumka (Eraser)**  wszystkie krawędzie sześcianu tak, by odsłonić szkielet czworościanu foremnego. Rysunki 2, 3 i 4 ilustrują kilka faz tworzenia tego czworościanu foremnego.



rys. 2

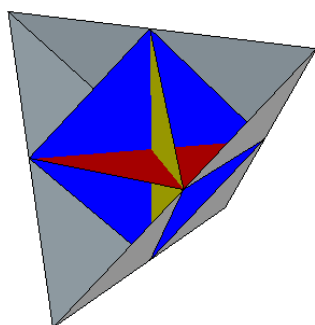


rys. 3

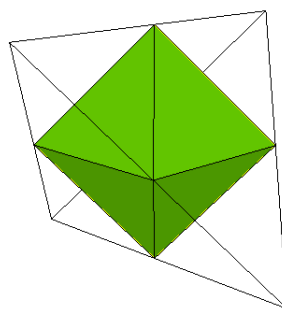


rys. 4

Czworościan można plasterkować różnie, ale interesującym będzie pokrojenie go płaszczyznami równoległymi do jednego z kwadratowych jego przekrojów. Takich przekrojów czworościan ma aż trzy – rysunek 5. Są one jednocześnie kwadratowymi przekrojami ośmiościanu foremnego, który widać wewnątrz czworościanu – rys. 6

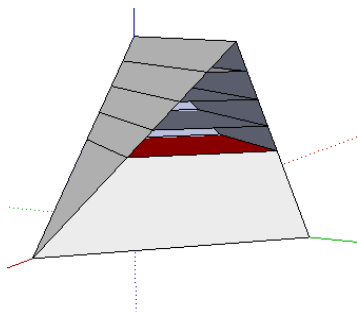


rys. 5

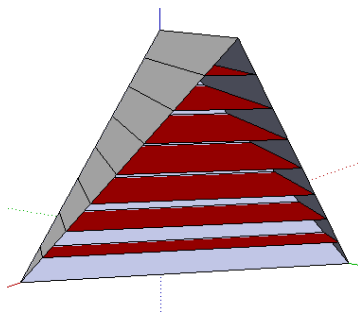


rys. 6

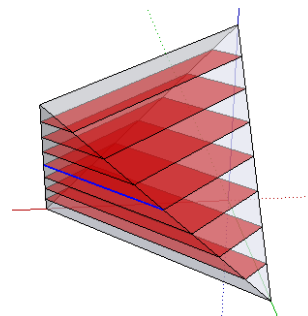
Wyberzmy więc jeden z kwadratowych przekrojów czworościanu i utwórzmy kilka przekrojów równoległych do niego. Będą nimi prostokąty. Widać że prostokąty leżące nad kwadratowym przekrojem zwężają się w jednym kierunku (rys.7), a leżące pod nim w kierunku prostopadłym do niego (rys.8), rozszerzają się.



rys. 7



rys. 8



rys. 9

Używając pakietu narzędzi **STYLE** (włączamy je w opcji **View / Toolbars/ Style**),

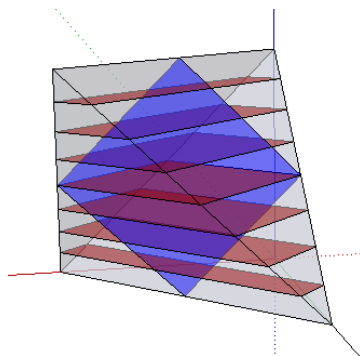


możemy oglądać czworościan w różny sposób w zależności od wyboru ikony:

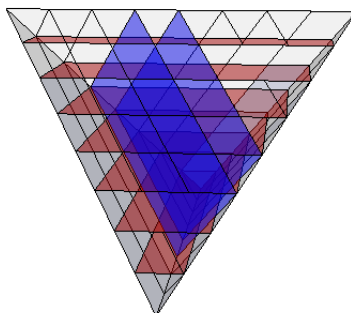
	(X-ray)	przezroczystość
	(BackEdges)	zasłonięte tylne krawędzie
	(Wireframe)	widoczne są tylko krawędzie obiektu
	(Hidden Line)	ukryte tylne krawędzie i kolory ścian
	(Shaded)	wyświetlanie bryły z kolorowymi ścianami
	(Shadedwith textures)	widoczne tylko ściany z teksturami
	(Monochrome)	widoczna tylko przednia ściana i tylne kolorowe.

Jeśli użyjemy narzędzia X-Ray, wówczas ujrzymy czworościan z jego wewnętrznymi przekrojami – rys. 9.

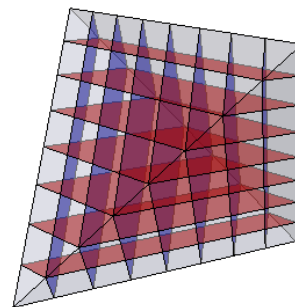
Teraz kolej na przekroje prostopadłe do już wykonanych (czerwonych). Utwórzmy najpierw ten najważniejszy – kwadratowy i wyróżnijmy go innym kolorem (na przykład niebieskim). Zauważmy, że kwadrat czerwony i niebieski mają wspólną przekątną i dwa wspólne wierzchołki – rys. 10.



rys. 10



rys. 11

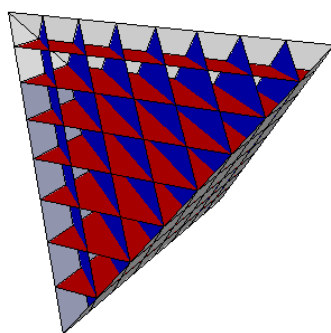


rys. 12

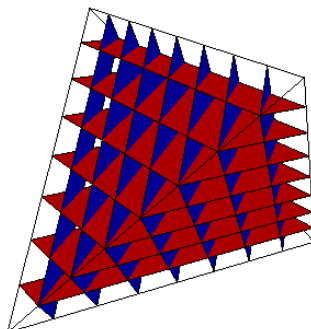
Kolejne przekroje tworzymy prowadząc odcinki równoległe do boków utworzonego niebieskiego kwadratu. Po wykreśleniu wszystkich czterech odcinków ukaże się nam pierwszy przekrój prostokątny – rys. 11.

Tworzymy kolejne aż będzie ich tyle samo co czerwonych – rys. 12. Liczba przekrojów jest nieparzysta, bo kwadrat jest na środku, a reszta ułożona symetrycznie względem niego.

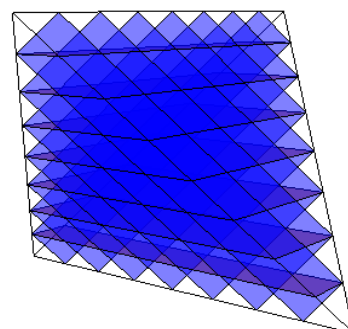
Gotową wersję plasterkową czworościanu ilustrują rysunki 13 i 14. Na rysunku 14 usunięte zostały wszystkie trójkąty leżące na ścianach czworościanu..



rys. 13



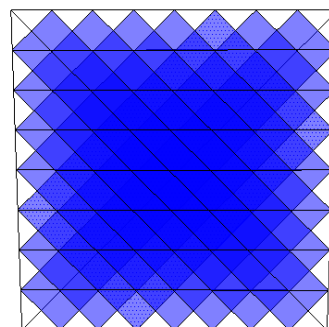
rys. 14



rys. 15

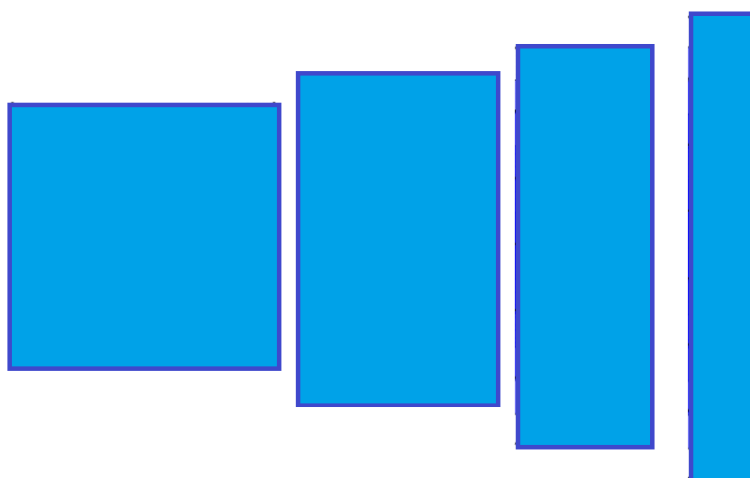
Rysunek 15 ilustruje prostokątne plastry niebieskie, niezbędne do stworzenia modelu warstwowego, ale rysunek ten jest wykonany w perspektywie. Program SketchUp pozwala spojrzeć na te plastry w rzucie równoległym (aksonometrii) – **Camera / ParallelProjection**.

Rysunek 16 ilustruje taki rzut. Na jego podstawie, można teraz uzyskać te prostokątne plasterki. Podobnie rzecz ma się z plasterkami czerwonymi. W każdym prostokącie niebieskim musimy wyciąć szczeliny, w które wejdą elementy prostokątów czerwonych, zawierających również takie same szczeliny. Umówimy się, że szczeliny prostokątów czerwonych są ustawione do góry a niebieskie w dół.

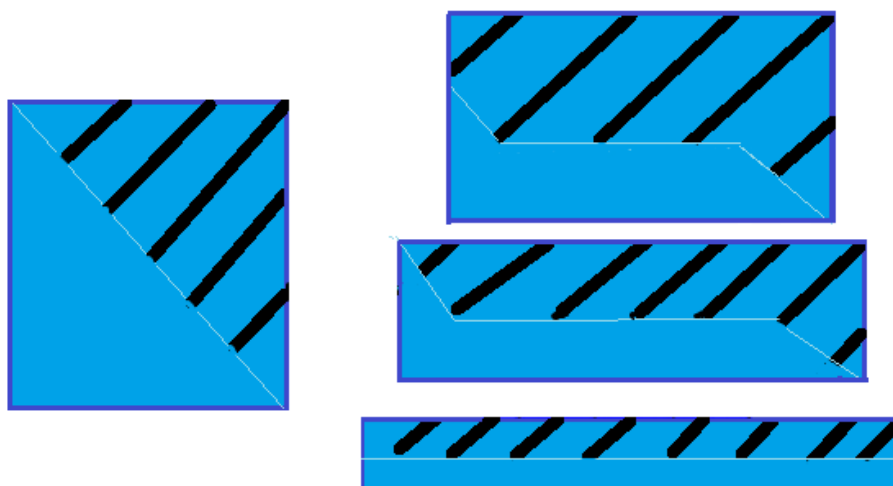


rys. 16

Oto poszczególne szablony plastrów:



Teraz trzeba je naciąć:



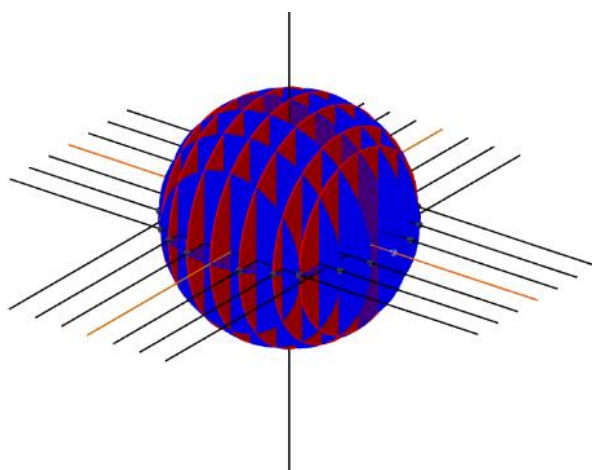
Następnie wsunąć jedno w drugie (w płaszczyznach prostopadłych).

2. KULA

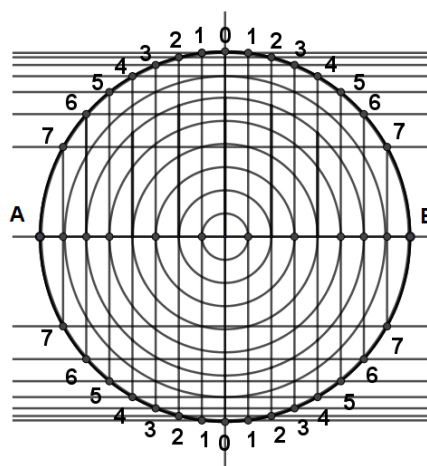
Konstrukcję modelu plasterkowego bryły obrotowej omówimy na przykładzie **plasterkowej kuli**. Jest ona niezwykle symetryczną bryłą zarówno względem trzech głównych płaszczyzn przekroju, jak też trzech osi i środka kuli, stąd łatwo ją zaprojektować.

Projekt rozpoczynamy od wykreślenia okręgu, który stanowi przekrój kuli płaszczyzną przechodzącą przez jej środek. Jedną ze średnic tego okręgu wybieramy umownie jako oś **OX** w układzie **XYZ** przestrzeni trójwymiarowej. Ponieważ wskazane jest, by plasterki krzyżowały się pod kątem prostym tworząc kwadratową sieć swoich przecięć, więc najpierw dzielimy wybraną średnicę **AB** na kilka przystających odcinków.

Rysunek 17 ilustruje gotowy model plasterkowy kuli z jej przekrojami, które będą stanowić szablony plasterków kuli. Widać, że plasterki te są kołami (czerwone i niebieskie) o zmniejszających się średnicach – rys. 17.



rys. 17



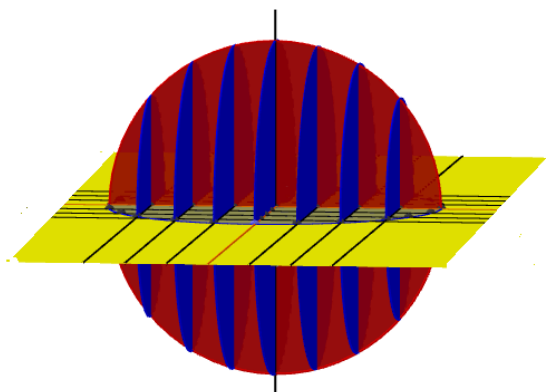
rys. 18

Rysunek 18 przedstawia płaski obraz przekroju kuli płaszczyzną przechodzącą przez jej środek. Średnicę **AB** kuli dzielimy na równą liczbę odcinków – w naszym przypadku jest ich czternaście, po siedem po każdej stronie średnicy – rys. 18. Oznacza to, że plasterków będzie łącznie 15 – największy, przechodzący przez środek i siedem przystających po każdej stronie względem środkowego plasterka. Tyle samo plasterków musi być na drugiej płaszczyźnie prostopadłej do tej. Malujemy je innym kolorem, gdyż wtedy bryła wygląda bardziej plastycznie.

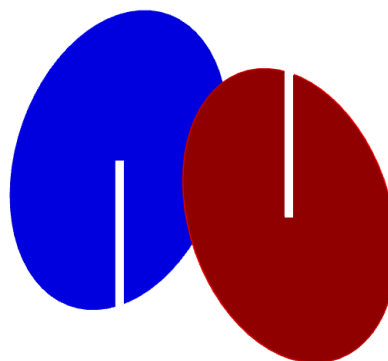
Samo projektowanie bryły plasterkowej odbywa się w programie GeoGebra. Dokładność tego programu oraz narzędzia w postaci cyrkla i linijki pozwalają z łatwością zrealizować nasz zamiar. Plasterkami, które wykorzystamy do złożenia naszej kuli są współśrodkowe koła o zmiennych średnicach – widoczne na rysunku 18. Jedne z nich pomalujemy kolorem niebieskim, drugie czerwonym.

Teraz wystarczy je wyciąć i zrobić w nich takie nacięcia, by każdy niebieski plasterek „wchodził” w odpowiedni plasterzek czerwony.

Zasada tworzenia tych nacięć polega na tym, by długość nacięcia jednego plasterka plus długość nacięcia drugiego dawały w sumie długość wspólnej cięciwy obu plasterków. Dla kuli nacięcia te będą miały długość promienia każdego okrągłego plasterka. Rysunek 19 pokazuje wspólne cięciwy niebieskich plasterków i największego czerwonego plasterka, a rysunek 20 sposób tworzenia nacięć jednego z niebieskich z czerwonym.



rys. 19



rys. 20

Efektom końcowym opisanej konstrukcji jest model plasterkowy kuli wykonany przez nasz zespół.

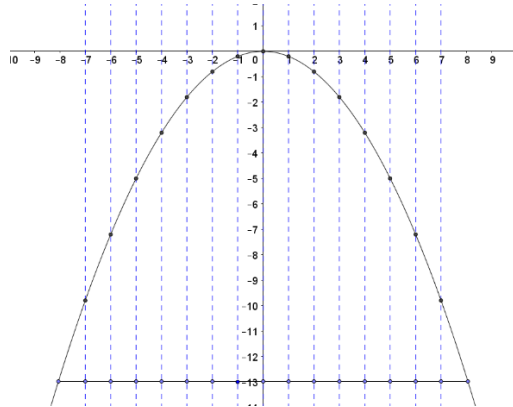


rys. 21

3. PARABOLOIDA KOŁOWA

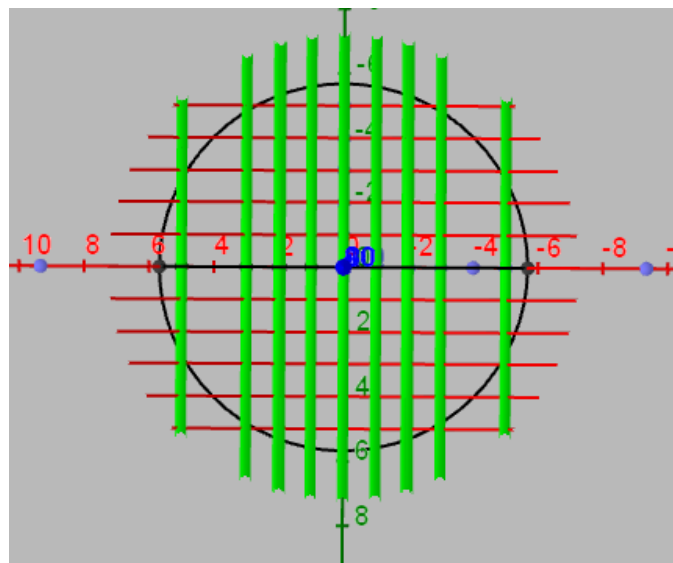
Podobnie jak kulę można zaprojektować inną bryłę obrotową - **paraboloidę kołową**. Ma ona również dwie prostopadłe płaszczyzny symetrii i jedną oś. Oto przebieg konstrukcji:

- kreślimy w GeoGebraze wykres funkcji kwadratowej, np. o równaniu $y = -x^2$,
- wybieramy cięciwę tej paraboli prostopadłą do jej osi,
- dzielimy ją na parzystą liczbę równych odcinków, np. 22,
- w ich końcach wystawiamy proste prostopadłe,
- przetną one tę parabolę w 17 punktach.



rys. 22

Zwróćmy uwagę na rzut z góry na tę paraboloidę. Widać w nim koło i linie pozostałych parabol w postaci odcinków – rys.23.



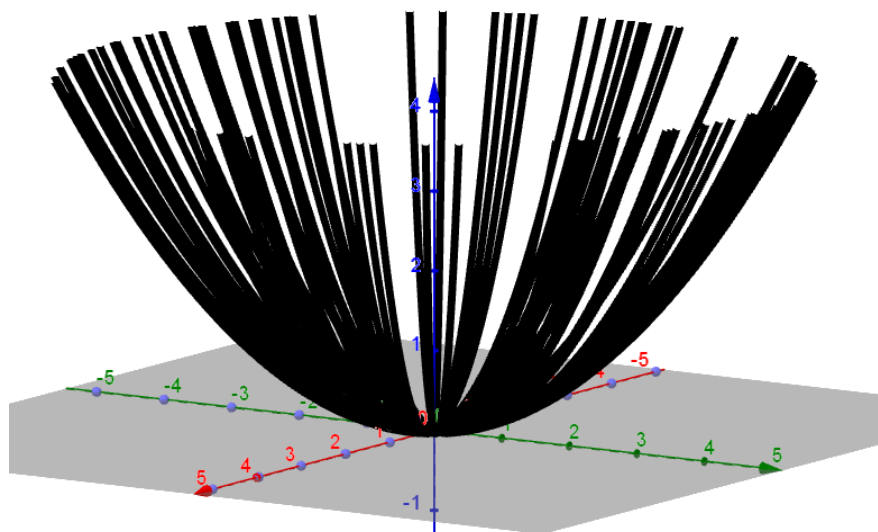
rys. 23

Naszym zadaniem jest skonstruowanie paraboloidy kołowej której osią obrotu jest oś **Z**.

W tym celu:

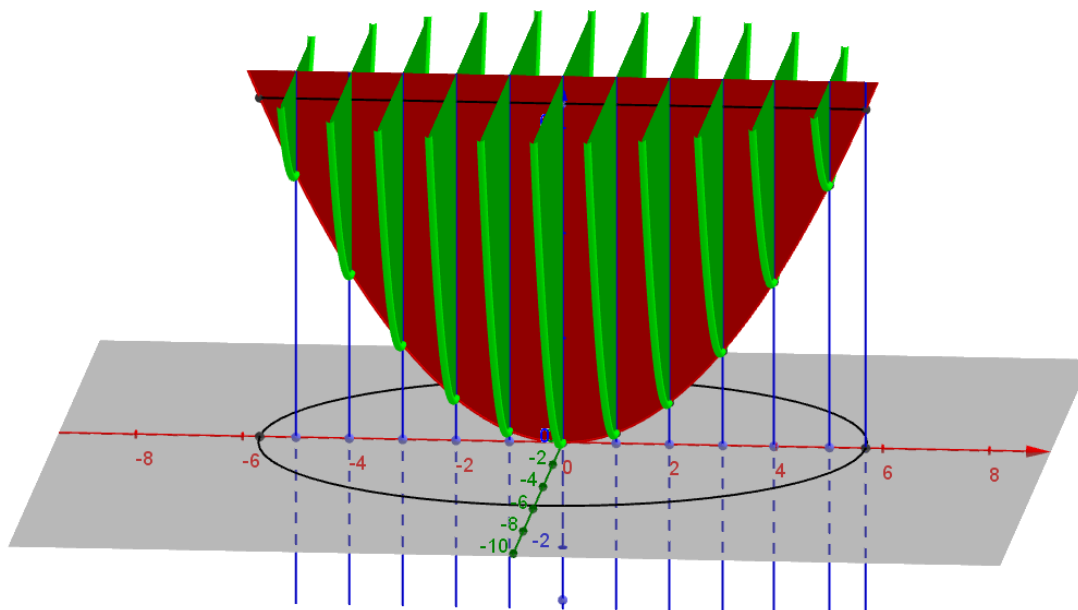
- Najpierw skonstruujemy wykres funkcji kwadratowej $y = 0,2x^2$ leżącej w płaszczyźnie **XY**
- Teraz obróćmy ten wykres względem osi **OX** o 90° niezgodnie z ruchem wskazówek zegara.

- Jeżeli włączymy ślad tej paraboli i zaczniemy ją obracać wokół osi Z , to otrzymamy poszukiwaną paraboloidę kołową – rys. 24.



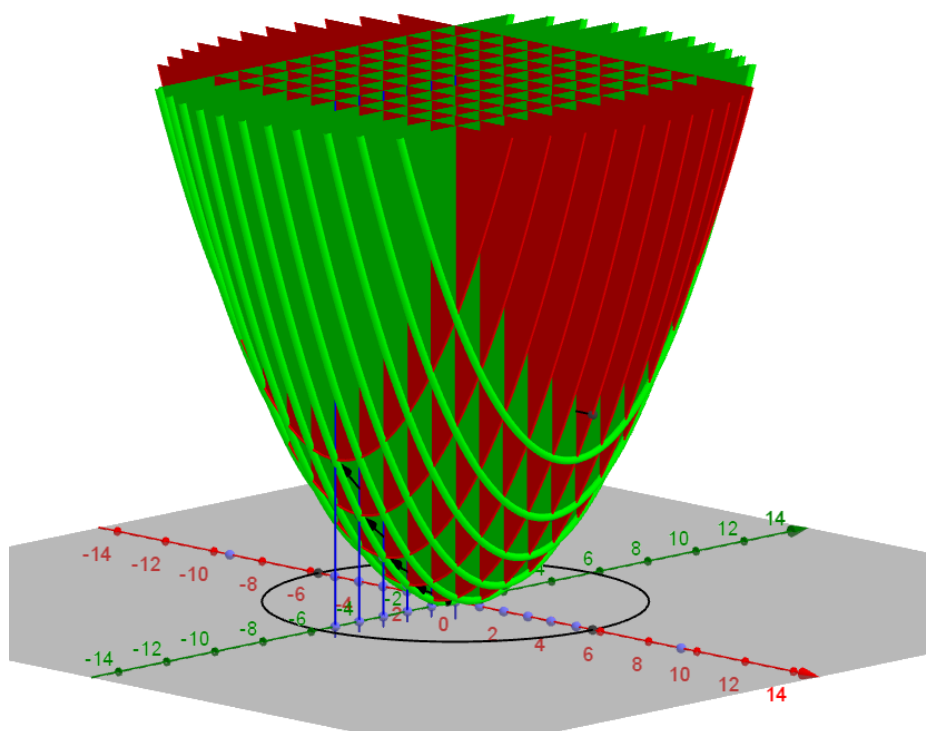
rys. 24

- Nam jednak nie chodzi o to, by oglądać ją w obrocie, ale o to, by utworzyć rodzinę parabol równoległych do paraboli leżącej w płaszczyźnie XZ i paraboli leżącej w płaszczyźnie YZ .
- Ta parabola, która leży w płaszczyźnie XZ niech będzie koloru czerwonego, a leżąca w płaszczyźnie YZ koloru zielonego. Nazwijmy obie parabolami głównymi.
- Możemy zamalować obszar między każdą z tych parabol a płaszczyzną ograniczającą widok 3D (tzw box).
- Najwyższy punkt dostępny w widoku 3D GeoGebry znajduje się na wysokości $z = 6.45$. Dlatego też przez punkt $(0,0,6.45)$ poprowadzimy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny XY i wykreślimy okrąg o osi Z przechodzący przez jeden z punktów przecięcia tej płaszczyzny z dowolną parabolą.
- Okrąg ten zamknie nam paraboloidę.
- Teraz kolej na utworzenie parabol, które będą stanowić plasterki naszej paraboloidy.
- W tym celu kreślimy okrąg będący rzutem naszego okręgu, wskazujemy na osi OX punkty kratowe i wystawiamy w nich proste prostopadłe do płaszczyzny XY .
- Punkty przecięcia tych prostych z parabolą będą końcami wektorów, o które musimy przesunąć zieloną parabolę
- Otrzymamy w ten sposób rodzinę parabol - plasterków zielonych naszej paraboloidy.
- Pozostałe zielone parabole otrzymamy w symetrii względem płaszczyzny YZ – rys.25 .



rys.. 25

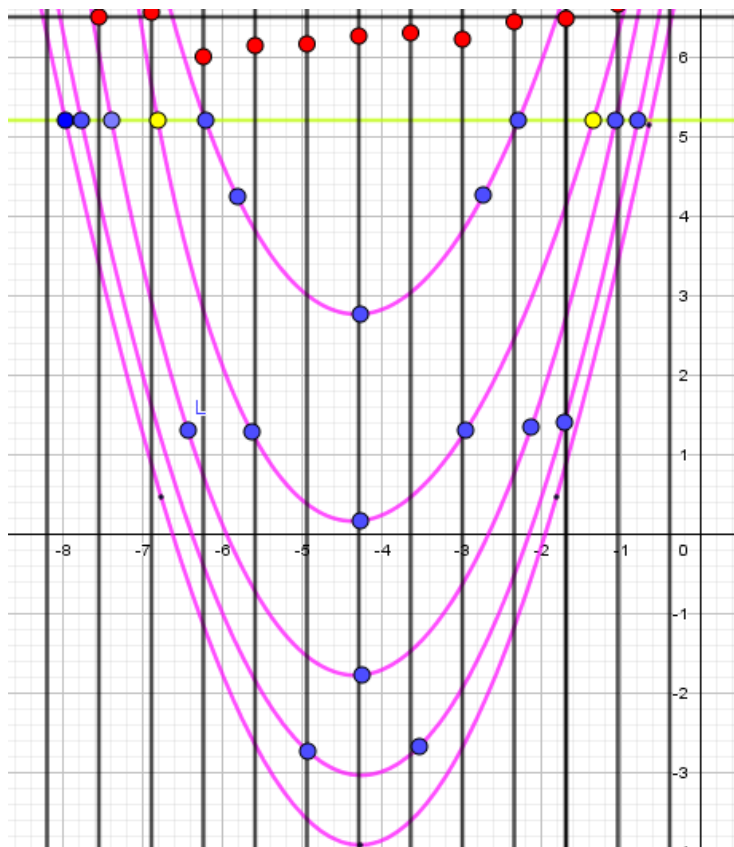
Teraz kolej na parabole równoległe do głównej czerwonej paraboli. Czynimy to podobnie jak w przypadku głównej zielonej paraboli.



rys. 26

Jak wyznaczyć szablony tych plasterków zielonych i czerwonych?

Poniższy rysunek obrazuje szablony poszczególnych plasterków paraboloidy



rys.. 27

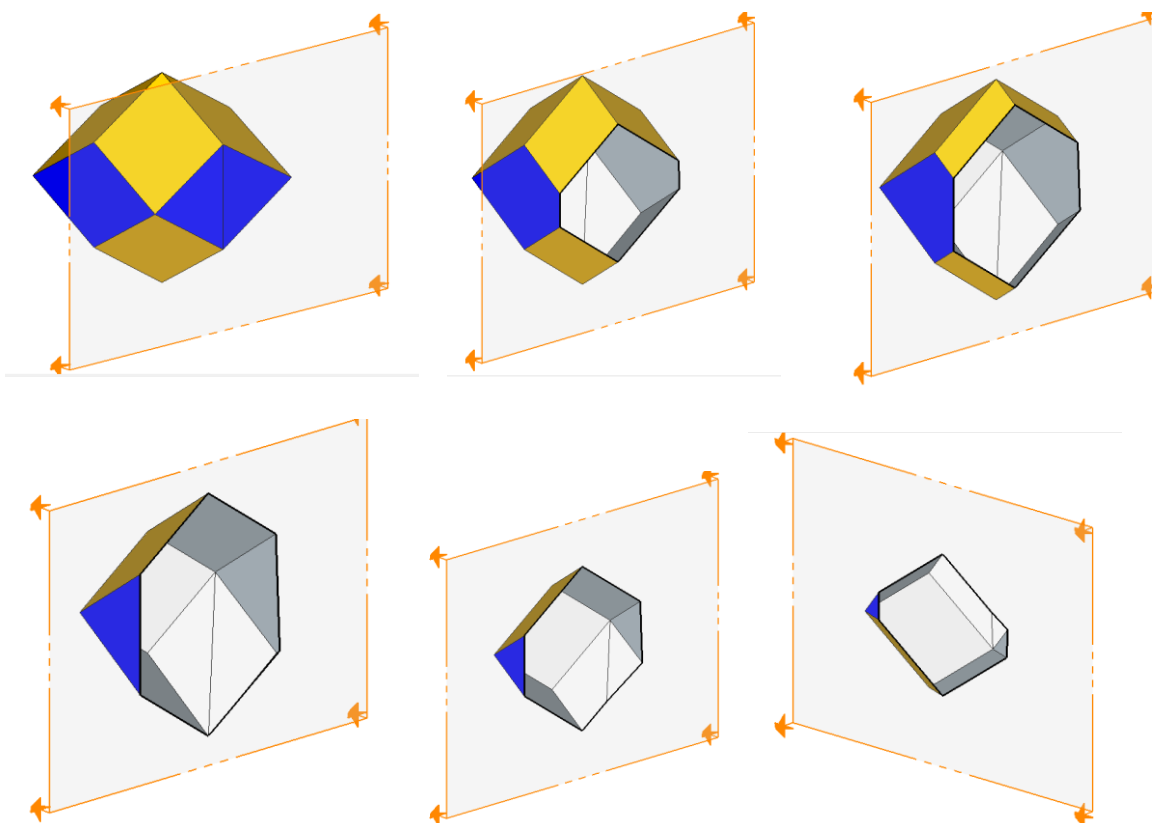
Wykonujemy dwie kopie jedną na czerwono drugą na zielono. Następnie wycinamy je i nacinamy jeden komplet od dołu, a drugi od góry. A oto model paraboloidy kołowej



rys. 28

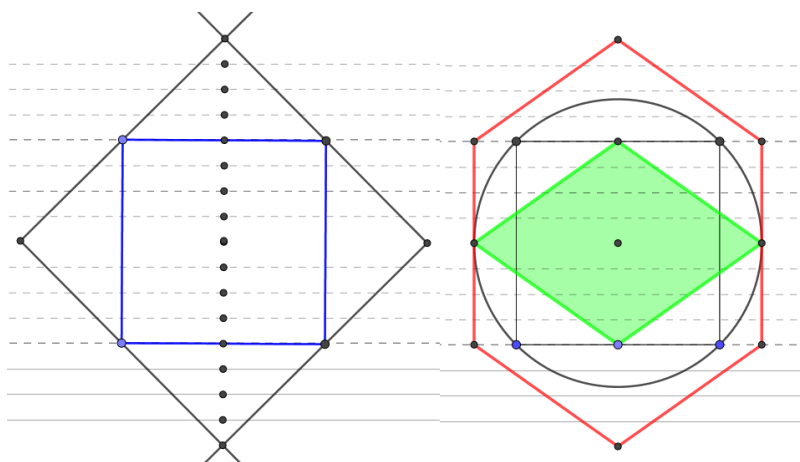
4. DWUNASTOŚCIAN ROMBOWY

Przekroje plasterkowe dwunastościanu rombowego można z łatwością uzyskać przy pomocy programu SketchUp. Jest tam narzędzie przecinające bryłę płaszczyznami równoległymi do siebie, ukazujące te przekroje. Zrzuty ekranu SketchUp na rysunku 29 ilustrują przekroje dwunastościanu rombowego z których wykonamy szablon modelu plasterkowego.

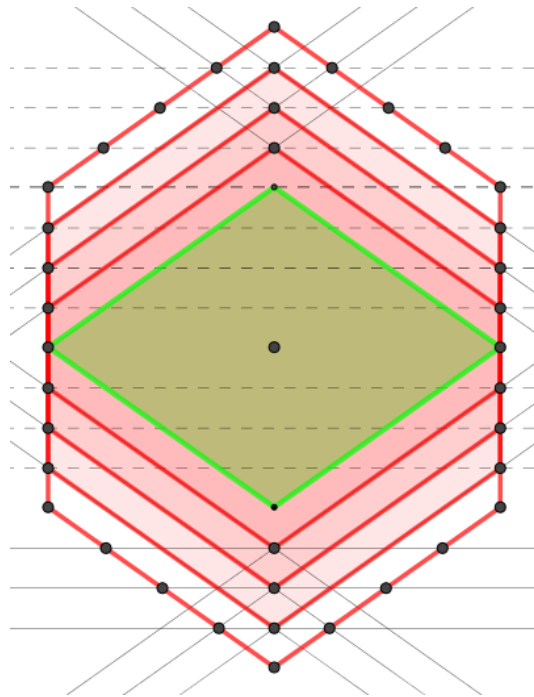


rys.29

A tak konstruujemy szablon w celu wykonania modelu dwunastościanu rombowego.

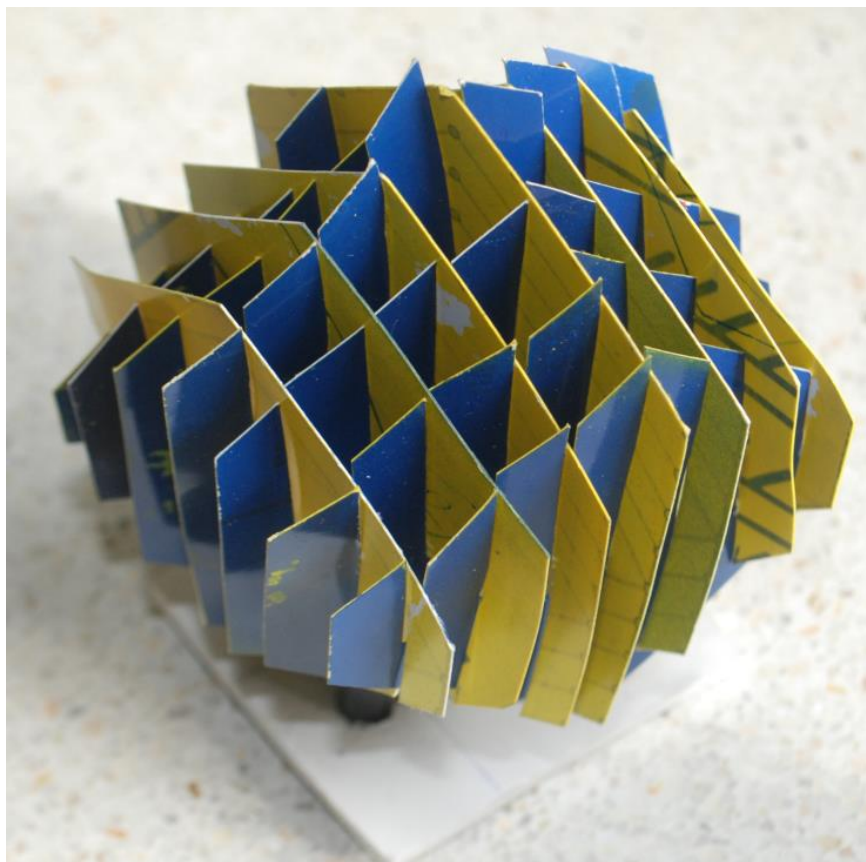


rys.30



rys.31

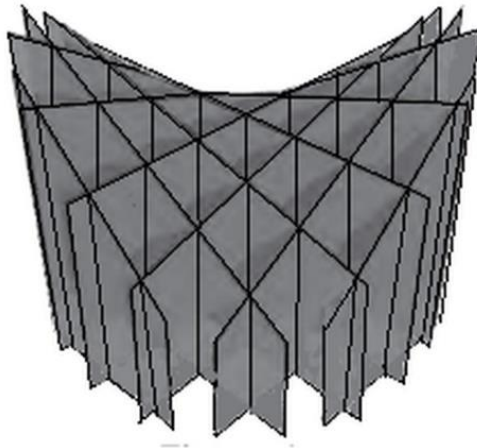
A to gotowy model plasterkowy dwunastościanu rombowego.



rys. 32

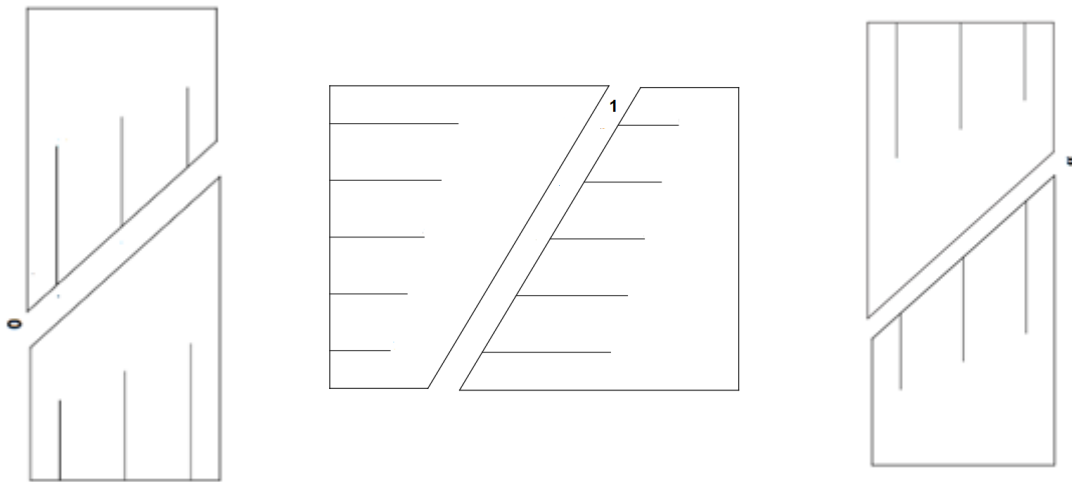
5. HIPERBOLOIDA

Łatwą do wykonania wydaje się hiperboloida. Widać, że jej przekroje są trapezami, przy czym jedne „wznoszą się” a te z przeciwnej strony „opadają”. To daje pomysł na stworzenie ich szablonów.

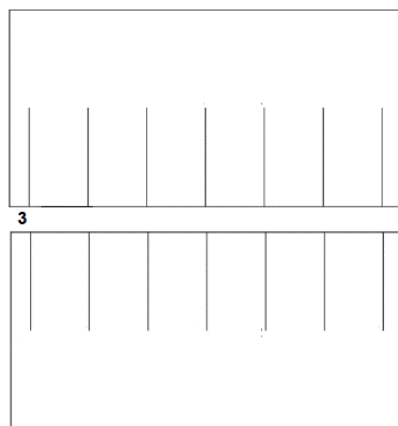
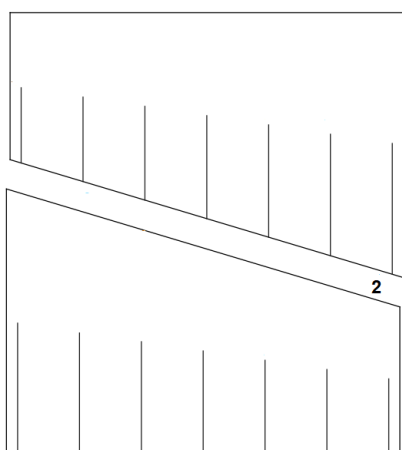


rys.33

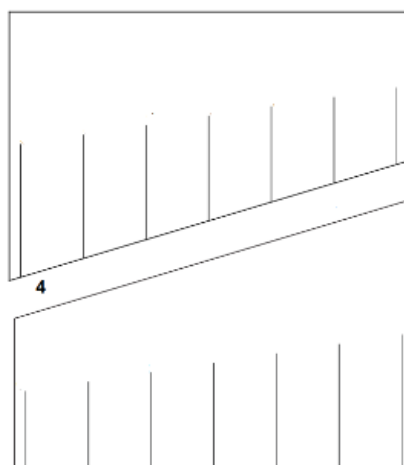
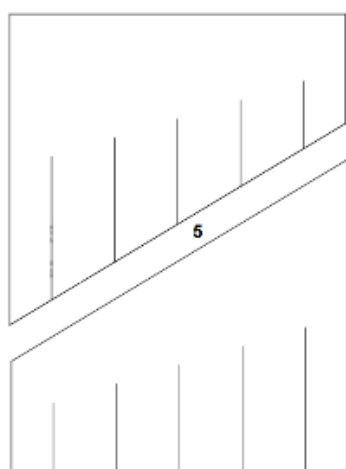
Kolejne rysunki przedstawiają szablony z zaznaczonymi wycięciami.



rys. 34

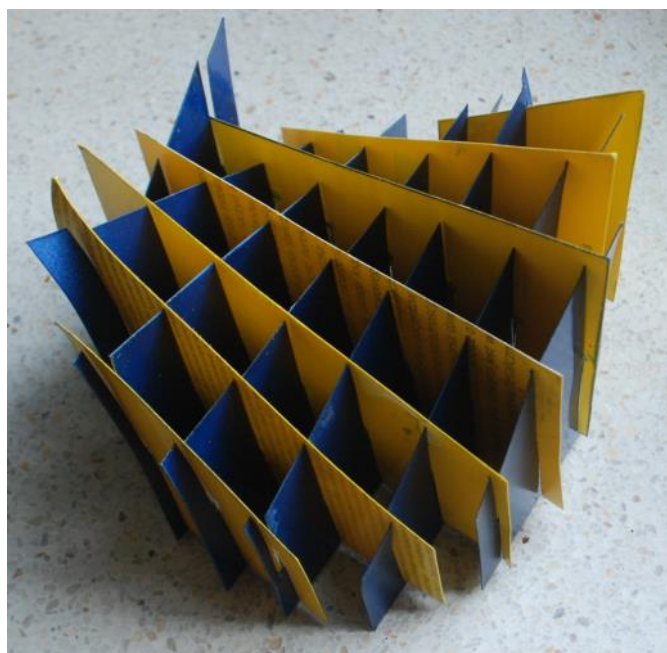


rys. 35



rys. 36

A oto model wykonany przez nas.



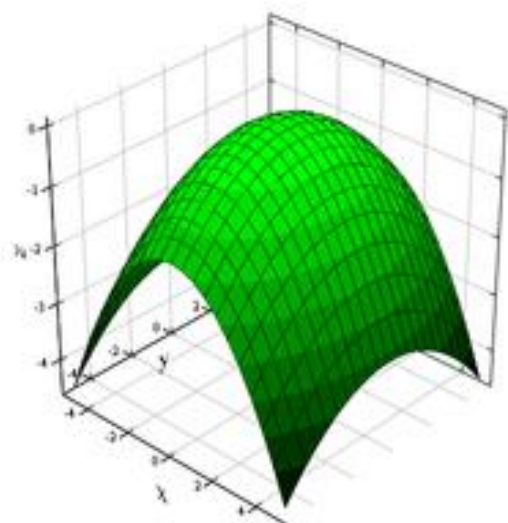
rys. 37

6. PARABOLOIDA ELIPTYCZNA I HIPERBOLICZNA

W matematyce rozróżniamy paraboloidę eliptyczną o równaniu $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ oraz

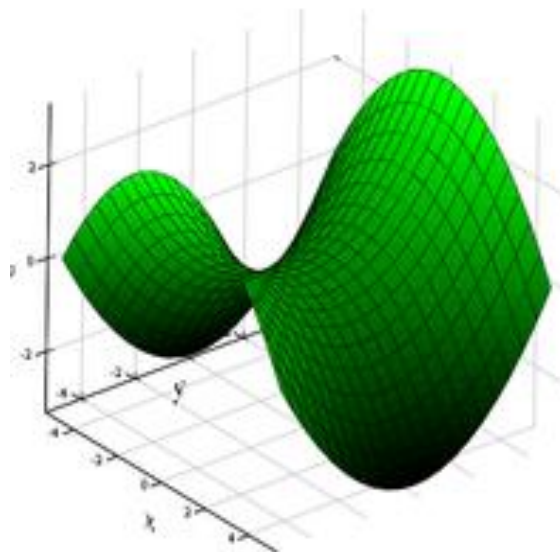
paraboloidę hiperboliczną o równaniu $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

Ich dynamiczną grafikę 3D uzyskujemy w programie DPGraph. Poniższe rysunki ilustrują wygląd obu parabol.



rys.38

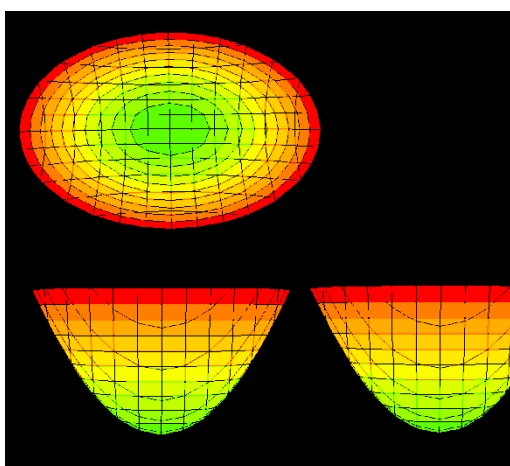
Paraboloida eliptyczna dla $a=2$, $b=3$ w obszarze $[-5,5] \times [-5,5]$



rys.39

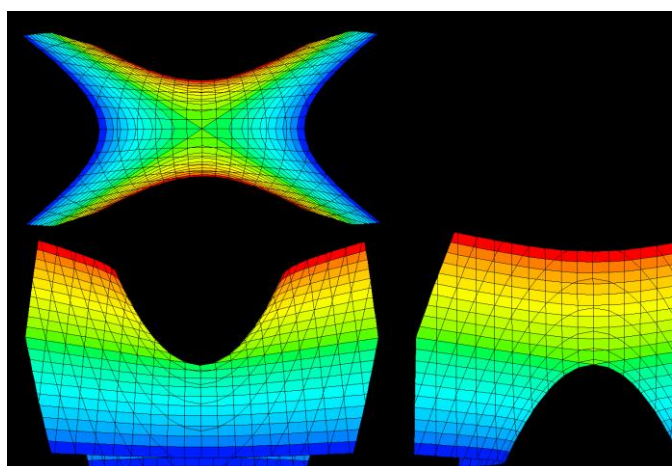
Paraboloida hiperboliczna dla $a=b=2$, w obszarze $[-5,5] \times [-5,5]$

Spróbujmy uzyskać ich rzuty w programie DPGraph.



rys.40

Paraboloida eliptyczna

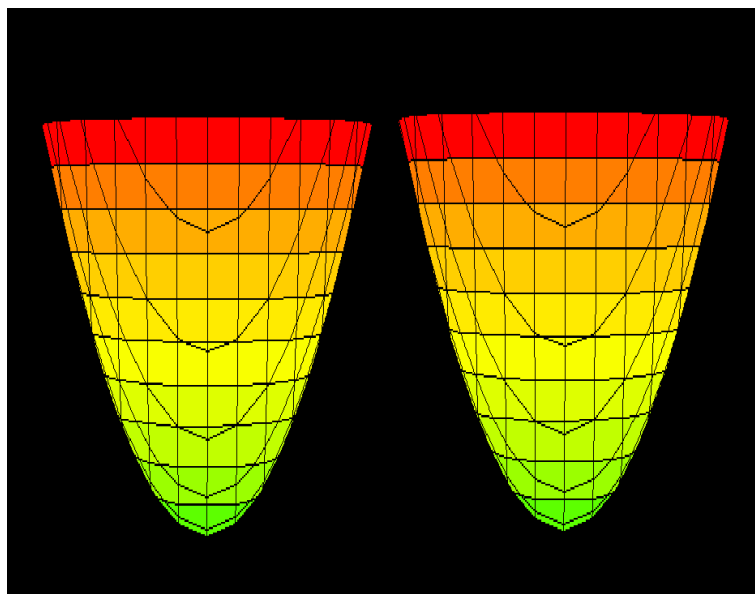


rys.41

Paraboloida hiperboliczna

Wykonajmy model paraboloidy eliptycznej.

Spróbujmy „rozciągnąć” paraboloidę eliptyczną w kierunku „góra-dół”. Otrzymamy w ten sposób kształty poszczególnych plasterków na jednym rysunku.



rys.42

Teraz, wstawiając powyższy rysunek do programu GeoGebra wprowadzamy wszystkie parabole przedstawione na nim rozrysowując poszczególne szablony plasterków. Kreślimy je narzędziem **Krzywa stożkowa** przez 5 punktów oraz kreślimy je ponownie z większą dokładnością.

Paraboloida eliptyczna różni się od kołowej tym, że oba przekroje prostopadłe nie są takie same.

Oto gotowy model tej paraboli:



rys. 43

ZAKOŃCZENIE

Nasz zespół wspomagany naszą nauczycielką matematyki – panią mgr Iwona Sitnik oraz opiekunem zewnętrznym panem dr Bronisławem Pabichem pracował nad bryłkami plasterkowymi przez niemal dwa lata. Niestety okres pandemii pokrzyżował nam szersze plany, jakie mieliśmy w zamiarze i nie zdążyliśmy wykonać zbyt wiele modeli. Mamy nadzieję do kwietnia „odkurzyć” nasze modele i dorościć jeszcze nowe i przedstawić je na sesji matematycznej.



Milena Kajca Magdalena Czaplak, Karolina Kowalska
XX LO im L Staffa w Krakowie